



Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences
Département de Physique

Théories de la Gravitation
à la Lumière
d'Etoiles Doubles

Dissertation présentée par
Yves Wiaux
en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

2002

Remerciements...

Avant toute autre chose, nous nous permettons les quelques mots qui suivent à titre de remerciements.

Au Professeur Jean-Marc Gérard de l'Université catholique de Louvain. Il aura été un promoteur de choix. Ses conseils et sa collaboration auront contribué de façon essentielle à la qualité des recherches scientifiques exposées dans cette dissertation.

Aux Professeurs Jan Govaerts et Jacques Weyers de l'Université catholique de Louvain. Leur intérêt constamment manifesté pour le travail effectué et leurs encouragements ne seront pas restés lettre morte...

To Professor John Miller of the International School for Advanced Studies (Trieste, Italy) and of Oxford University (Oxford, England). The discussions we had with him will have been of fundamental interest in the achievement of our research.

To Professor Lisa Randall of Harvard University (Cambridge MA, USA). The research we had the opportunity to perform at the Department of Physics will have led to important results exposed in this dissertation.

A l'Unité de Physique Théorique et Mathématique de l'Université catholique de Louvain. La liberté qui nous aura été octroyée et les moyens mis en œuvre pour la réalisation de nos recherches auront sans conteste contribué à leur aboutissement.

Au Président du Département de Physique de l'Université catholique de Louvain et aux membres du Jury. Nous leur exprimons toute notre reconnaissance pour la lecture attentive et critique de ce manuscrit.

A tous ceux qui auront participé dans l'ombre au résultat ci-présent. Qu'ils se reconnaissent en ces quelques mots et soient remerciés. Sans emphase il est vrai, mais sincèrement. Du Professeur à l'étudiant. Du plus ancien au plus jeune. Parent, ami...

Table des matières

Introduction	3
1 Théories de la gravitation	7
1.1 Fondements de la gravitation	7
1.2 Relativité Générale	13
1.3 Théories scalaire-tenseur	18
1.4 Tests classiques	22
1.5 Principes d'Equivalence	26
1.6 Approche alternative	37
2 Ondes de gravitation	43
2.1 Quadrupole (Relativité Générale)	44
2.2 Analyse expérimentale (pulsars binaires)	48
2.3 Dipole (Brans-Dicke)	53
2.4 Dipole et Principe Fort	56
3 Dimensions supérieures larges	59
3.1 Hiérarchie des couplages	59
3.2 Modèles <i>ADD</i>	60
3.3 Théorie effective	62
3.4 Potentiel d'interaction	69
3.5 Contraintes expérimentales	72
4 Dimension supérieure unique	77
4.1 Modèle <i>RS</i>	77
4.2 Théorie effective	79
4.3 Modes massifs	84
4.4 Phénoménologie	86
5 Systèmes binaires et contraintes	89
5.1 Charges gravitationnelles	89
5.2 Théories de Brans-Dicke	90
5.3 Théories de "Kaluza"	94
5.4 Systèmes binaires et contraintes	98
Conclusions	103

A	Décroissance orbitale	105
A.1	Perte d'énergie tensorielle	105
A.2	Perte d'énergie scalaire	106
A.3	Décroissance orbitale	109
B	Alternative à la compactification	111
B.1	Modèle à une membrane (RS')	111
B.2	Combinaison	113

Introduction

Gravitation, électromagnétisme, interactions faible et forte. Dans notre conception moderne de la physique, l'univers est régi par quatre interactions fondamentales. Les théories développées aujourd'hui pour leur description sont des théories relativistes, au sens de la Relativité Restreinte (c); elles sont nées d'un même principe unificateur fondamental, basé sur la notion de symétrie de jauge, et la propagation des interactions y est décrite en termes de champs de jauge. Le Modèle Standard de la physique des particules est une théorie des champs quantique (\hbar) pour les interactions électrofaible et forte. La Relativité Générale d'Einstein est une théorie des champs classique définissant l'interaction gravitationnelle comme un phénomène géométrique, à travers l'identification de la métrique de l'espace-temps au champ de gravitation (G). Le champ de jauge pour la propagation de la gravitation est donc identifié à des perturbations dynamiques de la géométrie de l'espace-temps, alors que les photon, bosons faibles, et gluons propagent les interactions électromagnétique, faible et forte respectivement, sur la structure élémentaire de l'espace de Minkowski. Ces théories sont confirmées par de multiples tests expérimentaux; elles expliquent essentiellement l'ensemble des phénomènes physiques fondamentaux étudiés à ce jour. Pourtant, nous savons devoir aller au-delà. Avant tout, dans la perspective naturelle de l'établissement d'une théorie unifiée des interactions fondamentales, la Mécanique Quantique, sur laquelle se fonde le Modèle Standard, et la Relativité Générale sont incompatibles : la théorie quantique de la gravitation basée sur la théorie d'Einstein n'est pas renormalisable en théorie de perturbation, de par la dimension canonique négative de sa constante de couplage. Il s'agit d'un obstacle majeur dans notre compréhension des interactions fondamentales.

Au-delà du Modèle Standard. Au niveau théorique, les valeurs d'un nombre important de paramètres du modèle sont arbitraires : angles de mélange, masses et constantes de couplage. Dans une approche plus naturelle, ces valeurs devraient être déterminées par la théorie. Par ailleurs, dans l'hypothèse où la masse de Planck (associée au couplage gravitationnel G) est la seule échelle de masse fondamentale, l'échelle électrofaible est instable par rapport aux corrections radiatives induites dans le processus de renormalisation de la théorie (problème hiérarchique). Seules des symétries additionnelles à celles qui définissent le Modèle Standard (Supersymétrie, etc.) permettraient de stabiliser naturellement l'échelle électrofaible. Enfin, au niveau expérimental même, des observations récentes suggèrent fortement la présence des oscillations de neutrinos. Ces oscillations ne s'expliquent qu'en termes de l'existence de neutrinos massifs, non envisagés dans le cadre du Modèle Standard.

Au-delà de la Relativité Générale. La principale problématique théorique réside dans le fait que les équations de la Relativité Générale régissant la structure de l'espace-temps admettent des singularités au niveau de leurs solutions classiques (trous noirs, singularité au Big-Bang, etc.). La physique en leur voisinage n'est pas définie et d'autres théories sont envisagées, qui permettraient de les éviter. Au niveau expérimental, les tests de gravitation en champ faible

réalisés dans la Galaxie sont en accord parfait avec la théorie d'Einstein. Mais dans le domaine de la cosmologie, les derniers résultats observationnels plaident en faveur d'une évolution accélérée de notre univers. Cette constatation et d'autres résultats expérimentaux ne s'expliquent (dans le cadre de la Relativité Générale) que par l'introduction d'une constante cosmologique *ad hoc*, dont la valeur domine progressivement l'évolution de notre univers par rapport à la matière qu'il contient. Par ailleurs, dans l'absolu, cette valeur effective observée est extrêmement faible par rapport aux contributions des énergies du vide provenant des interactions électrofaible et forte. La densité d'énergie associée à la constante cosmologique pure doit par conséquent être ajustée sur au moins 47 ordres de grandeur pour satisfaire aux exigences expérimentales. Constatons qu'aucune théorie ne permet aujourd'hui de résoudre ce problème de la constante cosmologique.

Dans ce contexte, nous nous intéressons particulièrement à la structure de l'interaction gravitationnelle, au-delà du cadre même de la Relativité Générale. Des théories quantiques relativistes proposant l'unification des interactions fondamentales (Supergravité et théories de Cordes) existent. Elles sont construites sur des espaces-temps de dimension supérieure, et les théories effectives associées en quatre dimensions définissent un secteur gravitationnel étendu, incluant des champs auxiliaires de gravitation en plus du champ métrique. Elles sont cependant encore loin de supplanter nos théories actuelles, notamment parce que les mécanismes qui président à la compactification des dimensions supplémentaires, et en conséquence les théories effectives associées en quatre dimensions, ne sont pas déterminés de manière univoque. Mais les concepts qu'elles introduisent, champs auxiliaires de gravitation et dimensions supplémentaires, définissent des directions importantes pour la construction de théories de la gravitation au-delà de la Relativité Générale.

La théorie d'Einstein et ses alternatives majeures se fondent, dans quatre dimensions d'espace-temps, sur l'hypothèse du Principe d'Equivalence (outre le Principe de Relativité Générale). Ce principe postule l'universalité de la chute libre (locale) des corps dans un champ de gravitation, identifiant masse inertielle et masse gravitationnelle. Dans le cadre de la Relativité Générale, la métrique de l'espace-temps constitue l'unique champ de gravitation, et le Principe d'Equivalence est vérifié sous sa forme la plus forte, admettant que des corps compacts (étoiles à neutrons, trous noirs, etc.) subissent la même accélération gravitationnelle que des corps-tests. D'autre part, toute extension relativiste de la théorie de la gravitation universelle de Newton prédit aussi l'existence des ondes de gravitation, qui véhiculent l'interaction entre les masses comme les ondes électromagnétiques transportent l'interaction entre des charges électriques. A l'ordre dominant dans la théorie d'Einstein, la charge gravitationnelle est définie par la masse même des corps, et les radiations sont de nature quadrupolaire.

La présence de *champs auxiliaires de gravitation* serait à l'origine, d'une part, de la violation du Principe d'Equivalence, au moins dans sa version forte, et d'autre part, de la définition de charges gravitationnelles auxiliaires responsables de radiations dipolaires dominantes. Elle toucherait donc aux concepts fondamentaux de la théorie, proposant dans le même temps des signatures expérimentales observables en termes de mouvements anomaux des corps compacts et d'ondes gravitationnelles dipolaires.

L'existence de *dimensions supplémentaires* modifierait fondamentalement la structure de l'interaction gravitationnelle avec la matière. La Relativité Générale définit cette structure en termes de la propagation d'un médiateur non massif unique, le graviton. La présence de dimensions supplémentaires introduirait des gravitons massifs dans la théorie effective en

quatre dimensions. Des signatures expérimentales importantes peuvent y être associées en termes d'une modification du potentiel d'interaction et de la phénoménologie des autres interactions, à haute énergie.

Théories de la gravitation. Le premier chapitre débute avec l'étude des fondements de la Relativité Générale. La théorie est établie. Nous considérons ensuite les théories scalaire-tenseur de Brans-Dicke, extensions minimales standard de la théorie d'Einstein, introduisant un couplage de la métrique de l'espace-temps à un champ scalaire auxiliaire. Nous étudions les tests majeurs de gravitation en champ faible. Les expériences vérifient les prédictions de la Relativité Générale avec une précision importante, mais ne permettent en rien d'exclure un couplage scalaire faible. Enfin, les différentes versions du Principe d'Equivalence sont définies, et les tests expérimentaux associés sont considérés en détail. En particulier, nous étudions un effet d'accélération anormale des corps compacts (Effet Nordtvedt), dû à la violation du Principe d'Equivalence Fort. A cet effet peut être associée une polarisation des orbites de systèmes binaires, dont l'étude dans le cadre du système Terre - Lune impose notamment une contrainte expérimentale importante sur le couplage scalaire de Brans-Dicke.

Ondes de gravitation. L'étude des ondes gravitationnelles constitue un domaine de test à part entière pour les théories de la gravitation. Dans le second chapitre, nous étudions d'abord la structure quadrupolaire des ondes gravitationnelles dans le cadre de la Relativité Générale. La seule évidence expérimentale connue à ce jour pour leur existence même est établie dans l'étude de la décroissance de la période orbitale de deux pulsars binaires, les PSR B1913 + 16 et PSR B1534 + 12. Nous considérons ensuite la dominance des radiations dipolaires associées à la composante scalaire dans le cadre des théories de Brans-Dicke, suggérant que l'étude de la décroissance orbitale de systèmes binaires puisse donner des contraintes importantes sur le couplage scalaire. Enfin, nous établissons une relation générique entre la violation du Principe d'Equivalence Fort et les radiations dipolaires dominantes, à travers l'existence même de champs de gravitation auxiliaires.

Dimensions supérieures larges et Dimension supérieure unique. Dans les chapitres 3 et 4, nous étudions en détail des modèles en dimension supérieure, récemment introduits en réponse au problème hiérarchique de la physique des particules évoqué plus haut. La gravitation se propage dans tout l'espace-temps alors que les champs de matière sont confinés sur une membrane en quatre dimensions. Les modèles *ADD* définissent l'espace-temps comme simple produit direct de l'espace-temps quadridimensionnel habituel avec un espace de dimensions supplémentaires larges, dont le volume est fixé de manière à poser l'échelle électrofaible comme seule et unique échelle de masse fondamentale de la physique, en lieu et place de l'échelle de Planck. Nous établissons la théorie effective en quatre dimensions dans une approche originale et simplifiée et considérons en détail les contraintes expérimentales. Les modèles *RS* considèrent un espace-temps en cinq dimensions, défini par une géométrie non factorisable, où les composantes quadridimensionnelles de la métrique dépendent de la coordonnée dans la cinquième dimension. L'échelle de Planck y reprend une place fondamentale, et l'échelle électrofaible est induite naturellement sur la membrane par un facteur géométrique exponentiel. Nous proposons à nouveau une approche originale pour l'établissement de la théorie effective en quatre dimensions (résultant d'un développement complexe dans cette géométrie non triviale) et considérons la phénoménologie associée. Dans l'une et l'autre théorie, la structure de l'interaction gravitationnelle effective est donnée en termes d'une tour d'excitations mas-

sives s'ajoutant à des modes de masse nulle tensoriel (le graviton) et scalaire. Les excitations massives constituent une signature importante de la présence de dimensions supplémentaires ; à haute énergie, elles modifient la phénoménologie des autres interactions fondamentales et définissent un potentiel gravitationnel différent du potentiel de Newton. Des contraintes théoriques et expérimentales réduisent la structure de l'interaction à basse énergie, donnée par les modes de masse nulle, à celle de la Relativité Générale.

Systèmes binaires et contraintes. Dans le dernier chapitre, nous généralisons la relation établie entre la violation du Principe d'Équivalence Fort et les radiations dipolaires, à travers le concept générique de charge gravitationnelle. Une approche indépendante des résultats principaux du second chapitre dans le cadre des théories scalaire-tenseur est proposée, centrée sur l'existence d'une charge scalaire définie par l'énergie de liaison gravitationnelle interne des corps compacts. Nous proposons ensuite un modèle original en dimension supérieure. Dans ce cadre théorique, les champs de matière se propagent dans des dimensions supplémentaires au même titre que la gravitation. A basse énergie, une théorie vecteur-tenseur pour l'interaction gravitationnelle est ainsi obtenue en quatre dimensions, où la charge vectorielle est définie par la quantité de mouvement des corps dans les dimensions supplémentaires. Enfin, et pour conclure, nous montrons que des contraintes nouvelles et importantes sur ces charges auxiliaires (scalaire et vectorielle) peuvent être envisagées à travers l'étude de la décroissance orbitale de systèmes binaires compacts.

Chapitre 1

Théories de la gravitation

La Relativité Générale est proposée par Einstein dès 1916. Elle généralise la théorie de la gravitation universelle de Newton dans un cadre relativiste cohérent, au sens de la Relativité Restreinte. La gravitation y est définie comme un phénomène purement géométrique, à travers l'identification du champ de gravitation à la métrique de l'espace-temps. L'ensemble des tests expérimentaux dans notre système solaire (et dans la Galaxie) en vérifient les prédictions en champ faible, avec une précision actuelle supérieure au dixième de pourcent. Toutefois, des considérations théoriques importantes nous mènent à penser que la théorie d'Einstein ne décrit pas complètement l'interaction gravitationnelle. Dans cette perspective, nous imaginons des théories alternatives. Les extensions minimales de la Relativité Générale définissent des champs de gravitation auxiliaires, couplés au champ métrique, dont la présence remet en question l'un des principes les plus fondamentaux de la gravitation depuis Newton : le Principe d'Equivalence.

Dans les deux premières sections de ce chapitre, nous étudions la Relativité Générale : ses fondements théoriques et le développement de l'approximation linéaire. Nous introduisons ensuite les théories de Brans-Dicke (section 1.3), définissant une gravitation scalaire-tenseur. La section 1.4 définit des effets relativistes importants en champ faible, en termes desquels nos théories de la gravitation sont soumises à l'expérience : déflexion de la lumière, précession du périhélie de Mercure, effet Shapiro. Les observations sont en accord parfait avec les prédictions de la théorie d'Einstein, mais ne permettent en rien d'exclure un couplage scalaire faible. Nous poursuivons avec une discussion du Principe d'Equivalence et de ses vérifications expérimentales (section 1.5). La dernière section introduit un formalisme théorique différent, définissant une approche complémentaire des phénomènes étudiés jusque-là dans le cadre géométrique introduit par Einstein.

1.1 Fondements de la gravitation

1916. Albert Einstein publie la synthèse finale de sa théorie de la Relativité Générale [Ein16]. Avant d'entrer dans des considérations théoriques et phénoménologiques précises, il nous semble important de situer brièvement la Relativité Générale dans son contexte historique et d'en étudier les principes fondateurs [Bal93] : le Principe de Relativité et le Principe d'Equivalence, vérifiés expérimentalement, et le Principe de Mach, d'une portée plus philosophique.

Principe de Relativité

Le Principe de Relativité remonte à Galilée [LL66a, Rad99], qui écrit en 1632 dans son *Dialogo* [Gal32] :

“Enfermez-vous avec un ami dans la plus grande cabine sous le pont d’un navire et prenez avec vous des mouches, des papillons et d’autres petites bêtes qui volent ; munissez-vous aussi d’un grand récipient rempli d’eau avec de petits poissons ; accrochez aussi un petit seau dont l’eau coule goutte à goutte dans un autre vase à petite ouverture placé en dessous. Quand le navire est immobile, observez soigneusement comme les petites bêtes qui volent vont à la même vitesse dans toutes les directions de la cabine, on voit les poissons nager indifféremment de tous les côtés, les gouttes qui tombent entrent toutes dans le vase placé dessous ; si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n’avez pas besoin de jeter plus fort dans une direction que dans une autre lorsque les distances sont égales ; si vous sautez à pieds joints, comme on dit, vous franchirez des espaces égaux dans toutes les directions. Quand vous aurez soigneusement observé cela, bien qu’il ne fasse aucun doute que les choses doivent se passer ainsi quand le navire est immobile, faites aller le navire à la vitesse que vous voulez pourvu que le mouvement soit uniforme, sans balancement dans un sens ou l’autre, vous ne remarquerez pas le moindre changement dans tous les effets qu’on vient d’indiquer ; aucun ne vous permettra de vous rendre compte si le navire est en marche ou immobile.”

Sous une forme déjà plus condensée, nous pouvons exprimer ce principe expérimental de la façon suivante :

“Si les lois de la physique sont exprimées sous leur forme la plus simple dans un référentiel de coordonnées R , alors ces mêmes lois sont également valables dans tout référentiel de coordonnées R' animé d’un mouvement de translation uniforme par rapport à R .”

Pour que les lois de la nature prennent leur forme la plus simple, il faut les exprimer dans un référentiel rigide et inertiel (dont l’existence est postulée *a priori*). Rigide, signifie que l’espace y est homogène et isotrope, inertiel, que la loi d’inertie est vérifiée. Celle-ci définit la notion de référentiel inertiel en postulant que tout corps libre de toute interaction se meut en mouvement rectiligne uniforme (ou reste au repos). De là, tous les référentiels en mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel inertiel sont eux-mêmes inertiels. Nous pouvons ainsi énoncer le Principe galiléen de Relativité sous sa forme la plus concise :

“Les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.”

Dans ce cadre conceptuel, en 1687, Newton énonce, dans les *Principia* [New87], les trois lois du mouvement des corps en référentiel inertiel : **la loi d’inertie** nous dit que dans un référentiel inertiel tout corps libre se meut dans un mouvement rectiligne uniforme. **La loi de la dynamique** définit l’accélération \vec{a} d’un corps, comme induite (en norme et en direction) par la présence d’une force \vec{F} exercée sur celui-ci, suivant la relation

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.1)$$

La masse inerte (inertielle) m du corps, est cette propriété qui définit la résistance du corps à toute force exercée sur lui. Et finalement, **la loi de l’action et de la réaction** postule que,

si un corps exerce sur un autre une force \vec{F} donnée, alors par réaction instantanée, cet autre corps exerce sur le premier une force de même intensité en sens opposé $-\vec{F}$.

Les transformations des coordonnées d'espace et de temps associées au passage d'un référentiel inertiel R à un autre référentiel inertiel R' définissent le groupe d'invariance de la théorie : le groupe de Galilée. Il est construit sur base du Principe de Relativité et de la loi classique d'addition des vitesses. L'espace étant isotrope et homogène, il contient les translations dans l'espace et dans le temps, ainsi que les rotations dans l'espace (définies par les matrices 3×3 orthogonales, de déterminant unité). Il faut y ajouter, outre l'inversion du temps et la parité, les transformations de Galilée proprement dites, pour un référentiel R' en translation uniforme à vitesse \vec{v} par rapport à R :

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t \\ t' &= t.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Relativité Restreinte

Dans le courant du dix-neuvième siècle, il apparaît clairement que les phénomènes de l'électrodynamique satisfont eux aussi au Principe de Relativité. Toutefois, les expériences de Michelson et Morley (1881 et 1887) montrent que la vitesse de la lumière dans le vide est constante, indépendamment du référentiel inertiel dans lequel elle est mesurée. Pour que l'électrodynamique satisfasse à ces contraintes expérimentales, Lorentz (1904) modifie les transformations de Galilée, introduisant une dilatation de la coordonnée longitudinale x et une transformation de la coordonnée temporelle t .

À l'origine, la théorie de la Relativité Restreinte d'Einstein (1905) était destinée à résoudre les problèmes de la théorie de l'électrodynamique, même si Einstein était déjà conscient du caractère universel de sa "nouvelle cinématique", établie indépendamment des théories pré-existantes. Il postule donc un **Principe de Relativité Restreinte**, identique au principe de Galilée. La relativité est "restreinte" dans le sens où l'invariance des lois de la physique n'est toujours définie que sous un mouvement de translation uniforme. Mais s'ajoute encore le postulat de **constance de la vitesse de la lumière dans le vide** ($c \equiv 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$).

Dans ce cadre, une métrique est définie dans l'espace-temps à quatre dimensions, la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, définissant l'élément de longueur infinitésimal comme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.\tag{1.3}$$

À la translation d'un référentiel R' par rapport à un référentiel inertiel R dans la direction x à vitesse v , sont associées les transformations suivantes, dites transformations de Lorentz :

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix},\tag{1.4}$$

où $\gamma \equiv 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$ et $\beta = v/c$. Le groupe d'invariance complet de la nouvelle théorie est le groupe de Poincaré, où les transformations de Lorentz se substituent aux transformations de Galilée. Les translations dans l'espace-temps et les rotations dans l'espace (ainsi que l'inversion du temps et la parité) sont données par les mêmes expressions, inchangées depuis Newton. Notons une différence conceptuelle importante par rapport aux théories classiques : le temps t

n'est plus une entité absolue, indépendante des coordonnées d'espace (x, y, z) . La théorie de la Relativité Restreinte postule l'équivalence formelle entre les coordonnées d'espace et de temps, mélangées les unes aux autres sous ces transformations de Lorentz. De ces modifications fondamentales découlent des phénomènes tels que dilatation du temps, contraction des longueurs, modification de la loi galiléenne d'addition des vitesses, perte de la notion de simultanéité... Autant de phénomènes vérifiés expérimentalement, en électrodynamique notamment.

Synthèse finale

Historiquement, deux principes importants suggèrent à Einstein la nécessité de l'extension du Principe de Relativité Restreinte vers une relativité générale [Ein16, Bal93]. Le premier est d'ordre épistémologique et connu sous le nom de Principe de Mach. Le second, d'ordre expérimental, est le Principe d'Equivalence.

Selon Mach (1883), et d'autres avant lui déjà, un principe de causalité doit prévaloir, postulant que les "causes" autant que les "effets" physiques ne peuvent être que des faits observables [Mac83]. Prenons pour illustration l'exemple d'un seau rempli partiellement d'eau. Si le seau est au repos dans un référentiel R , la surface de l'eau est plate. Alors que si le seau est mis en rotation, la surface de l'eau apparaît comme creusée au centre, l'eau remontant sur la paroi latérale. Détaillons dans un premier temps l'explication newtonienne de cet effet avant d'y opposer l'objection de Mach. Le référentiel R est inertiel alors que le référentiel R' du seau en rotation (référentiel accéléré) ne l'est pas, dans le cadre du Principe de Relativité Restreinte. La seconde loi de Newton en référentiel inertiel pour une force dérivant d'un potentiel $V(\vec{x})$ est donnée par l'expression suivante :

$$m\ddot{x}^i = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x^i}. \quad (1.5)$$

Sous une transformation générale des coordonnées, elle prend une forme plus complexe :

$$m\ddot{q}^i = -g^{ij}(q) \frac{\partial V(q)}{\partial q^j} - m\Gamma_{jk}^i(q) \dot{q}^j \dot{q}^k, \quad (1.6)$$

où $g^{ij}(q)$ définit le tenseur métrique en coordonnées curvilignes q^i , et $\Gamma_{jk}^i(q) \equiv (g^{il}/2)(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l})$ sont les symboles de Christoffel définis sur cette métrique. Par simple changement de coordonnées, apparaissent donc de nouvelles forces dans les équations du mouvement, appelées forces "fictives", ou forces "d'inertie" parce qu'elles ne sont présentes que pour la description de mouvements en référentiel non inertiel. Dans le référentiel tournant considéré R' , ces forces d'inertie s'identifient aux forces de Coriolis et centrifuges bien connues, responsables de la forme concave prise par la surface de l'eau dans le seau en rotation. La cause alléguée à la forme de la surface de l'eau est le mouvement relatif à un référentiel d'inertie. En d'autres termes, Newton invoque, dans le cadre du Principe restreint de Relativité, la présence d'un espace absolu, immuable et inobservable pour définir l'inertie. Pour satisfaire au principe de causalité qu'il défend, Mach rejette la notion d'espace absolu. **La relativité est générale. L'inertie n'a pas de sens dans un espace vide. Les propriétés physiques de l'espace trouvent leur origine dans la matière qu'il contient. Le seul mouvement qui ait un sens est le mouvement relatif à la distribution de matière extérieure au système considéré** [Bal93, BD61]. Autrement dit, l'inertie devrait être définie relativement aux "étoiles lointaines", c'est-à-dire à la distribution moyenne des masses dans l'univers, et les forces d'inertie doivent trouver leur origine dans une interaction physique des corps accélérés

avec ces “étoiles lointaines”. Diverses formulations mathématiques de ce principe existent (voir notamment [Pau58, Sci53]). La plus concise est probablement celle de Pauli [Pau58]. Selon lui,

“Le champ métrique $g_{\mu\nu}$ ¹ doit être déterminé de façon unique et généralement covariante seulement par les valeurs du tenseur énergie-impulsion ($T_{\mu\nu}$) représentant la matière. Dans un espace vide, le mouvement (à travers la métrique $g_{\mu\nu}$, qui définit la notion de mesure) n’est pas défini.”

$$T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Nos théories actuelles de la gravitation n’incluent pas ce principe de façon complète. Nous ne voulons pas discuter ici de la valeur fondamentale de cette hypothèse basée sur des considérations épistémologiques. Einstein lui-même, après l’avènement de sa Relativité Générale, finit par s’opposer à la nécessité d’introduire explicitement le Principe de Mach dans la théorie de la gravitation. Nous retenons cependant l’idée d’un mouvement défini par rapport à la distribution extérieure de matière, et cette nécessité qu’elle induit pour Mach (et Einstein en 1916) de développer une théorie où la relativité soit générale, et non restreinte à des mouvements de translation uniforme.

Outre ses trois lois de la mécanique, Newton propose une théorie de la gravitation universelle, qui donne un fondement théorique aux lois phénoménologiques de Kepler, et qui fournit une explication des phénomènes de gravitation étudiés pendant les deux siècles suivants. S’il est besoin de le rappeler, la loi de gravitation universelle s’énonce comme suit : soient deux corps de position relative $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, la force de gravitation exercée par le premier (m_2) sur le second (m_1) est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Son expression mathématique s’écrit

$$\vec{F}_{gr} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (1.8)$$

où $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ est le vecteur unité dans la direction relative des deux corps. G est la constante de gravitation universelle, dont la valeur expérimentale est

$$G \simeq 6.673(10) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (1.9)$$

où les chiffres entre parenthèses définissent l’incertitude sur les dernières décimales. Nous pouvons encore écrire cette loi, pour le mouvement d’un corps de masse m , comme

$$\vec{F}_{gr} = m\vec{g}, \quad (1.10)$$

où $\vec{g} \equiv GM(\hat{r}/r^2)$ est l’accélération définie par le champ de gravitation associé à la masse M . Mais au début du siècle passé, cette théorie n’est plus capable d’expliquer tous les phénomènes gravitationnels observés, en particulier la précession du périhélie de l’orbite de Mercure. De plus, d’un point de vue théorique, l’idée d’une interaction à distance instantanée est en opposition radicale avec les postulats de Relativité Restreinte récemment établie. Une nouvelle théorie de la gravitation doit donc être posée.

Venons-en maintenant à ce qu’Einstein qualifie en 1919 de “l’idée la plus heureuse de toute sa vie”, idée qui remonte à 1907 quand il essaie pour la première fois d’étendre la Relativité Restreinte pour y incorporer la gravitation. Dans son article fondateur de 1916, il écrit :

¹Nous nous tiendrons à la convention d’indices suivante : les indices latins “ ij ” réfèrent aux coordonnées spatiales uniquement ($1 \leq i, j \dots \leq 3$), alors que les indices grecs “ $\mu\nu$ ” courent sur les quatre coordonnées d’espace-temps ($0 \leq \mu, \nu \dots \leq 3$). La métrique ici définie est la métrique complète de l’espace-temps.

“...Oltre cet argument épistémologique de poids [le Principe de Mach], un fait physique bien connu plaide en faveur d’une extension de la théorie de la Relativité. Soit K un système de référence galiléen, c’est-à-dire tel que, relativement à lui (au moins dans le domaine quadridimensionnel considéré), une masse suffisamment éloignée d’autres masses soit animée d’un mouvement rectiligne et uniforme. Soit K' un second système de coordonnées, animé d’un mouvement de translation uniformément accéléré par rapport à K . Alors, relativement à K' , une masse suffisamment séparée des autres exécutera un mouvement accéléré tel que son accélération et la direction de son accélération soient indépendantes de sa composition matérielle et de son état physique.

Un observateur au repos relativement à K' peut-il en tirer la conséquence qu’il se trouve dans un système de référence “réellement” accéléré? A cette question on doit répondre par la négative; car le comportement, évoqué ci-dessus, des masses se déplaçant librement relativement à K' peut tout aussi bien être interprété de la façon suivante : le système de référence K' est non accéléré; mais dans le domaine spatio-temporel considéré règne un champ de gravitation, lequel engendre le mouvement accéléré des corps relativement à K' . Cette conception est rendue possible par le fait que l’expérience nous a appris qu’il existe un champ de force (à savoir le champ de gravitation) qui a la propriété remarquable de conférer la même accélération à tous les corps [Eötvös a démontré expérimentalement que le champ de gravitation possède cette propriété à une précision très grande]. Le comportement mécanique des corps relativement à K' est le même que celui que nous offre l’expérience vis-à-vis de systèmes que nous avons l’habitude de considérer comme “au repos” ou comme “légitimes”; c’est pourquoi il est naturel, également d’un point de vue physique, de supposer que les systèmes K et K' peuvent, avec autant de légitimité l’un que l’autre, être regardés comme “au repos”, ou encore que pour la physique des phénomènes ils sont tout aussi légitimes l’un que l’autre...”

Newton énonçait déjà ce Principe d’Equivalence par l’identification de la masse inerte (inertielle) d’un corps, cette propriété qui régule sa réponse aux forces appliquées sur lui ($\vec{F} = m_{in}\vec{a}$), et de la masse grave (gravitationnelle), propriété qui régule sa réponse à la gravitation ($\vec{F}_{gr} = m_{gr}\vec{g}$) :

$$m_{in} = m_{gr} . \quad (1.11)$$

Il s’énonce encore comme suit [Wil93a] :

“Tous les corps tombent dans un champ gravitationnel avec la même accélération, indépendamment de leur masse et de leur structure interne.”

Nous concluons comme Einstein en 1916 :

“... On voit par ces considérations que le développement de la théorie de la Relativité Générale doit, dans le même temps, conduire à une théorie de la gravitation; on peut en effet “engendrer” un champ de gravitation par simple changement du système de coordonnées.”

Remarquons que ce Principe d’Equivalence est local car les champs de gravitation sont non uniformes. A ce stade, toutes les bases sont jetées pour l’établissement d’une nouvelle théorie de la gravitation. Au-delà de ces considérations historiques, nous définissons la théorie telle

qu'elle est présentée aujourd'hui [Wei72, MTW73, Dir75, Pau58]. Nous considérons en détail la théorie linéarisée.

1.2 Relativité Générale

Comme nous venons de le voir, Einstein introduit les forces de gravitation comme des forces d'inertie. Il apparaît donc clairement (voir (1.6)) que la gravitation est intimement liée à la géométrie de l'espace-temps, et que le champ gravitationnel doit être défini par la métrique qui le sous-tend. Les théories de la gravitation que nous étudions, et en particulier la Relativité Générale, appartiennent à la classe particulière des théories métriques, définie par les postulats suivants. D'une part, l'espace-temps est muni d'une métrique et les lignes d'univers des corps-tests sont les géodésiques de cette métrique; d'autre part, localement, dans un repère en chute libre, les lois non gravitationnelles de la physique sont celles de la Relativité Restreinte. Par corps-test, nous comprenons un corps neutre pour les interactions électromagnétique, faible et forte, dont l'énergie gravitationnelle interne (telle qu'elle est estimée dans le cadre de la théorie de Newton) est négligeable et de taille suffisamment petite pour que son couplage aux inhomogénéités du champ de gravitation puisse être ignoré. Une expérience locale non gravitationnelle est une expérience réalisée dans un laboratoire en chute libre suffisamment petit pour que les inhomogénéités du champ externe puissent être ignorées à travers son volume, et dans laquelle les effets gravitationnels internes au système considéré sont négligeables. Aussi, remarquons déjà que toute théorie métrique de la gravitation respecte le Principe d'Equivalence tel que nous l'avons défini précédemment, pour le mouvement de corps-tests. C'est ce qu'on appelle plus précisément le Principe d'Equivalence Faible. Les dernières sections de ce chapitre étant entièrement consacrées à la discussion de ce principe fondamental, nous nous contentons, pour l'heure, de cette première définition.

Théorie complète

Dans le respect du Principe de Relativité Générale, la théorie doit être invariante sous transformation générale des coordonnées. La théorie de la Relativité Générale est donnée par l'action d'Einstein-Hilbert :

$$S^{(rg)} = -\frac{1}{2c\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}(\Psi, g_{\mu\nu}) . \quad (1.12)$$

Le scalaire R définit le lagrangien gravitationnel le plus simple qui soit fonction de la métrique de l'espace-temps² $g_{\mu\nu}$, et qui soit invariant sous transformation générale des coordonnées. Il représente la courbure locale de l'espace-temps. Le facteur $d^4x \sqrt{-g}$ est l'élément de volume invariant en quatre dimensions. \mathcal{L}_{mat} représente la densité lagrangienne pour les champs de matière Ψ .

La nature purement tensorielle de l'interaction gravitationnelle (\mathcal{L}_{mat} dépend uniquement des champs de matière et de la métrique) implique automatiquement les équations de conser-

²Dans l'hypothèse d'une théorie métrique, la valeur asymptotique de la métrique de l'espace-temps en l'absence de gravitation est donnée par la structure de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. De manière générale, la métrique $g_{\mu\nu}$ est donc *non définie*, ou *pseudo-riemannienne*. Le scalaire de courbure résulte des définitions suivantes : $R^\alpha_{\mu\nu\beta} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\beta} \Gamma^\alpha_{\rho\nu}$ définit le tenseur de Riemann mixte à partir des symboles de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = (g^{\alpha\rho}/2)(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})$, $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha}$ donne le tenseur de Ricci, et finalement, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, le scalaire de courbure.

vation pour le tenseur énergie-moment associé aux champs de matière :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (1.13)$$

où le symbole ${}_{;\nu}$ définit la dérivée covariante d'un champ dans la direction x^ν , par opposition à la dérivée simple donnée par ${}_{,\nu}$. Le tenseur $T^{\mu\nu}$ est défini de manière générale par la relation suivante, pour toute variation $\delta g_{\mu\nu}$ de la métrique :

$$\delta S_{mat} \equiv -\frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

Pour un système de particules-tests, libres de toute autre interaction que la gravitation, l'action pour le mouvement géodésique s'écrit

$$S_{mat} = -c \sum_a m_a \int ds_a, \quad (1.15)$$

où $ds = cd\tau = (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$ est l'élément de longueur infinitésimal en quatre dimensions. Le tenseur énergie-moment correspondant s'écrit

$$T_{p.l.}^{\mu\nu} = \sum_a \bar{\rho}_a(x) u_a^\mu u_a^\nu, \quad (1.16)$$

où

$$\bar{\rho}_a(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{g_a}} \frac{d\tau_a}{dt} \rho_a(x) \quad (1.17)$$

est le champ scalaire associé à la densité de matière $\rho(x) = m\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$ et $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, le quadrivecteur vitesse de la particule considérée. Il est dès lors aisé de montrer que les équations (1.13) sont effectivement des équations de conservation. D'une part, elles impliquent la conservation exacte de la masse

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} (\rho v^\nu)_{,\nu} = 0, \quad (1.18)$$

où $v^\mu = dx^\mu/dt$. D'autre part, dans la limite non relativiste ($c \rightarrow \infty$, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et $d\tau = dt$), il en résulte aussi des équations de conservation de l'énergie (de masse) et de la quantité de mouvement totale du système considéré :

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (1.19)$$

pour $T^{\mu\nu} = \rho(x) v^\mu v^\nu$.

Les équations déduites de la variation de l'action (1.12) par rapport à la métrique donnent les équations d'Einstein pour le champ de gravitation :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

où $\kappa = 8\pi G/c^4$ donne le couplage du champ de gravitation à la matière. Les équations des géodésiques découlent immédiatement de la variation de l'action (1.15). Elles peuvent encore s'obtenir par simple manipulation des équations de conservation (1.13) :

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0. \quad (1.21)$$

Théorie linéarisée

Les expériences gravitationnelles réalisées à ce jour, dans le système solaire et au-delà, n'ont encore pu tester les théories de la gravitation que dans un régime de champ gravitationnel relativement faible. Nous étudions ici les structures statique et dynamique des champs de gravitation dans la théorie linéarisée.

Nous développons donc la métrique en champ faible autour de la solution asymptotique de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

avec $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. La linéarisation des équations de champs (1.20) s'écrit

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu)} = -2\kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

pour le champ conjugué $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Le symbole “ $_{(\mu\nu)}$ ” définit la symétrisation sur les indices considérés. La théorie étant invariante sous transformation générale des coordonnées, une certaine liberté de jauge existe, correspondant au choix du système de coordonnées. Pour une transformation infinitésimale des coordonnées

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x), \quad (1.24)$$

la perturbation de la métrique se transforme comme

$$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \varepsilon_{(\mu,\nu)}(x). \quad (1.25)$$

Les contraintes de “jauge harmonique”,

$$\partial^{\mu} \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.26)$$

réduisent les équations de champs (1.23) à leur forme la plus simple et la plus explicite

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

Notons que dans cette approximation, le tenseur énergie-moment pour les champs de matière est calculé sur l'espace de Minkowski :

$$T^{\mu\nu} = \rho(x) v^{\mu} v^{\nu}. \quad (1.28)$$

Solutions statiques

Dans la limite statique, ces équations donnent la structure de l'espace-temps au voisinage d'une source $T_{\mu\nu}$. Considérons une source ponctuelle de masse M non relativiste. La composante d'énergie domine largement les autres termes du tenseur énergie-moment ($T_{00} = \rho c^2$). Les perturbations du champ métrique sont dès lors données à l'ordre $\mathcal{O}(1/c^2)$ par

$$h_{00}(\vec{x}) = -\frac{2GM}{rc^2} \quad (1.29)$$

$$h_{ij}(\vec{x}) = -\frac{2GM}{rc^2} \delta_{ij} \quad (1.30)$$

$$h_{0i}(\vec{x}) = 0, \quad (1.31)$$

où $r = |\vec{x}|$ est la distance à la source. A partir de ces solutions, le mouvement des corps dans un champ de gravitation peut être défini. La limite non relativiste reproduit de manière cohérente la théorie de Newton. Les équations des géodésiques se réduisent en effet dans cette limite aux équations

$$a^i = -\frac{c^2}{2}h_{00,i}, \quad (1.32)$$

qui, en vertu des solutions obtenues pour la métrique, donnent les équations de Newton dans le potentiel $V(r) = -GM/r$. Dans la section 1.4, nous utilisons le développement des champs ci-dessus dans l'étude d'effets de gravitation relativistes (c'est-à-dire au-delà de cette limite newtonienne).

Structure dynamique

Toute interaction relativiste est réalisée en termes de la propagation d'ondes. Au-delà de l'approximation newtonienne, la Relativité Générale doit donc prédire l'existence d'ondes de gravitation. Déjà dans la théorie linéarisée, les équations (1.27) sont en effet des équations d'ondes, dont les sources sont les champs de matière. Dans la théorie complète, des contributions non linéaires dans le champ de gravitation doivent être prises en compte. Nous considérons cette problématique en détail au chapitre suivant. Nous étudions ici la propagation et la structure des ondes de gravitation à partir des équations dans le vide. Sous les contraintes de jauge harmonique (1.26), la propagation est donc définie par les équations

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0). \quad (1.33)$$

Les solutions correspondantes pour les dix composantes du tenseur symétrique sont de la forme

$$\bar{h}_{\mu\nu} \sim \bar{\varepsilon}_{\mu\nu}(k) e^{i(k_\alpha x^\alpha)}, \quad (1.34)$$

avec $k^2 = k_\alpha k^\alpha = 0$. Cette dernière contrainte caractérise des ondes gravitationnelles se propageant à la vitesse de la lumière et sans dispersion. La structure de ces ondes est définie par leurs états de polarisation $\bar{\varepsilon}_{\mu\nu}$ physiques et leur hélicité.

Le choix explicite d'un système de coordonnées (choix de jauge) permet l'élimination des polarisations non physiques (polarisations de jauge). Les quatre contraintes de jauge harmonique laissent une liberté résiduelle de jauge, définie par la contrainte

$$\square \varepsilon_\mu(x) = 0. \quad (1.35)$$

Les transformations de coordonnées admises dans cette jauge sont ainsi données par des perturbations infinitésimales de la forme

$$\varepsilon_\mu(x) = i\varepsilon_\mu(k) e^{i(k_\alpha x^\alpha)}, \quad (1.36)$$

avec $k^2 = k_\alpha k^\alpha = 0$. Sous les transformations (1.25), les polarisations se transforment comme

$$\bar{\varepsilon}'_{\mu\nu}(k) = \bar{\varepsilon}_{\mu\nu}(k) + k_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} - \eta_{\mu\nu} k_\alpha \varepsilon^\alpha. \quad (1.37)$$

Aux quatre contraintes initiales sur $h_{\mu\nu}$ peuvent donc être ajoutées quatre autres contraintes correspondant à un choix explicite des paramètres de jauge $\varepsilon_\mu(k)$. Choisisant adéquatement ces conditions,

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} &= 0 \\ h_{0\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

nous obtenons finalement deux ($= 10 - 4 - 4$) polarisations physiques, transverses et sans trace. Les huit conditions (1.38) peuvent en effet se réécrire en termes des $\varepsilon_{\mu\nu}$ comme

$$\begin{aligned} k^j \varepsilon_{ij} &= 0 \quad (\textit{transverses}) \\ \varepsilon^i_i &= 0 \quad (\textit{trace nulle}) \\ \varepsilon_{0\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Nous pouvons toutefois nous poser la question de savoir si le caractère transverse et de trace nulle de l'onde est un effet lié au choix de jauge même. Mais le système de référence tel qu'il est défini par ces conditions de jauge identifie un référentiel comobile, c'est-à-dire un repère dans lequel les coordonnées identifiant la position d'un corps initialement au repos restent inchangées par le passage d'une onde gravitationnelle. En effet, au premier ordre, les équations des géodésiques donnent

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = h^i_{0,0} - h_{00}{}^{,i}, \quad (1.40)$$

dont le membre de droite s'annule identiquement sous les conditions (1.39). Par conséquent, dans le système de référence considéré, l'effet physique de l'onde sur l'élément de distance invariant en trois dimensions

$$d\sigma^2 = (\delta_{ij} - h_{ij}(x)) dx^i dx^j, \quad (1.41)$$

est identifié par les caractéristiques (transversalité et trace nulle) des perturbations dynamiques h_{ij} elles-mêmes. Pour une onde se propageant dans la direction oz , les perturbations physiques s'écrivent

$$h_{\mu\nu}(z-ct) = h_+(z-ct) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + h_\times(z-ct) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

identifiant ainsi deux polarisations indépendantes, $+$ et \times respectivement. Pour chacune de ces polarisations, l'expression de l'élément de distance invariant est donnée comme

$$d\sigma_+^2 = (1 - h_+(z-ct)) dx^2 + (1 + h_+(z-ct)) dy^2 + dz^2 \quad (1.43)$$

$$d\sigma_\times^2 = dx^2 + dy^2 - 2h_\times(z-ct) dx dy + dz^2. \quad (1.44)$$

Les perturbations associées définissent des oscillations quadrupolaires dans le plan oxy , à une fréquence ω égale à celle de l'onde elle-même. Les effets des polarisations $+$ et \times se correspondent à un déphasage près de 45° (FIG. 1.1) :

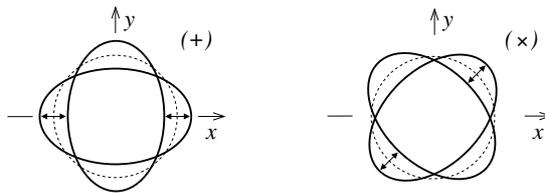


FIG. 1.1 – Polarisation linéaires $+$ et \times des ondes gravitationnelles (Relativité Générale).

Identifions l'hélicité de ces ondes. Considérant toujours une onde se propageant dans la direction oz , nous pouvons redéfinir la base de ces états de polarisation $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12})$ en termes de polarisations circulaires, gauche et droite respectivement :

$$\varepsilon_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{11} - i\varepsilon_{12}) \quad (1.45)$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{11} + i\varepsilon_{12}) . \quad (1.46)$$

Ces polarisations définissent une base d'états propres sous rotation dans le plan xy : $\varepsilon'_L = e^{-2i\theta}\varepsilon_L$ et $\varepsilon'_R = e^{+2i\theta}\varepsilon_R$ pour une rotation d'angle θ . Les valeurs propres correspondantes identifient l'hélicité des ondes gravitationnelles : $h = \pm 2$. L'impact d'une onde de polarisation circulaire de fréquence ω sur une boucle de particules-tests induit un aplatissement quadrupolaire, combiné avec une rotation de la boucle à une fréquence $\omega/2$, moitié de celle de l'onde. Ce rapport des fréquences définit physiquement l'hélicité des ondes : deux rotations de phases correspondent à une rotation physique. La rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre pour une polarisation circulaire gauche, inversement pour une polarisation droite (FIG. 1.2) :

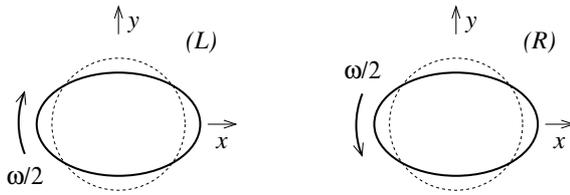


FIG. 1.2 – Polarisation circulaire gauche (*L*) et droite (*R*) des ondes gravitationnelles (*Relativité Générale*).

Dans la section suivante, nous prenons en considération une classe particulière de théories alternatives à la Relativité Générale. Le développement correspondant de la théorie linéarisée montre dans quelle mesure la structure de l'interaction développée dans cette section est particulière à la théorie d'Einstein elle-même.

1.3 Théories scalaire-tenseur

Nous abordons ici l'analyse des théories de Brans-Dicke. Il s'agit en fait d'une classe de théories métriques de gravitation qui se distinguent fondamentalement de la Relativité Générale par l'introduction d'un champ scalaire de gravitation couplé à la métrique de l'espace-temps. Historiquement, ces théories ont été introduites comme une tentative supplémentaire d'inclure le principe de Mach dans notre théorie de la gravitation, ce à quoi la théorie d'Einstein n'était pas parvenue³. Au-delà de ces considérations historiques, à l'heure actuelle, toutes les théories quantiques relativistes proposant l'unification des interactions fondamentales, gravitation incluse, définissent un secteur gravitationnel comprenant toujours des champs de gravitation auxiliaires, scalaires ou vectoriels. Aussi, même si ces théories de Brans-Dicke ne sont qu'une extension minimale de la théorie d'Einstein, l'étude des effets qu'elles prédisent au-delà de la Relativité Générale relève d'un intérêt certain.

³En effet, même si les équations de la Relativité Générale (1.20) définissent la matière ($T_{\mu\nu}$) comme source unique de gravitation ($g_{\mu\nu}$), nous pouvons exhiber certaines solutions (par exemple, la solution de Minkowski, ou l'univers vide de de Sitter en présence d'une constante cosmologique) en contradiction flagrante avec ce principe tel qu'il est formulé par Pauli (voir (1.7)).

Théorie complète

Les théories de Brans-Dicke sont définies [BD61, Dic65, Wil93a] par l'action

$$S^{(bd)} = -\frac{c^3}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \Phi^{,\alpha} \Phi_{,\alpha} \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}(\Psi, g_{\mu\nu}), \quad (1.47)$$

où Φ est un champ scalaire et ω un paramètre libre sans dimension. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le caractère purement tensoriel de la densité lagrangienne de matière implique les équations de conservation (1.13) et de là le mouvement géodésique (1.21) des corps dans l'espace-temps.

Les équations de champs pour la métrique et le champ scalaire s'écrivent respectivement,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{c^4} \frac{1}{\Phi} T_{\mu\nu} + \omega \frac{1}{\Phi^2} \left(\Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} \right) + \frac{1}{\Phi} (\Phi_{;\mu\nu} - \Phi_{;\alpha}^{\alpha} g_{\mu\nu}) \quad (1.48)$$

$$\Phi_{;\alpha}^{\alpha} = \frac{8\pi}{c^4} \frac{1}{2\omega + 3} T. \quad (1.49)$$

Remarquons que, contrairement à l'impression que nous pouvons avoir au niveau de l'action, la limite $\omega \rightarrow \infty$ correspond à l'annulation du couplage scalaire, et la théorie s'identifie à la Relativité Générale à travers les équations (1.48). La classe de théories considérée admet donc la théorie d'Einstein comme limite dans l'espace du paramètre ω .

Théorie linéarisée

Dans la limite de champ faible, nous développons la métrique autour de la solution de Minkowski habituelle, et le champ scalaire autour d'une valeur asymptotique locale Φ_b :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ \Phi &= \Phi_b (1 + \varphi), \end{aligned} \quad (1.50)$$

avec $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ et $|\varphi| \ll 1$. Les équations (1.48) et (1.49) linéarisées restent des équations couplées pour les perturbations scalaire φ et métriques $h_{\mu\nu}$:

$$-\frac{1}{2} \left(\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\nu)} \right) - (\partial_\mu \partial_\nu \varphi - \eta_{\mu\nu} \square \varphi) = \frac{8\pi}{\Phi_b c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.51)$$

$$\square \varphi = \frac{8\pi}{\Phi_b c^4} \frac{1}{2\omega + 3} T. \quad (1.52)$$

Une simple redéfinition des perturbations tensorielles,

$$\theta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \varphi, \quad (1.53)$$

permet d'écrire des équations découplées pour φ et $\theta_{\mu\nu}$:

$$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\theta}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^{\lambda} \bar{\theta}_{\lambda\nu)} = -2 \frac{8\pi}{\Phi_b c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.54)$$

$$\square \varphi = \frac{8\pi}{\Phi_b c^4} \alpha^2 T, \quad (1.55)$$

pour le champ conjugué $\bar{\theta}_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \theta$. Les équations de champs sont donc les équations de la Relativité Générale pour $\theta_{\mu\nu}$, auxquelles se superpose une équation découplée, pour

un champ scalaire de gravitation. Ce scalaire est couplé aux champs de matière par la trace du tenseur énergie-moment. L'intensité du couplage est donnée, relativement au couplage tensoriel, par

$$\alpha^2 = \frac{1}{2\omega + 3}. \quad (1.56)$$

La liberté de jauge induite pour les perturbations $h_{\mu\nu}$ par les transformations générales de coordonnées dans l'espace-temps est encore donnée par les équations (1.25). Par définition, sous changement de coordonnées, le champ scalaire satisfait à la relation

$$\varphi'(x') = \varphi(x). \quad (1.57)$$

Pour une transformation infinitésimale (voir (1.24)), la perturbation scalaire est invariante en première approximation : $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Aussi, les perturbations $\theta_{\mu\nu}$ se transforment au premier ordre comme $h_{\mu\nu}$. Choissant à nouveau un système de coordonnées harmoniques,

$$\partial^\mu \bar{\theta}_{\mu\nu} = 0, \quad (1.58)$$

les équations de champs deviennent

$$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} = -2\kappa' T_{\mu\nu} \quad (1.59)$$

$$\square \varphi = \kappa' \alpha^2 T, \quad (1.60)$$

pour $\kappa' = 8\pi/\Phi_b c^4$. Les couplages tensoriel et scalaire à la matière sont respectivement donnés par κ' et $\alpha^2 \kappa'$.

Solutions statiques

Le développement des solutions statiques de la théorie linéarisée nous permet dans un premier temps de définir l'origine de la constante de Newton. Nous considérons à nouveau une source ponctuelle non relativiste de masse M . Les composantes scalaire et tensorielles s'écrivent, au premier ordre en $\mathcal{O}(1/c^2)$,

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{2\omega + 3} \frac{2M}{\Phi_b r c^2}, \quad (1.61)$$

et (à travers $\theta_{\mu\nu}$)

$$h_{00}(\vec{x}) = -2 \left(\frac{1}{\Phi_b} \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right) \frac{M}{r c^2} \quad (1.62)$$

$$h_{ij}(\vec{x}) = -2 \left(\frac{1}{\Phi_b} \frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) \frac{M}{r c^2} \delta_{ij} \quad (1.63)$$

$$h_{0i}(\vec{x}) = 0. \quad (1.64)$$

Aussi, la limite non relativiste du mouvement géodésique (voir (1.32)) est newtonienne. La constante de couplage correspondante $G(x)$ est donnée en fonction de la valeur asymptotique locale du champ scalaire Φ_b par

$$G(x) = \frac{1}{\Phi_b(x)} \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \quad (1.65)$$

$$= \frac{1}{\Phi_b(x)} (1 + \alpha^2). \quad (1.66)$$

Le couplage newtonien est donc naturellement défini comme la somme des couplages scalaire et tensoriel. Il dépend *a priori* de la distribution locale des masses au voisinage du point considéré, dont $\Phi_b(x)$ est tributaire. Nous associons à la valeur expérimentale de la constante de Newton (G), le couplage induit par le champ scalaire constant Φ_0 donné par la distribution globale de matière dans l'univers⁴ en l'absence de singularité locale :

$$G = \frac{1}{\Phi_0} \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \quad (1.67)$$

$$= G' (1 + \alpha^2), \quad (1.68)$$

où $G' = 1/\Phi_0$.

Les expressions (1.62) à (1.64) se réécrivent en fonction de la constante de Newton comme

$$h_{00}(\vec{x}) = -2 \frac{GM}{rc^2} \quad (1.69)$$

$$h_{ij}(\vec{x}) = -2 \left(\frac{\omega + 1}{\omega + 2} \right) \frac{GM}{rc^2} \delta_{ij} \quad (1.70)$$

$$h_{0i}(\vec{x}) = 0. \quad (1.71)$$

Notons que, si α^2 (voir (1.56)) donne effectivement l'intensité relative du couplage scalaire au couplage tensoriel, le rapport entre l'intensité du couplage scalaire et l'interaction newtonienne totale est donné par la constante ξ , définie par la relation $\alpha^2 \kappa' = \frac{1}{2} \xi \kappa$:

$$\xi = \frac{2\alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (1.72)$$

$$= \frac{1}{\omega + 2}. \quad (1.73)$$

C'est en fonction de ce paramètre ξ que les perturbations scalaires s'expriment naturellement. Notamment, la solution (1.61) s'écrit encore

$$\varphi(\vec{x}) = \xi \frac{GM}{rc^2}. \quad (1.74)$$

Structure dynamique

Dans le cadre des théories de Brans-Dicke, les ondes gravitationnelles se propagent toujours à la vitesse de la lumière et sans dispersion dans le vide. Les équations de champs linéarisées correspondantes dans la jauge harmonique donnent en effet

$$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} = 0 \quad (\partial^\mu \bar{\theta}_{\mu\nu} = 0) \quad (1.75)$$

$$\square \varphi = 0. \quad (1.76)$$

Les champs $\theta_{\mu\nu}$ satisfont donc aux mêmes équations et bénéficient de la même invariance de jauge que les perturbations de la métrique $h_{\mu\nu}$ en Relativité Générale. Par conséquent, les mêmes conditions de jauge permettent l'identification de deux polarisations transverses et sans trace [Wia99] :

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{\theta}_{\mu\nu} &= 0 \\ \theta_{0\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

⁴Cette distribution est homogène et isotrope dans l'hypothèse du Principe Cosmologique.

A cette structure tensorielle quadrupolaire se superpose une polarisation scalaire, donnée par φ . Contrairement au cas de la Relativité Générale, la définition d'un système de coordonnées comobiles ($h_{\mu 0} = 0$) correspond au choix de conditions de jauge différentes, données par les relations

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{\theta}_{\mu\nu} &= 0 \\ \bar{\theta}_{\mu 0} &= 0 \\ \bar{\theta}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} \quad (\Leftrightarrow \bar{\theta} = -2\varphi) . \end{aligned} \quad (1.78)$$

Les deux premiers groupes de contraintes ne définissent en fait que sept conditions de jauge indépendantes, correspondant aux relations (1.77) sans la contrainte de trace nulle. L'identification des perturbations $\bar{\theta}_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$ revient à définir la trace des perturbations tensorielles en fonction de la composante scalaire. Considérons la propagation d'une onde dans la direction oz . Au niveau de la métrique, la polarisation scalaire d'hélicité nulle se superpose aux perturbations quadrupolaires tensorielles d'hélicité 2 (voir (1.42)), et prend la forme suivante [Bia98] :

$$h_{\mu\nu}(z - ct) = h_{sc.}(z - ct) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (1.79)$$

Dans ce référentiel comobile, l'élément de distance invariant associé en trois dimensions s'écrit simplement

$$d\sigma_{sc.}^2 = (1 - h_{sc.}(z - ct)) dx^2 + (1 - h_{sc.}(z - ct)) dy^2 + dz^2 . \quad (1.80)$$

La perturbation correspondante sur une boucle de particules-tests définit donc une pulsation purement radiale dans le plan oxy (FIG. 1.3) :

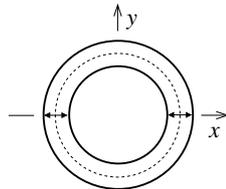


FIG. 1.3 – Polarisation scalaire des ondes gravitationnelles (Brans-Dicke).

En conclusion, dans leur approximation linéaire, les théories de Brans-Dicke superposent simplement un couplage gravitationnel scalaire au couplage tensoriel de la Relativité Générale. Nous avons analysé ce fait aussi bien au niveau du potentiel newtonien pour l'interaction statique que dans la structure des ondes gravitationnelles. La section suivante aborde l'étude des effets relativistes en termes desquels ces théories de la gravitation sont soumises à l'expérience. L'analyse des phénomènes tels que la déflexion de la lumière au voisinage du Soleil, l'effet Shapiro et la précession du périhélie de Mercure définissent des tests importants de nos théories de la gravitation en champ faible.

1.4 Tests classiques

Dans cette section, nous étudions l'état actuel de la confrontation de nos théories de la gravitation à l'expérience (voir [Dam00, Wil01] pour une étude exhaustive). L'approximation

de champ faible et de mouvement lent est suffisamment précise pour définir les tests gravitationnels actuels et futurs dans le système solaire. Dans cette limite, dite post-newtonienne, la comparaison entre différentes théories métriques de la gravitation, entre elles et avec l'expérience, est assez simple.

Paramétrisation d'Eddington-Robertson

Nous empruntons une paramétrisation de la métrique de l'espace-temps due à Eddington et Robertson, définissant un développement en fonction du potentiel de Newton ($V(r)/c^2 = -GM/rc^2$) induit par toute source de gravitation. Le mouvement des corps dans un champ de gravitation est défini par les équations des géodésiques. Un développement post-newtonien cohérent demande la détermination de g_{00} à l'ordre $\mathcal{O}(V/c^2)^2$, g_{ij} à l'ordre $\mathcal{O}(V/c^2)$ et g_{i0} à l'ordre $\mathcal{O}(V/c^2)^{3/2}$. En ces termes, la paramétrisation d'Eddington-Robertson [Wei72] est donnée comme

$$ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - B(r) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.81)$$

avec

$$A(r) = 1 + 2\alpha_{ppn} \left(\frac{V(r)}{c^2} \right) + 2\beta_{ppn} \left(\frac{V(r)}{c^2} \right)^2 \quad (1.82)$$

$$B(r) = 1 - 2\gamma_{ppn} \left(\frac{V(r)}{c^2} \right), \quad (1.83)$$

où les valeurs de α_{ppn} , β_{ppn} et γ_{ppn} sont définies par la théorie. Ces paramètres définissent des perturbations de la géométrie du temps et de l'espace respectivement.

La valeur du paramètre α_{ppn} est liée au respect du Principe d'Equivalence. Dans le cadre d'une théorie métrique, les équations du mouvement (1.32) dans la limite non relativiste s'écrivent

$$a^i = -\alpha_{ppn} \frac{\partial V(r)}{\partial x^i}. \quad (1.84)$$

Par extension, nous admettons cette équation comme définition du mouvement non relativiste : α_{ppn} est le rapport entre les masses gravitationnelle et inertielle du corps considéré. Aussi, le Principe d'Equivalence, demandant l'égalité entre la masse inertielle d'un corps et sa masse gravitationnelle (voir (1.11)), peut être identifié par la contrainte⁵

$$\alpha_{ppn}^{(EP)} = 1. \quad (1.85)$$

Les paramètres β_{ppn} et γ_{ppn} définissent les corrections relativistes du premier ordre au mouvement des corps (développement post-newtonien d'ordre 1 (1PN)). Notre analyse des théories linéarisées nous donne les valeurs des paramètres α_{ppn} et γ_{ppn} pour la Relativité Générale et les théories de Brans-Dicke (à partir des solutions (1.29) à (1.31) et (1.69) à

⁵En fait, pour Newton (voir (1.8)), la propriété qui régule la réponse d'un corps à la gravitation est appelée masse gravitationnelle *passive* m_{gr}^P , alors que la masse m_{gr}^A qui définit le potentiel source $V(r) = -Gm_{gr}^A/r$, est dite masse gravitationnelle *active*. Une différence de la première à la masse inertielle est une violation claire du Principe d'Equivalence. La seconde pourrait aussi *a priori* être différente de la masse inertielle m_{in} du corps source... Dans le cadre de la paramétrisation d'Eddington-Robertson, ceci définirait un paramètre α_{ppn} dont la différence à l'unité ne serait que fonction du corps source, sans remise en cause du Principe d'Equivalence. Mais le principe de l'action et de la réaction demande en fait que les masses gravitationnelles passive et active soient égales ($m_{gr} \equiv m_{gr}^P = m_{gr}^A$). Ainsi, le Principe d'Equivalence impose que le paramètre α_{ppn} soit universel (indépendant des corps considérés), ce qui revient à demander qu'il soit égal à l'unité.

(1.71), respectivement)⁶. Le développement de la solution de Schwarzschild (solution exacte à symétrie sphérique) en Relativité Générale et de la solution correspondante dans les théories scalaire-tenseur permet d'obtenir les paramètres post-newtoniens à tous les ordres, notamment β_{ppn} . Dans la limite où les énergies de liaison gravitationnelles internes sont négligeables, nous avons

$$\alpha_{ppn}^{(rg)} = 1 \quad \alpha_{ppn}^{(bd)} = 1 \quad (1.86)$$

$$\gamma_{ppn}^{(rg)} = 1 \quad \gamma_{ppn}^{(bd)} = \frac{\omega + 1}{\omega + 2} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (1.87)$$

$$\beta_{ppn}^{(rg)} = 1 \quad \beta_{ppn}^{(bd)} = 1. \quad (1.88)$$

Phénomènes relativistes et contraintes expérimentales

Trois tests fondamentaux ont permis l'établissement de contraintes expérimentales sur les paramètres β_{ppn} et γ_{ppn} ⁷. Les mesures de déflexion de la lumière au voisinage du Soleil et de l'effet Shapiro ont permis de contraindre la valeur de γ_{ppn} . L'analyse de la précession du périhélie de l'orbite de Mercure donne une limite sur β_{ppn} .

Dans le cadre des théories métriques de la gravitation, un rayon lumineux passant à une distance d d'une source M est défléchi (indépendamment de sa fréquence) suivant un angle (en radians)

$$\delta\theta = \left(\frac{\alpha_{ppn} + \gamma_{ppn}}{2} \right) \frac{4GM}{dc^2}. \quad (1.89)$$

Nous considérons la déflexion de la lumière au voisinage du Soleil. La masse $M_\odot \simeq 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ correspond à un rayon de Schwarzschild de l'ordre de $2GM_\odot/c^2 \simeq 2.95 \text{ km}$. Le résultat d'une dérivation "classique" utilisant uniquement le Principe d'Equivalence dans un espace plat ne fournit que le coefficient $\alpha_{ppn}/2 = 1/2$. La courbure de l'espace au voisinage du Soleil, induit une déflexion supplémentaire, définie par $\gamma_{ppn}/2$ et fonction de la théorie métrique considérée. La déflexion d'un rayon lumineux en incidence rasante ($d = r_\odot \simeq 6.96 \times 10^8 \text{ m}$) par rapport au Soleil est par conséquent donnée comme

$$\delta\theta_{max} \simeq 1.75 \frac{1 + \gamma_{ppn}}{2} \text{ arcsec}. \quad (1.90)$$

Eddington a vérifié la prédiction de la Relativité Générale par l'observation de la déflexion de la lumière optique d'étoiles durant une éclipse solaire. Ces premières expériences étaient cependant entachées d'imprécisions importantes. Le développement du *VLBI* (*Very-Long-Baseline radio Interferometry*) permet aujourd'hui des mesures beaucoup plus précises. Ces techniques d'interférométrie résolvent des séparations angulaires aussi petites que 100 microarcsecondes. L'analyse la plus récente de la déflexion de la lumière émise par des quasars (*quasi stellar radio sources*) passant à proximité du Soleil donne $(1 + \gamma_{ppn})/2 = (0.99992 \pm 0.00014)$ [Eub99]. La

⁶Un formalisme plus général développé par Will et Nordtvedt [Wil93a], introduisant d'autres potentiels métriques, et tenant compte notamment des vitesses et de la structure des sources, permet de paramétrer un ensemble beaucoup plus large de théories métriques. Ce formalisme *PPN* (*Parametrized-Post-Newtonian*) comprend 10 paramètres ($\beta, \gamma, \xi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$) au premier ordre post-newtonien. Néanmoins, les seuls paramètres non nuls dans le cadre restreint des théories métriques scalaire-tenseur que nous considérons ici sont les paramètres (β, γ) .

⁷Conformément aux résultats expérimentaux exposés dans la section suivante, l'hypothèse du Principe d'Equivalence ($\alpha_{ppn} = 1$) est parfaitement justifiée dans ce régime de champ faible.

contrainte correspondante sur la déviation du paramètre γ_{ppn} par rapport à sa valeur unité en Relativité Générale s'écrit

$$|\gamma_{ppn} - 1| \leq 3 \times 10^{-4} \quad (VLBI). \quad (1.91)$$

Notons qu'il s'agit de la mesure actuelle la plus précise (de l'ordre du centième de pourcent) de l'accord entre la Relativité Générale et l'expérience. Dans le cadre des théories scalaire-tenseur, ce résultat correspond aussi à la contrainte la plus forte connue aujourd'hui sur le couplage scalaire,

$$\alpha_{(exp)}^2 \leq 1.4 \times 10^{-4} \quad (\omega_{(exp)} \geq 3500). \quad (1.92)$$

Les théories de la gravitation prédisent aussi l'allongement du temps d'aller-retour d'un signal radar envoyé à partir de la Terre vers une planète ou un satellite et passant à proximité du Soleil. Ce retard trouve son origine dans une modification de la vitesse de la lumière dans un champ de gravitation (celui du Soleil en l'occurrence). Il est donné par

$$\delta t = 2(\alpha_{ppn} + \gamma_{ppn}) \frac{GM_{\odot}}{c^3} \ln \left[\frac{(r_t + \vec{x}_t \cdot \vec{n})(r_e - \vec{x}_e \cdot \vec{n})}{d^2} \right], \quad (1.93)$$

où \vec{x}_t et \vec{x}_e sont respectivement les vecteurs joignant le Soleil à la Terre et à la planète extérieure, r_t et r_e , les distances correspondantes. d est la distance de plus proche approche du signal radar par rapport au Soleil. Pour un rayon passant près du Soleil,

$$\delta t \simeq \left(\frac{1 + \gamma_{ppn}}{2} \right) \left[239 - 19.7 \ln \left(\frac{d^2}{r_e} \right) \right] \mu s, \quad (1.94)$$

où d est la distance de plus proche approche exprimée en rayons solaires et r_e la distance du Soleil à la planète ou au satellite, en unités astronomiques⁸. Les cibles employées pour la vérification expérimentale de cet effet découvert par Shapiro en 1964 incluent des planètes telles que Mercure et Vénus aussi bien que des satellites artificiels, notamment les *Viking Mars landers* et *orbiters*. La mesure du spectre logarithmique de cet effet Shapiro en fonction de la distance de plus proche approche a permis une seconde détermination précise du paramètre γ_{ppn} . L'expérience Viking [Rea79] donne une précision de l'ordre du dixième de pourcent sur la mesure de ce paramètre :

$$|\gamma_{ppn} - 1| \leq 2 \times 10^{-3} \quad (Shapiro). \quad (1.95)$$

Le troisième grand test de la gravitation que nous développons dans cette section est l'étude du décalage anomal du périhélie de l'orbite de Mercure. Ce problème est resté non résolu plus d'un demi-siècle après l'annonce par Le Verrier en 1859 d'une avance inexplicquée du périhélie de Mercure, après soustraction de différents effets, notamment des perturbations du mouvement képlérien dues à la présence des autres planètes. La valeur expérimentale actuelle de ce décalage est de l'ordre de 43 secondes d'arc par siècle. Différentes propositions *ad hoc* ont été avancées sans succès : l'existence d'une nouvelle planète près du Soleil (Vulcain), un anneau de planétoïdes, un moment quadrupolaire du Soleil ou encore une déviation de la loi de gravitation en $1/r^2$. La théorie d'Einstein explique cet effet par une simple correction relativiste au mouvement. Dans le cadre général de la paramétrisation d'Eddington-Robertson,

⁸L'unité astronomique est définie par la distance moyenne Terre - Soleil : $1 UA \simeq 1.50 \cdot 10^{11} m$.

le décalage angulaire relativiste $\Delta\omega$ du périastre de l'orbite d'un système binaire de masses est donné, en radians par révolution, par

$$\Delta\omega = \frac{1}{3} \left(2\alpha_{ppn} + 2\gamma_{ppn} - \frac{\beta_{ppn}}{\alpha_{ppn}} \right) \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}. \quad (1.96)$$

Les grandeurs a et e sont respectivement le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite ; M est la masse totale du système. La valeur de la précession du périhélie de Mercure en secondes d'arc par siècle est de

$$\dot{\omega} \simeq 43.0 \left(\frac{2 + 2\gamma_{ppn} - \beta_{ppn}}{3} \right) \text{ arcsec siè}^{-1}. \quad (1.97)$$

La mesure expérimentale de ce décalage donne la contrainte [Sha90]

$$|\beta_{ppn} - 1| \leq 3 \times 10^{-3} \text{ (Mercure)}. \quad (1.98)$$

Remarquons que le moment quadrupolaire du Soleil, dû à sa rotation propre, est théoriquement une source de précession du périhélie de l'orbite de Mercure, d'origine purement newtonienne. La présence d'un moment quadrupolaire non nul implique en effet un terme anomal en $1/r^3$ dans le potentiel gravitationnel du Soleil. Ce terme induit une modification du mouvement de Mercure par rapport à l'orbite képlérienne, qui peut s'exprimer à travers la précession de son périastre. Cependant, l'amplitude de cet effet est inférieure à l'erreur sur la valeur expérimentale de la précession. Cette perturbation classique peut par conséquent être négligée, et l'entièreté de la précession peut être attribuée à un effet relativiste, menant à la contrainte donnée ci-dessus pour le paramètre post-newtonien β_{ppn} .

Ces trois grands tests de la gravitation en champ faible nous donnent déjà des contraintes importantes sur les paramètres post-newtoniens. Dans la section suivante, nous étudions d'autres tests expérimentaux de la gravitation, qui sondent la théorie directement dans l'hypothèse du Principe d'Equivalence.

1.5 Principes d'Equivalence

Fondamentalement, le Principe d'Equivalence tel que nous l'avons déjà défini postule l'équivalence locale entre un champ de gravitation et l'accélération d'un système de référence. En d'autres mots, il postule l'universalité de la chute libre (locale) des corps dans un champ de gravitation. Dans le cadre de la théorie de Newton, il identifie masse inertielle et masse gravitationnelle. Il est défini aujourd'hui sous plusieurs formes dont chacune est sujette à différentes vérifications expérimentales. Les différentes théories métriques de la gravitation incluent ce principe à des niveaux divers. Par conséquent, les tests expérimentaux du Principe d'Equivalence sont aussi des tests pour la théorie de la gravitation [Wil93a, Wil01, Dam01].

Principe d'Equivalence Faible

Nous avons déjà défini le Principe d'Equivalence dans sa version Faible (*WEP* pour *Weak Equivalence Principle*) :

“Tous les corps-tests tombent dans un champ gravitationnel avec la même accélération, indépendamment de leur masse et de leur structure interne.”

Un test expérimental direct du Principe d'Equivalence Faible consiste en la comparaison de l'accélération de corps-tests de compositions différentes en laboratoire⁹, dans un champ gravitationnel externe donné. L'énergie de masse de tout corps est donnée par la somme des énergies de masse des constituants, ainsi que des énergies de liaison internes : électromagnétique, faible ou forte. Ce principe postule l'équivalence entre masse inertielle et masse gravitationnelle des corps-tests. Nous pouvons ainsi paramétriser une violation du Principe Faible par une contribution inégale des différents types d'énergies de liaison (non gravitationnelles) à la masse inertielle et à la masse gravitationnelle :

$$m_{gr} = m_{in} + \sum_A \eta^A \frac{E^A}{c^2}, \quad (1.99)$$

où E^A est l'énergie de liaison associée à l'interaction A , et η^A le paramètre sans dimension correspondant, mesurant l'amplitude de la violation. Cette paramétrisation revient à définir un paramètre α_{ppn} (voir (1.84)) fonction des énergies de liaison du corps a considéré (l'indice in est sous-entendu pour la masse m_a) :

$$\alpha_{ppn}^{a(WEP)} = 1 + \sum_A \eta^A \frac{E^A}{m_a c^2}. \quad (1.100)$$

La différence relative d'accélération pour deux corps de compositions différentes dans un champ gravitationnel externe définit le "rapport d'Eötvös" suivant :

$$\eta_{WEP} = \frac{2(a_1 - a_2)}{a_1 + a_2} = \sum_A \eta^A \left(\frac{E_1^A}{m_1 c^2} - \frac{E_2^A}{m_2 c^2} \right) \quad (1.101)$$

$$= \alpha_{ppn}^{1(WEP)} - \alpha_{ppn}^{2(WEP)}, \quad (1.102)$$

où a_1 et a_2 sont les accélérations des corps considérés, et m_1 et m_2 , les masses inertielles correspondantes. Toute contrainte expérimentale sur ce rapport η_{WEP} donne une limite sur les paramètres de violation η^A .

Ce Principe est soumis aux vérifications expérimentales depuis Newton et ses expériences pendulaires. Eötvös, à la fin du dix-neuvième siècle, établit l'équivalence entre masse inertielle et masse gravitationnelle avec une précision déjà importante de 10^{-9} sur le paramètre η_{WEP} . Aujourd'hui, les tests de précision du Principe Faible sont basés sur des expériences du type de celle initiée par Eötvös. Dans les balances à torsion modernes, deux objets de compositions différentes sont reliés par une tige et suspendus horizontalement à un fin câble. Toute différence d'accélération des deux corps induit une torsion dans le câble de suspension, fonction de l'angle entre ce câble et la direction de l'accélération gravitationnelle \vec{g} . Si l'ensemble du système est en rotation autour d'une direction donnée avec une vitesse angulaire ω , la torsion est modulée sur la période $2\pi/\omega$. Ces expériences sont réalisées aussi bien dans le champ de la Terre, que celui du Soleil, ou de la Galaxie. Les résultats les plus récents [Su94] vérifient l'universalité de la chute libre avec une précision plus de mille fois supérieure aux expériences originales :

$$\eta_{WEP} \leq 10^{-12} \quad (\text{Eötvös}). \quad (1.103)$$

⁹L'énergie de liaison gravitationnelle des corps étudiés en laboratoire est parfaitement négligeable ($E^{gr}/mc^2 \leq 10^{-27}$). Il s'agit donc bien de l'étude de corps-tests.

Principe d'Equivalence d'Einstein

Le Principe d'Equivalence d'Einstein (*EEP* pour *Einstein Equivalence Principle*) postule :

“Le Principe d'Equivalence Faible est respecté. De plus, le résultat de toute expérience non gravitationnelle locale est indépendant de où et quand dans l'univers elle est réalisée, ainsi que de la vitesse de chute libre du référentiel dans lequel elle est réalisée.”

De par leur définition même, les théories métriques intègrent ce Principe. En effet, elles postulent d'une part le mouvement géodésique des corps-tests et, d'autre part, que les lois non gravitationnelles de la physique dans un référentiel en chute libre locale sont celles de la Relativité Restreinte (la métrique s'y réduit donc à la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$). Le mouvement géodésique assure la vérification du Principe Faible. Le respect des lois de la Relativité Restreinte localement dans un référentiel en chute libre, implique automatiquement l'indépendance par rapport à la vitesse de chute libre (invariance sous Lorentz) et au point de l'espace-temps considéré (invariance sous translation dans l'espace-temps).

Techniquement, une théorie de la gravitation est métrique, ou vérifie le Principe d'Equivalence d'Einstein donc, si la densité lagrangienne de matière ne dépend que des champs de matière et de la métrique de l'espace-temps uniquement (pas d'éventuels champs auxiliaires, tel que le scalaire des théories de Brans-Dicke) : $\mathcal{L}_{mat} \equiv \mathcal{L}_{mat}(\Psi, g_{\mu\nu})$. En effet, nous avons vu que cette structure implique le mouvement géodésique (1.21) des corps-tests, par l'intermédiaire des lois de conservation covariantes (1.13). Aussi, par changement de coordonnées, il est possible d'annuler les symboles de Christoffel ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(\vec{x}_0) = 0$) en un point \vec{x}_0 , se plaçant ainsi dans le référentiel en chute libre en ce point. D'une part, l'accélération gravitationnelle de chaque corps-test y est réduite à zéro localement, ce qui n'est qu'une formulation alternative de la chute libre universelle. D'autre part, les autres interactions¹⁰, couplées à la gravitation par l'intermédiaire de la connexion $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, sont réduites en ce point à leur structure originale en l'absence de gravitation. Cette structure est dictée par les lois de la Relativité Restreinte si nous postulons indépendamment que la valeur asymptotique de la métrique est celle de Minkowski.

Au niveau expérimental, l'invariance sous les transformations de Lorentz locales est testée avec grande précision à travers la constance de la vitesse de la lumière c . L'invariance sous translation dans le temps est aussi vérifiée, à travers la constance dans le temps des constantes fondamentales de la physique, telles que la constante de structure fine α_{em} , par exemple. L'indépendance relative à la position est aujourd'hui mesurée précisément par des expériences bien connues de dilatation du temps et de *redshift* gravitationnel (décalage vers le rouge). Les expériences de *redshift* gravitationnel constituent le premier test de gravitation proposé par Einstein, même si nous nous rendons compte qu'il ne permet en fait en rien une distinction entre la Relativité Générale elle-même et les autres théories métriques. Une expérience typique

¹⁰Considérons l'interaction électromagnétique. Nous utilisons les unités de Lorentz-Heaviside : $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ et $\alpha_{em} = e^2/4\pi\hbar c$, où \hbar est la constante de Planck et e la charge de l'électron. Le potentiel vecteur est défini en dimension par $[A^\mu] = [c^4/G]^{1/2}$. Les équations pour l'électromagnétisme en présence de gravitation s'écrivent dès lors

$$\begin{aligned} F^{\nu\mu}{}_{;\nu} &= \frac{1}{c} j^\mu \\ F_{[\mu\nu;\rho]} &= 0, \end{aligned}$$

où j^μ est la densité de courant électromagnétique. Cette structure se réduit bien aux équations de Maxwell en Relativité Restreinte si et seulement si la connexion $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ s'annule.

de *redshift* gravitationnel consiste à mesurer le décalage en fréquence $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ entre deux standards de fréquences identiques (deux horloges identiques), placés au repos en deux points différents, \vec{x}_1 et \vec{x}_2 , dans un champ gravitationnel statique. Le phénomène sous-jacent utilisé n'est autre que la dilatation du temps au voisinage d'une source gravitationnelle :

$$d\tau = \sqrt{g_{00}(\vec{x})} dt. \quad (1.104)$$

Sous la paramétrisation d'Eddington-Robertson, nous avons (soit toujours $r = |\vec{x}|$)

$$d\tau \simeq \left(1 + \frac{V(r)}{c^2}\right) dt, \quad (1.105)$$

dans la mesure où le Principe Faible est vérifié ($\alpha_{ppn} = 1$). Dans le cadre d'une théorie métrique, l'invariance locale relative à la position dans l'espace donne le décalage comme

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta V}{c^2}, \quad (1.106)$$

où $\Delta V = V(r_2) - V(r_1)$ est la différence des valeurs du potentiel gravitationnel aux deux points considérés. Ainsi, nous pouvons introduire dans l'expression précédente un paramètre $\alpha'_{(EEP)}$, dont une valeur non nulle (fonction des caractéristiques de l'horloge et du point de l'univers considéré) exprimerait une violation du Principe d'Equivalence d'Einstein :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left(1 + \alpha'_{(EEP)}\right) \frac{\Delta V}{c^2}. \quad (1.107)$$

Les expériences de Pound-Rebka-Snider entre 1960 et 1965 en donnent les premiers tests de haute précision. Elles étudient le décalage de la fréquence d'un photon (gamma) émis par une source de ^{57}Fe après son ascension ou sa chute dans une tour d'une vingtaine de mètres de haut. Le décalage en fréquence du photon à l'arrivée est mesuré à partir du taux d'absorption par un atome de fer identique. L'utilisation de l'effet Mössbauer¹¹ par implantation de la source dans un cristal permet d'assurer une largeur de résonance faible et ainsi d'atteindre une grande précision dans la mesure du décalage en fréquence. L'accord avec les théories métriques est établi avec une précision de l'ordre du pourcent. Plus récemment, les mesures prises par le satellite artificiel Galilée pour le *redshift* gravitationnel de photons provenant du Soleil ont atteint la même précision. D'autres expériences ont été réalisées, analysant directement la dilatation du temps à travers le décalage d'horloges transportées en différents points du champ gravitationnel de la Terre. La mesure la plus précise donne un accord avec le Principe d'Equivalence d'Einstein avec une précision meilleure que le centième de pourcent [Ves80] :

$$\alpha'_{(EEP)} \leq 7 \times 10^{-5}. \quad (1.108)$$

Principe d'Equivalence Fort

Toutes les théories métriques de gravitation incluent le Principe d'Equivalence Faible et le Principe d'Equivalence d'Einstein, tous deux confirmés avec une grande précision expérimentale. Cependant la Relativité Générale définit une version plus forte du Principe d'Equivalence, qui la distingue d'autres théories métriques, telles que les théories de Brans-Dicke par exemple. Le Principe d'Equivalence Fort (*SEP* pour *Strong Equivalence Principle*) postule :

¹¹Selon cet effet, l'implantation dans un cristal permet de geler l'atome et de transmettre l'effet de recul dû à l'émission du photon au réseau cristallin lui-même.

“Le Principe Faible est respecté pour les corps compacts (c’est-à-dire dont les énergies de liaison gravitationnelles internes sont non négligeables) aussi bien que pour les corps-tests. Le résultat de toute expérience locale est indépendant de où et quand dans l’univers elle est réalisée, ainsi que de la vitesse de chute libre du référentiel dans lequel elle est réalisée, que cette expérience soit de nature gravitationnelle ou non gravitationnelle.”

(Effet Nordtvedt)

Au sein des théories scalaire-tenseur qui nous intéressent, les violations possibles du Principe Fort trouvent leur origine dans une dépendance spatiale ou temporelle de la constante de gravitation universelle :

$$G \rightarrow G(x) . \quad (1.109)$$

Le raisonnement qui suit montre que cette dépendance induit automatiquement une violation de l’universalité de la chute libre pour les corps compacts. Considérons en effet un corps compact, c’est-à-dire un système dans lequel les énergies de liaison gravitationnelles sont importantes, mais dont l’étendue est suffisamment restreinte pour nous permettre de négliger les inhomogénéités du champ gravitationnel externe en son sein. Outre les énergies de liaison électrofaible et forte, nous devons maintenant tenir compte des énergies gravitationnelles dans la masse (inertielle) totale du système :

$$m = \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) + \frac{E^{gr}}{c^2} + \dots , \quad (1.110)$$

où l’énergie de liaison gravitationnelle E^{gr} est donnée par

$$E^{gr} = -\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \frac{G\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|c^2} , \quad (1.111)$$

et $\rho(\vec{x})$ est la densité de matière au sein du corps considéré. La dépendance de la constante de Newton dans le point de l’espace-temps implique donc la définition d’une masse variable. La partie de l’action définissant le mouvement des corps dans une théorie métrique (voir (1.15)) doit par conséquent être généralisée sous la forme

$$S_{mat} = -c \sum_a \int m_a(x) ds_a . \quad (1.112)$$

Les équations de “conservation” correspondantes sont

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial T}{\partial x_\mu} , \quad (1.113)$$

dont le terme de droite brise la loi de conservation de la masse établie dans l’équation (1.18), en accord avec le fait que la masse est fonction du point de l’espace-temps. Les équations du mouvement pour un corps compact s’écrivent dès lors

$$\dot{u}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = c^2 \frac{d \ln m}{dx^\mu} \left(g^{\mu\alpha} - \frac{u^\mu u^\alpha}{c^2} \right) . \quad (1.114)$$

La relation

$$-\frac{d \ln m}{d \ln G} = \frac{|E^{gr}|}{mc^2}, \quad (1.115)$$

donne les équations du mouvement suivantes dans la limite non relativiste (soit \vec{g} l'accélération newtonienne standard) :

$$\vec{a} - \vec{g} = c^2 \vec{\nabla} \ln G \frac{|E^{gr}|}{mc^2}. \quad (1.116)$$

Une dépendance de la constante de Newton en fonction de la position implique donc automatiquement la violation de l'universalité de la chute libre des corps compacts. Nous pouvons paramétriser la dépendance spatiale de G par un développement en fonction du potentiel newtonien des sources, à l'instar du développement d'Eddington-Robertson (1.81) pour la métrique :

$$G(\vec{x}) = G \left(1 + \eta^{gr} \frac{V(r)}{c^2} \right). \quad (1.117)$$

Le paramètre η^{gr} sans dimension définit le développement au premier ordre post-newtonien, et G est la valeur expérimentale de la constante de Newton, déterminée par la distribution cosmologique de matière. L'accélération quasi-newtonienne des corps compacts admet donc un terme anomal fonction de son énergie de liaison gravitationnelle interne :

$$\vec{a} = \left(1 - \eta^{gr} \frac{|E^{gr}|}{mc^2} \right) \vec{g}. \quad (1.118)$$

Cet effet à été étudié par Nordtvedt en 1968 [Nor68a, Nor68b]. Exactement comme nous l'avons imaginé pour les autres interactions (voir (1.99)), cette paramétrisation revient à considérer que l'énergie de liaison gravitationnelle des corps contribue de manière inégale à leurs masses inertielle et gravitationnelle,

$$m_{gr} = m_{in} - \eta^{gr} \frac{|E^{gr}|}{c^2}. \quad (1.119)$$

La violation de la chute libre universelle est ainsi associée à un paramètre α_{ppn} fonction des énergies de liaison gravitationnelles du corps a considéré :

$$\alpha_{ppn}^{a(SEP)} = 1 - \eta^{gr} \frac{|E^{gr}|}{mc^2}. \quad (1.120)$$

Dans le cadre des théories métriques, c'est la seule déviation admise à la valeur unitaire du paramètre α_{ppn} (voir (1.85)).

(Limites expérimentales)

L'existence d'une telle accélération anormale peut être étudiée expérimentalement au sein même de notre système solaire. Si l'effet Nordtvedt est présent, la Terre doit tomber vers le Soleil avec une accélération légèrement différente de celle de la Lune. Il en résulte une polarisation de l'orbite de la Lune autour de la Terre, en direction du Soleil. Cette polarisation représente une perturbation cyclique de la distance Terre - Lune de la forme

$$\delta r = 13.1 \eta^{gr} \cos(\omega_0 - \omega_s) t \quad m, \quad (1.121)$$

où ω_0 et ω_s sont les fréquences angulaires de rotation respectives de la Lune et du Soleil autour de la Terre (voir [Wil01] et références pour la valeur exacte du coefficient numérique). Depuis

1969, des mesures régulières de la distance Terre - Lune sont réalisées grâce au réflecteur laser déposé sur le sol lunaire par la mission Apollo 11. Cette expérience de Télémétrie - Laser - Lune (*TLL*) mesure aujourd'hui le temps d'aller-retour des signaux laser entre différents observatoires sur Terre et la Lune. La distance Terre - Lune est ainsi mesurée avec une précision de l'ordre du centimètre. Cette observation donne *a priori* une limite directe sur le paramètre η^{gr} , en termes de la relation (1.121).

Remarquons cependant que tous les tests du Principe d'Equivalence en laboratoire donnent des contraintes pures sur le Principe Faible, les énergies de liaison gravitationnelles étant parfaitement négligeables par rapport aux autres interactions. Mais à l'inverse, toute expérience directe de la violation du Principe d'Equivalence dans des systèmes de corps célestes est un test combiné des Principes d'Equivalence Faible et Fort. Tous les types d'énergies de liaison peuvent contribuer à une différence entre masse inertielle et masse gravitationnelle, c'est-à-dire à une valeur anormale du paramètre α_{ppn} :

$$\alpha_{ppn}^{a(WEP+SEP)} - 1 = \sum_A \eta^A \frac{E^A}{m_a c^2} - \eta^{gr} \frac{|E^{gr}|}{m_a c^2}. \quad (1.122)$$

Substituant cette relation dans les équations (1.101) et (1.102), nous obtenons le rapport d'Eötvös pour les accélérations de la Lune et de la Terre en direction du Soleil. Il s'exprime comme la somme des contributions associées à la violation du Principe Faible et du Principe Fort respectivement :

$$\eta = \frac{\delta a}{a_s} = \eta_{WEP} + \eta_{SEP}, \quad (1.123)$$

où

$$\eta_{WEP} = \frac{\delta a_{WEP}}{a_s} = \sum_A \eta^A \left(\frac{E_t^A}{m_t c^2} - \frac{E_l^A}{m_l c^2} \right), \quad (1.124)$$

et

$$\eta_{SEP} = \frac{\delta a_{SEP}}{a_s} = -\eta^{gr} \left(\frac{|E_t^{gr}|}{m_t c^2} - \frac{|E_l^{gr}|}{m_l c^2} \right). \quad (1.125)$$

Si nous voulons obtenir une limite pure sur le Principe d'Equivalence Fort, il est nécessaire de soustraire aux résultats de télémétrie l'éventuelle anomalie due à la différence de composition de la Terre et de la Lune (c'est-à-dire à la violation du Principe Faible). La limite obtenue sur le mouvement anomal du système Terre - Lune, transposée en termes de la différence de leurs accélérations $\delta a = (a_t - a_l)$ dans le champ du Soleil donne la contrainte [Dic94, WND96, Müll99]

$$\frac{\delta a_{(TLL)}}{a_s} = (3.2 \pm 4.6) \times 10^{-13}, \quad (1.126)$$

où $a_s = (a_t + a_l)/2$. Les limites habituelles sur le paramètre η_{WEP} en laboratoire sont de l'ordre de $\eta_{WEP} \leq 10^{-12}$, mais une contrainte spécifique existe, $\eta_{WEP} \leq 4 \times 10^{-13}$, pour l'accélération relative de corps dont les compositions simulent celles de la Terre et de la Lune [Bae99]¹². L'incertitude résultante sur l'amplitude de l'effet Nordtvedt est donnée par

$$\eta_{SEP} = \eta - \eta_{WEP} \quad (1.127)$$

$$= (-0.4 \pm 5.5) \times 10^{-13}. \quad (1.128)$$

¹²Le cœur de la Terre est essentiellement composé de fer et de nickel, alors que la structure de son manteau comme celle de la Lune est faite de silicates. L'expérience en laboratoire consiste à mesurer l'(absence d')accélération relative entre deux corps-tests, l'un dont la structure s'apparente à celle du cœur terrestre, et l'autre simulant la composition de la Lune et du manteau terrestre. La limite sur l'accélération relative de la Terre et de la Lune due à la différence de leurs compositions est ainsi donnée en fonction de la limite pour les

Les énergies de liaison gravitationnelles par unité de masse de la Lune et de la Terre étant données par $|E_l^{gr}|/m_l c^2 = 0.2 \times 10^{-10}$ et $|E_t^{gr}|/m_t c^2 = 4.6 \times 10^{-10}$, nous obtenons la limite supérieure suivante sur le paramètre de violation du Principe d'Equivalence Fort :

$$|\eta^{gr}| \leq 1.3 \times 10^{-3} \quad (TLL). \quad (1.129)$$

L'effet Nordtvedt trouve son origine dans la dépendance spatiale de G . Mais la dépendance de la constante de gravitation en fonction de la position dans l'espace-temps constitue en tant que telle une violation du Principe d'Equivalence Fort. Un second type de test expérimental est généralement avancé, qui consiste en l'étude des variations temporelles de la constante de Newton. La plupart des théories de la gravitation qui violent le Principe Fort prédisent une telle variation de G au cours de l'évolution de l'univers. Différentes contraintes observationnelles peuvent être placées sur le rapport \dot{G}/G , par l'étude de l'évolution du Soleil, par l'observation d'occultations lunaires, par les mesures de télémétrie, ou encore par l'étude du mouvement orbital de pulsars binaires. Les meilleures limites [Wil01] viennent cependant des expériences de télémétrie lunaire ainsi que vers les sondes Viking, donnant une variation maximale relative par année de

$$\frac{\dot{G}}{G} \leq 10^{-12} \text{ an}^{-1}. \quad (1.130)$$

Notons pour terminer que la prise en compte des données de télémétrie lunaire les plus récentes [Wil00] semble déjà poser des contraintes meilleures par rapport aux résultats publiés [Dic94, WND96, Mü199] pour le paramètre η_{gr} et pour le taux de changement de G .

Il nous reste à comprendre les raisons profondes qui font que la Relativité Générale se distingue des autres théories métriques de gravitation par l'inclusion du Principe d'Equivalence dans sa version forte. Ceci nous permettra d'interpréter toutes les contraintes expérimentales sur ce dernier comme des tests de précision de la théorie d'Einstein, notamment face aux théories scalaire-tenseur.

Champs auxiliaires et Principe d'Equivalence Fort

L'étude du Principe d'Equivalence Fort se résume à l'analyse d'expériences gravitationnelles locales (en chute libre) et de l'accélération de corps compacts dans un champ gravitationnel. Le raisonnement qui suit montre dans un premier temps que la présence de champs de gravitation auxiliaires implique une violation du Principe d'Equivalence Fort (condition suffisante). Nous suggérons ensuite que l'absence de champs de gravitation auxiliaires en Relativité Générale implique le respect du Principe d'Equivalence Fort (condition nécessaire).

Nous considérons donc une quelconque théorie métrique de la gravitation, au sein de laquelle des champs de gravitation auxiliaires, tels que le champ scalaire de Brans-Dicke, se couplent à la métrique (exclusivement). Nous étudions un système de masses en interaction gravitationnelle dans un référentiel en chute libre locale. Le comportement du système est défini par la métrique. Dans un premier temps, les solutions pour la métrique et les autres champs de gravitation dans l'environnement gravitationnel extérieur au système local doivent

corps étudiés en laboratoire (δa_{test}) par

$$\delta a_{WEP} = (f_t - f_l) \delta a_{test},$$

où $f_t = 0.382$ et $f_l = 0.101$ sont les fractions respectives des masses de la Terre et de la Lune, faites de fer et de nickel.

être définies. Les solutions pour les champs de gravitation générés par le système lui-même sont ensuite établies en fonction des valeurs aux limites données par les champs extérieurs. Dans un référentiel en chute libre locale, la valeur de la métrique aux frontières du système est donnée par la métrique de Minkowski. Mais les valeurs limites des champs auxiliaires (couplés à la métrique) influencent la structure de la métrique interne générée par le système. Le résultat d'expériences gravitationnelles locales dépend ainsi de la position et de la vitesse de chute libre du système. Par contre, les expériences non gravitationnelles ne sont en rien affectées, puisque les champs gravitationnels qu'elles génèrent sont supposés négligeables et que les champs auxiliaires, définis par leurs valeurs aux frontières, ne sont pas directement couplés à la matière. La présence de champs de gravitation auxiliaires est donc associée à une violation du Principe d'Equivalence Fort.

La Relativité Générale identifie la métrique de l'espace-temps comme unique champ de gravitation. D'une part, en vertu du raisonnement précédent, la métrique générée par un système en chute libre locale n'y est fonction que des propriétés du système. Elle est donc indépendante du point et de la vitesse de chute libre. D'autre part, nous vérifions dans la section suivante que l'accélération des corps compacts dans un champ gravitationnel y est effectivement universelle, du moins dans la limite non relativiste¹³.

Théories de Brans-Dicke pour des corps compacts

Nous pouvons finalement étudier le Principe d'Equivalence Fort, dans le cadre restreint de la Relativité Générale et des théories de Brans-Dicke. D'une part, la constante de Newton dépend de la valeur asymptotique du champ scalaire :

$$G \rightarrow G(\Phi_b(x)) . \quad (1.131)$$

La dépendance explicite est donnée par l'équation (1.65). Il en résulte immédiatement que le résultat d'une expérience locale gravitationnelle (expérience de Cavendish ou autre) est évidemment fonction du point de l'espace-temps où elle est réalisée, à travers la valeur asymptotique locale du champ scalaire.

D'autre part, la détermination du mouvement de corps compacts au sein d'une théorie métrique est à nouveau définie en deux étapes. D'abord, il faut résoudre les équations de champs complètes au sein des corps eux-mêmes et dans leur voisinage (l'approximation post-newtonienne n'étant plus justifiée en champ fort), ainsi que les équations post-newtoniennes dans les régions séparant les corps entre eux, pour ensuite connecter ces solutions dans la région intermédiaire. Les contraintes qui en résultent définissent les équations du mouvement recherchées. Cette approche a été initiée par Einstein, Infeld et Hoffmann, dans le cadre de la Relativité Générale. Mais, par le raisonnement précédent, nous savons que la structure interne des corps compacts, et en conséquence leur énergie de masse, est modifiée par la présence de champs de gravitation auxiliaires :

$$m \rightarrow m(\Phi_b(x)) . \quad (1.132)$$

Nous adoptons donc ici une approche simplifiée, due à Eardley [Ear75], pour l'étude du mouvement des corps compacts. Cette approche consiste à considérer une dépendance explicite de la masse de ces corps dans la valeur asymptotique locale Φ_b du champ scalaire, tout en

¹³Ce résultat est démontré à un ordre supérieur dans l'approximation post-newtonienne [Wil93a, PW02], mais aucune preuve complète n'est établie à ce jour.

les considérant comme ponctuels. Les équations de champs et du mouvement sont modifiées en conséquence et de manière à inclure les effets de violation de Principe d'Equivalence Fort. Notamment, le mouvement des corps compacts n'est plus géodésique, et dans la limite newtonienne, l'accélération anormale associée à l'effet Nordtvedt, conséquence inéluctable de la dépendance de la constante de gravitation en fonction de la position, apparaît explicitement.

L'action pour les champs de matière (voir (1.47)) est donc remplacée par

$$S_{mat}^{(bd')} = -c \sum_a \int m_a(\Phi) ds_a. \quad (1.133)$$

La théorie complète se réécrit donc sous la forme

$$S^{(bd')} = -\frac{c^3}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \Phi^{,\alpha} \Phi_{,\alpha} \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}(\Psi, g_{\mu\nu}, \Phi), \quad (1.134)$$

où la dépendance explicite de la densité lagrangienne de matière dans le champ scalaire est donnée par l'équation (1.133). Les équations de champs (1.48) pour la métrique restent inchangées, alors qu'un terme supplémentaire apparaît dans l'équation (1.49) pour le champ scalaire :

$$\Phi_{;\alpha}^{\alpha} = \frac{8\pi}{c^4} \frac{1}{2\omega + 3} \left(T - 2\Phi \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right). \quad (1.135)$$

Les équations de conservation sont étendues,

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = \Phi^{,\mu} \frac{\partial T}{\partial \Phi}, \quad (1.136)$$

et les équations du mouvement s'ensuivent :

$$\dot{u}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = c^2 \frac{d \ln m}{d \ln \Phi} \varphi_{,\mu} \left(g^{\mu\alpha} - \frac{u^\mu u^\alpha}{c^2} \right). \quad (1.137)$$

Ces deux dernières expressions découlent immédiatement des relations (1.113) et (1.114) où la dépendance de la masse dans la position est donnée par la valeur asymptotique locale du champ scalaire.

L'expression exacte de l'effet Nordtvedt découle en fait directement de la relation (1.65), qui nous donne le développement (1.117) de la constante de gravitation dans le potentiel newtonien à travers le champ scalaire induit par la source extérieure. Pour une source non compacte, le champ scalaire $\Phi_b(x)$ est donné au premier ordre par la solution (1.74) :

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{\Phi_b(\vec{x})}{\Phi_0} - 1 = -\xi \frac{V(r)}{c^2}, \quad (1.138)$$

où $V(r) = -GM/r$ est le potentiel newtonien de la source ($r = |\vec{x}|$). La constante de Newton (pour le système Terre - Lune dans le champ du Soleil) se développe donc comme

$$G_b = G \left(1 + \xi \frac{V(r)}{c^2} \right). \quad (1.139)$$

Le paramètre associé à l'effet Nordtvedt (voir (1.117) et (1.118)) dans les théories scalaire-tenseur de Brans-Dicke, est donc donné par le couplage scalaire ξ :

$$\eta_{(bd)}^{gr} \equiv \xi. \quad (1.140)$$

Pour être complet, nous mentionnons ici l'expression générale exacte de l'interaction non relativiste en fonction des énergies de liaison de chacun des corps. L'équation scalaire étant modifiée pour une source compacte (1.135), le champ scalaire qu'elle développe dans la limite statique s'exprime au premier ordre comme

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{\Phi_b(\vec{x})}{\Phi_0} - 1 = -\xi(1-2s) \frac{V(r)}{c^2}. \quad (1.141)$$

Le paramètre $s \equiv (d \ln m / d \ln \Phi)_{|\Phi_0}$ définit la sensibilité de la masse (source) par rapport au champ scalaire. Ce champ étant couplé à la métrique, il en modifie les solutions. Notamment, pour la composante 00 (à travers les solutions inchangées pour la perturbation $\theta_{\mu\nu}$),

$$h_{00}(\vec{x}) = (1 - \xi s) \frac{2V(r)}{c^2}. \quad (1.142)$$

Introduisant ces solutions dans la limite non relativiste de l'équation du mouvement (1.137) pour un corps de sensibilité s_1 ,

$$a^i = -c^2 \left(\frac{1}{2} h_{00,i} + s_1 \varphi_{,i} \right), \quad (1.143)$$

nous obtenons l'accélération, dite quasi-newtonienne, dans le champ d'un corps de sensibilité s_2 :

$$\vec{a} = (1 - \xi s_1 - \xi s_2 + 2\xi s_1 s_2) \vec{g}. \quad (1.144)$$

De façon générale, nous écrivons encore cette accélération comme purement newtonienne, à travers la redéfinition de la constante de gravitation pour le système à deux corps considéré :

$$G_{12} = (1 - \xi s_1 - \xi s_2 + 2\xi s_1 s_2) G. \quad (1.145)$$

En vertu de la relation (1.65) entre la constante de Newton et la valeur limite du champ scalaire, la sensibilité d'un corps s'identifie à son énergie de liaison par unité de masse :

$$s = \frac{d \ln m}{d \ln \Phi}_{|\Phi_0} = -\frac{d \ln m}{d \ln G} = \frac{|E^{gr}|}{mc^2}. \quad (1.146)$$

Ainsi, en particulier, pour une source non compacte, nous retrouvons une fois encore l'expression de l'effet Nordtvedt. Notons que la compacité de la source (le Soleil) n'entre pas en compte dans l'étude de la polarisation de l'orbite lunaire (au premier ordre dans les énergies de liaison), puisque cette polarisation résulte de l'accélération relative de la Lune par rapport à la Terre dans le champ du Soleil.

Limites expérimentales

Dans le cadre des théories de Brans-Dicke, les limites expérimentales sur la violation du Principe Fort donnent naturellement une contrainte sur le couplage scalaire. Le résultat (1.129) donne en effet

$$\omega \geq 1000. \quad (1.147)$$

Cette contrainte est du même ordre de précision que les autres tests en champ faible, confirmant les prédictions de la Relativité Générale avec une précision de l'ordre du dixième de

pourcent. Les résultats de mesures de déflexion de la lumière par le *VLBI* offrent cependant toujours la meilleure limite ($\omega \geq 3500$).

Dans le cadre général des théories métriques, ce paramètre est donné par la combinaison post-newtonienne suivante :

$$\eta^{gr} = 4\beta_{ppn} - \gamma_{ppn} - 3, \quad (1.148)$$

expression qui se réduit bien à $\eta^{gr} = \xi$ dans le cadre particulier des théories de Brans-Dicke. Dans ce contexte plus général, les mesures de violation directe du Principe d'Equivalence Fort offrent la meilleure limite actuelle sur le paramètre β_{ppn} (γ_{ppn} étant mesuré égal à l'unité avec une précision meilleure par les expériences du *VLBI* : $|\gamma_{ppn} - 1| \leq 3 \times 10^{-4}$) :

$$|\beta_{ppn} - 1| \leq 6 \times 10^{-4} \quad (TLL). \quad (1.149)$$

Ce résultat est près d'un ordre de grandeur au-delà de la contrainte obtenue à partir de la précession du périhélie de Mercure ($|\beta_{ppn} - 1| \leq 3 \times 10^{-3}$).

1.6 Approche alternative

Jusque-là, nous avons considéré la gravitation dans l'approche géométrique classique qui lui est propre. Les interactions du Modèle Standard sont décrites dans le formalisme de la théorie quantique des champs, avec lequel nous supposons le lecteur familier. Dans cette section, nous complétons notre étude des phénomènes de gravitation en champ faible dans une approche rudimentaire de "théorie des champs" pour la description de l'interaction gravitationnelle. Nous considérons les théories linéarisées définies par la Relativité Générale d'une part, et les théories de Brans-Dicke d'autre part. Dans ce formalisme, les ondes qui propagent l'interaction classique à la vitesse de la lumière sont décrites en termes de la propagation réelle et virtuelle de particules non massives (le graviton, d'hélicité 2, et éventuellement une particule scalaire) en interaction avec les champs du Modèle Standard. Les propagateurs et vertex d'interaction associés doivent être identifiés. L'interaction classique entre corps est définie en termes d'une amplitude de diffusion générale, à partir de laquelle nous pouvons réétudier l'interaction gravitationnelle dans la théorie linéarisée.

Relativité Générale

La théorie linéarisée est donnée par le développement de l'action $S^{(rg)}$ à l'ordre dominant dans la perturbation $h_{\mu\nu}$. Pour une normalisation canonique, nous redéfinissons la perturbation par un développement dans la constante de couplage κ

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{2\kappa} h_{\mu\nu}, \quad (1.150)$$

et l'action d'Einstein pour le champ de gravitation $(h_{\mu\nu})^{14}$ en interaction avec les champs de matière $(T_{\mu\nu})$ se réduit à

$$S_{(rg)}^{(2)}(h_{\mu\nu}, \kappa) \equiv \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial^\rho h_{\mu\rho} \right) - \sqrt{\frac{\kappa}{2c}} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right]. \quad (1.151)$$

Les équations linéarisées (1.23) peuvent être dérivées de cette forme de l'action. $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-moment pour la matière donné dans l'approximation (1.28). Tout comme dans le cas de l'électromagnétisme, l'introduction d'un terme brisant la symétrie de jauge est nécessaire pour éviter l'apparition de singularités dans la théorie des champs. Ajoutant le terme $(1/2) \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} \partial^\rho \bar{h}_{\mu\rho}$, nous réécrivons l'action sous la forme

$$S_{(rg)}^{(2)}(h_{\mu\nu}, \kappa) = \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{8} \partial_\mu h \partial^\mu h \right) - \sqrt{\frac{\kappa}{2c}} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right]. \quad (1.152)$$

Les équations correspondantes sont les équations linéarisées dans la jauge harmonique (1.27). Dans le vide, ces équations d'ondes définissent la propagation d'une particule non massive, le graviton :

$$\frac{1}{2} \square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = 0. \quad (1.153)$$

Les deux polarisations physiques (transverses et sans trace) ainsi que l'hélicité 2 du graviton sont établies par les propriétés correspondantes des ondes gravitationnelles identifiées par ces mêmes équations dans l'analyse classique.

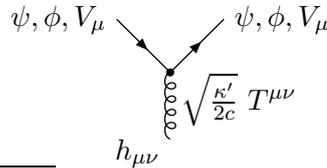
Le propagateur du graviton est défini comme fonction de Green des équations du mouvement $G^{\mu\nu, \alpha\beta}$:

$$\frac{1}{4} \square [\eta_{\mu\gamma} \eta_{\nu\delta} + \eta_{\mu\delta} \eta_{\nu\gamma} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\gamma\delta}] G^{\mu\nu, \alpha\beta}(x - x') = -\frac{1}{2} (\delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta + \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta) \delta^4(x - x'). \quad (1.154)$$

Dans l'espace des moments, pour un moment de transfert q , il est donné par la structure

$$G^{\mu\nu, \alpha\beta}(q) = \frac{\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}}{q^2 + i\varepsilon}. \quad (1.155)$$

Le terme d'interaction ($\sim h^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$) définit un vertex trilinéaire pour l'interaction entre le champ de gravitation et la matière, dont le tenseur énergie-moment est une forme quadratique des champs (pour un champ fermionique ψ autant que pour un scalaire ϕ , ou un vecteur V_μ) :



¹⁴Dans le cadre de la théorie des champs, le système d'unités généralement utilisé définit les unités naturelles $\hbar = c = 1$, où \hbar est la constante de Planck, et c , la vitesse de la lumière. Sauf mention explicite, nous travaillons dans les unités standard du système international *MKSA*, comme nous l'avons fait jusqu'ici dans notre analyse classique. Toutefois, nous définissons les actions pour les théories de champs dans la normalisation canonique des termes cinétiques. Ceci revient à redéfinir la dimension des champs, scalaire ϕ , électromagnétique A^μ , gravitationnel $h_{\mu\nu}$, ... de la façon suivante :

$$[\phi] = [A^\mu] = [h_{\mu\nu}] = \dots = [c^3/G]^{1/2}.$$

Ainsi, dans l'espace des impulsions, une amplitude d'interaction entre deux champs prend la forme

$$\mathcal{M}_{(rg)} = \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[G T_{\mu\nu}^{(1)} G^{\mu\nu,\alpha\beta}(q) T_{\alpha\beta}^{(2)} \right], \quad (1.156)$$

où $T_{\mu\nu}^{(1)}$ et $T_{\mu\nu}^{(2)}$ sont les expressions des tenseurs énergie-moment pour les champs considérés, en fonction des impulsions entrantes et sortantes. G est la constante d'interaction, q le moment de transfert et \mathcal{N} , un coefficient de normalisation standard donné par le formalisme de la théorie des champs.

Théories de Brans-Dicke

Considérons les théories scalaire-tenseur sous leur forme originale (1.47). Nous redéfinissons à nouveau les perturbations en fonction des couplages tensoriel κ' et scalaire $\alpha^2 \kappa'$, pour obtenir une normalisation canonique,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \sqrt{2c\kappa'} h_{\mu\nu} \\ \Phi &= \Phi_0 \left(1 + \alpha \sqrt{2c\kappa'} \varphi \right). \end{aligned} \quad (1.157)$$

La théorie linéarisée qui découle du développement de l'action $S^{(bd)}$ à l'ordre dominant dans les perturbations $\theta_{\mu\nu}$ et φ est donnée par

$$S_{(bd)}^{(2)} = S_{(rg)}^{(2)}(\theta_{\mu\nu}, \kappa') + S_{(sc)}^{(2)}(\varphi, \alpha). \quad (1.158)$$

L'action

$$\begin{aligned} S_{(rg)}^{(2)}(\theta_{\mu\nu}, \kappa') &= \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4} \partial_\mu \theta^{\alpha\beta} \partial^\mu \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \frac{1}{2} \partial^\mu \theta \partial^\nu \theta_{\mu\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\nu \theta^{\mu\nu} \partial^\rho \theta_{\mu\rho} \right) - \sqrt{\frac{\kappa'}{2c}} \theta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (1.159)$$

donne la théorie linéarisée pour la Relativité Générale (voir (1.151)), à la constante de couplage près. L'action

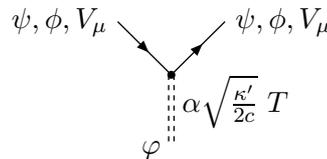
$$S_{(sc)}^{(2)}(\varphi, \alpha) \equiv \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) + \alpha \sqrt{\frac{\kappa'}{2c}} \varphi T \right], \quad (1.160)$$

définit l'interaction scalaire, où la trace T est donnée par $T = \rho c^2$. L'interaction scalaire-tenseur se résume donc effectivement à la somme directe de l'interaction tensorielle de la Relativité Générale et d'une interaction scalaire découplée de la première. Pour le champ scalaire, les équations d'ondes dans le vide identifient une particule scalaire (d'hélicité nulle) non massive.

Le propagateur associé est donné par la forme canonique

$$\Delta_F(q) = \frac{1}{q^2 + i\varepsilon}. \quad (1.161)$$

Le terme d'interaction ($\sim \varphi T$) définit un vertex trilinéaire pour l'interaction entre le champ scalaire de gravitation et les champs de matière :



Les amplitudes d'interaction entre deux champs de matière s'écrivent dès lors comme la somme des amplitudes tensorielle et scalaire correspondantes,

$$\mathcal{M}_{(bd)} = \mathcal{M}^T + \mathcal{M}^S \quad (1.162)$$

$$= \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[G' T_{\mu\nu}^{(1)} G^{\mu\nu,\alpha\beta}(q) T_{\alpha\beta}^{(2)} + \alpha^2 G' T^{(1)} \Delta_F(q) T^{(2)} \right], \quad (1.163)$$

avec des poids relatifs G' et $\alpha^2 G'$.

Dans chaque théorie, certains phénomènes de champ faible peuvent ainsi être déduits par le calcul des amplitudes de Feynmann que nous venons de définir. Notamment, le potentiel classique d'interaction est donné par l'amplitude de diffusion de deux particules dans la limite non relativiste statique ($T^{\mu\nu} \equiv \rho c^2 \delta_0^\mu \delta_0^\nu$). En Relativité Générale, le potentiel de Newton est assimilé à l'amplitude de diffusion de deux champs ψ_1 et ψ_2 par un graviton. Dans le cadre d'une théorie scalaire-tenseur, l'amplitude du couplage est partagée entre les interactions tensorielle et scalaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(bd)}(\psi_1 \psi_2 \rightarrow \psi_1 \psi_2) &= \begin{array}{c} \psi_1 \quad \psi_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \psi_2 \quad \psi_2 \end{array} \quad h_{\mu\nu} \quad + \quad \begin{array}{c} \psi_1 \quad \psi_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \psi_2 \quad \psi_2 \end{array} \quad \varphi \\ &= \frac{1}{c} \mathcal{N} (1 + \alpha^2) G' m_1 m_2 \left(\frac{4\pi}{-\vec{q}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.164)$$

Le vecteur \vec{q} donne la partie spatiale du moment de transfert. Cette amplitude identifie exactement la transformée de Fourier du potentiel de Newton ($(1 + \alpha^2)G' = G$). Nous utilisons cette approche au chapitre 5, dans l'étude de différentes formes de violation du Principe d'Equivalence au-delà des théories scalaire-tenseur.

Signalons encore que même des phénomènes purement relativistes peuvent être compris dans le cadre de ce formalisme. La déflexion de la lumière, par exemple, peut être obtenue à travers l'amplitude de diffusion d'un photon (γ) et d'un scalaire massif (ϕ) par l'interaction gravitationnelle. Dans ce cas, la trace du tenseur énergie-moment associé pour le photon étant nulle ($T^{(\gamma)} = 0$, par invariance d'échelle), l'interaction scalaire ne contribue pas à la déflexion de la lumière :

$$\mathcal{M}_{(bd)}(\gamma\phi \rightarrow \gamma\phi) = \begin{array}{c} \gamma \quad \gamma \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \phi \quad \phi \end{array} \quad h_{\mu\nu} \quad + \quad 0 \text{ (scalaire)}.$$

La différence de prédiction des théories scalaire-tenseur avec la Relativité Générale pour l'amplitude de la déflexion résulte donc uniquement de la différence des constantes de couplage. Nous retrouvons donc le résultat précédemment établi (voir (1.89)) :

$$\delta\theta_{(bd)} = \frac{G'}{G} \delta\theta_{(rg)} = \frac{1}{1 + \alpha^2} \delta\theta_{(rg)} = \frac{1 + \gamma_{ppn}^{(bd)}}{2} \delta\theta_{(rg)}. \quad (1.165)$$

Notons finalement que l'émission d'ondes gravitationnelles pourrait encore être définie à partir des amplitudes associées aux vertex d'interaction eux-mêmes.

Dans le cadre des théories scalaire-tenseur, le formalisme complet de "théorie des champs" pour l'étude des phénomènes gravitationnels a été développé jusqu'au second ordre post-newtonien [DEF96a].

Conclusion

En conclusion, la Relativité Générale passe les tests majeurs de gravitation en champ faible. La déflexion de la lumière, l'effet Shapiro, la précession du périhélie de Mercure et le Principe d'Equivalence sont étudiés à travers les paramètres γ_{ppn} et β_{ppn} du développement post-newtonien d'ordre 1, et leur mesure vérifie les prédictions de la théorie d'Einstein, avec une précision supérieure au dixième de pourcent. Les meilleures contraintes, définies par la déflexion de la lumière au voisinage du Soleil et l'étude du mouvement orbital de la Lune autour de la Terre donnent respectivement $|\gamma_{ppn} - 1| \leq 3 \times 10^{-4}$ et $|\beta_{ppn} - 1| \leq 6 \times 10^{-4}$. Ces contraintes ne permettent pas d'exclure une éventuelle composante scalaire de gravitation, mais le couplage scalaire associé est au moins quatre ordres de grandeur inférieur au couplage métrique. Au-delà de l'amélioration de la sensibilité expérimentale de ces mêmes tests, d'autres laboratoires doivent être imaginés, si nous voulons statuer plus précisément sur l'existence d'un champ de gravitation auxiliaire. Au chapitre suivant, nous abordons l'étude des ondes gravitationnelles comme un domaine de test important de nos théories de la gravitation.

Chapitre 2

Ondes de gravitation

L'étude des radiations gravitationnelles constitue un terrain de test important de la gravitation [Wil01]. L'existence même d'ondes gravitationnelles étant une caractéristique de toute théorie relativiste de la gravitation, c'est dans les propriétés particulières de ces ondes que la distinction entre différentes théories peut être réalisée. D'une part, certaines théories (dont nous ne parlerons pas ici) prédisent une différence entre la vitesse des ondes de gravitation et la vitesse de la lumière. D'autre part, comme notre analyse de la Relativité Générale et des théories de Brans-Dicke nous l'a déjà suggéré, la structure des radiations, en termes de l'hélicité des ondes et des états de polarisation physiques, varie d'une théorie à l'autre. Par exemple, un mouvement quadrupolaire des sources est nécessaire pour produire des radiations dans le cadre de la Relativité Générale, alors que l'explosion purement sphérique d'une supernova sera déjà source d'éventuelles ondes scalaires. Mais l'analyse de ces propriétés nécessite la détection directe des ondes. La difficulté majeure rencontrée dans ce domaine est liée à l'extrême faiblesse des signaux attendus, de par leur nature gravitationnelle même. C'est la raison pour laquelle aucune confirmation expérimentale directe n'a pu être apportée à ce jour pour l'existence même des ondes de gravitation¹. Cependant, l'émission de radiations gravitationnelles correspond à une perte d'énergie au sein des sources. Cette perte d'énergie peut être associée à des effets observables pour des sources définissant un champ gravitationnel fort, tels que la diminution de la période orbitale de systèmes d'étoiles binaires. Ce phénomène a été mesuré pour la première fois à la fin des années 1970, par Hulse et Taylor, dans une double étoile à neutrons, le PSR B1913 + 16, en accord avec les prédictions de la Relativité Générale. Cette mesure a déjà pu être répétée dans un second pulsar binaire comprenant deux étoiles à neutrons, le PSR B1534 + 12. L'analyse de ces deux "laboratoires" constitue aujourd'hui encore l'unique preuve expérimentale, indirecte, de l'existence des ondes de gravitation. Au-delà de la théorie d'Einstein, une perte d'énergie propre est associée à chaque composante gravitationnelle (tensorielle, scalaire, vectorielle, etc.). Ces contributions s'additionnent et la distinction entre différentes théories est envisageable à travers l'étude de cette "réaction" des sources de

¹La détection directe des ondes gravitationnelles est envisagée à travers deux principes de détection différents. Les *antennes de masses* sont des structures importantes dont l'interaction avec une onde incidente doit produire un phénomène de résonance mécanique détectable. Les *interféromètres* sont constitués de deux cavités laser sous vide dont les extrémités sont délimitées par des masses libres de se mouvoir dans le plan horizontal. L'impact d'une onde produit une modification relative des longueurs des deux bras, analysée par interférométrie laser. Ces détecteurs devraient permettre, outre la détection des ondes, une analyse détaillée de leur structure, ainsi que l'étude des systèmes sources (voir [Tho95, Sch99a, Sch99b] dans le cadre de la Relativité Générale, et [Wil94, Bia98, Fuc00] pour les théories scalaire-tenseur).

radiations gravitationnelles.

La première section de ce chapitre définit le taux d'émission de radiations quadrupolaires dans le cadre de la Relativité Générale. Nous étudions ensuite en détail le PSR B1913 + 16 (section 2.2), dont l'observation a conduit à l'évidence expérimentale la plus forte pour les ondes de gravitation. La section 2.3 établit la dominance théorique des radiations scalaires dipolaires dans le cadre des théories de Brans-Dicke, suggérant déjà que l'étude de la décroissance orbitale de systèmes binaires puisse définir des contraintes importantes sur le couplage scalaire.

2.1 Quadrupole (Relativité Générale)

L'expression du taux d'émission de radiations gravitationnelles en fonction de la structure du mouvement des sources est ici dérivée dans le cadre de la Relativité Générale. Seuls les termes dominants, d'ordre $\mathcal{O}(1/c^5)$, induits par le mouvement quadrupolaire des sources, sont définis.

Structure quadrupolaire des ondes de gravitation

Si nous reprenons le développement (1.22) de la métrique, les équations d'Einstein complètes peuvent s'écrire sous forme d'équations d'ondes non linéaires :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu)} = -2\kappa \tau_{\mu\nu}^{(rg)}. \quad (2.1)$$

Le pseudo-tenseur $\tau_{\mu\nu}^{(rg)}$, source de la perturbation $\bar{h}_{\mu\nu}$, est défini par la relation

$$\tau_{\mu\nu}^{(rg)} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{(rg)}, \quad (2.2)$$

où

$$\kappa t_{\mu\nu}^{(rg)} = \left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} \right) - \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right), \quad (2.3)$$

et où l'indice ⁽¹⁾ définit le développement au premier ordre dans la perturbation. Les identités de Bianchi satisfaites par le tenseur de Ricci linéarisé,

$$\left(R^{\mu\nu(1)} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} R^{(1)} \right)_{,\nu} \equiv 0, \quad (2.4)$$

impliquent la conservation locale de $\tau_{\mu\nu}^{(rg)}$:

$$\tau^{\mu\nu}_{,\nu}{}^{(rg)} = 0. \quad (2.5)$$

Ces équations définissent le pseudo-tenseur $t_{\mu\nu}^{(rg)}$ comme le tenseur énergie-moment associé aux champs de gravitation. Nous avons vu que l'énergie et la quantité de mouvement pour la matière ne sont conservées que dans la limite non relativiste ($T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$). Les équations (2.5) sont équivalentes aux relations exactes $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$. Elles donnent une loi de conservation exacte de l'énergie et de la quantité de mouvement, si les contributions gravitationnelles sont prises en compte autant que la matière elle-même (voir (2.2)).

Ainsi, les termes sources des radiations gravitationnelles sont identifiés dans la structure complète (non linéaire) des équations d'Einstein. Dans la jauge harmonique (1.26), les équations d'ondes correspondantes s'écrivent

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa\tau_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

où l'indice (rg) est sous-entendu. La solution formelle à ces équations est donnée en termes d'un potentiel retardé :

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3\vec{x}' \frac{\tau_{\mu\nu}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.7)$$

Nous étudions ces solutions à grande distance R des sources, $R \gg r_c$ (r_c identifiant la dimension caractéristique des sources considérées), et dans la limite de mouvements lents : $\lambda \gg r_c$ (λ identifiant la longueur d'onde caractéristique)². Nous pouvons dès lors écrire la solution en termes du développement multipolaire suivant :

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{Rc^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d^3\vec{x}' \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c} \right)^m \cdot \frac{\partial^m}{\partial t^m} (\tau_{\mu\nu}(\vec{x}', t - R/c)). \quad (2.8)$$

Le temps $t - R/c$ identifie l'instant d'émission de l'onde, et le vecteur unitaire $\vec{n} = \vec{x}/R$ définit la direction source - observateur (ligne de visée), dans un référentiel où la source est à l'origine. A l'ordre dominant (monopolaire relativement à la source τ_{ij}), l'amplitude des radiations gravitationnelles est d'ordre $\mathcal{O}(1/c^4)$:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{Rc^4} \int d^3\vec{x}' \tau_{\mu\nu}(\vec{x}', t - R/c). \quad (2.9)$$

Remarquons que seules les composantes purement spatiales sont nécessaires à l'identification de la partie transverse et sans trace (composantes physiques) de ces solutions³. Les équations de conservation (2.5) impliquent l'identité

$$\int d^3\vec{x}' \tau^{ij} = \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3\vec{x}' x'^i x'^j \tau^{00}(\vec{x}', t - R/c), \quad (2.10)$$

donnant une nature quadrupolaire (de masse) à ces ondes. Toujours au même ordre d'approximation, la composante temporelle du tenseur énergie-moment total est donnée par la contribution des champs de matière uniquement, les termes gravitationnels (quadratique en $h_{\mu\nu}$) étant d'ordre supérieur. Les solutions d'onde sont ainsi données en fonction du quadrupole de masse, sans contribution purement gravitationnelle ($t_{\mu\nu}$) :

$$\bar{h}_{ij}(\vec{x}, t) = -\frac{2G}{Rc^4} \partial_0^2 \int d^3\vec{x}' x'_i x'_j T^{00}(\vec{x}', t - R/c) \quad (2.11)$$

$$= -\frac{2G}{Rc^4} \ddot{Q}_{ij}(t - R/c), \quad (2.12)$$

²L'évaluation du contenu en énergie et quantité de mouvement de radiations n'est définie que sur un domaine beaucoup plus large que la longueur d'onde caractéristique. Aussi, nous ajoutons la condition $R \gg \lambda$. Les conditions $R \gg r_c$ et $R \gg \lambda$ identifient la zone d'onde. Nous pouvons résumer les conditions de zone d'onde et mouvements lents par $R \gg \lambda \gg r_c$.

³Afin d'éviter les confusions, nous précisons notre convention selon laquelle les indices spatiaux sont gérés par la métrique définie positive habituelle δ_{ij} au lieu de η_{ij} quand les seules composantes spatiales des champs sont considérées.

où les $Q^{ij} \equiv \int d^3\vec{x}' \rho x'^i x'^j$ sont les moments quadrupolaires de masse des sources. La partie transverse et sans trace $h_{ij}^{TT}(\vec{x}, t)$ de l'onde est donnée de manière univoque par l'expression [Sch99a]

$$h_{ij}^{TT}(t - R/c) = -\frac{2G}{Rc^4} \left[\perp_{ik} \perp_{jl} - \frac{1}{2} \perp_{ij} \perp_{kl} \right] \ddot{Q}^{kl}(t - R/c) \quad (2.13)$$

$$= -\frac{2G}{Rc^4} \left[\perp_{ik} \perp_{jl} - \frac{1}{2} \perp_{ij} \perp_{kl} \right] \ddot{D}^{kl}(t - R/c). \quad (2.14)$$

Les $\perp^{ij} = \delta^{ij} - n^i n^j$ sont les opérateurs de projection perpendiculaire à la ligne de visée⁴, et les $D^{ij} = \int d^3\vec{x}' \rho (x'^i x'^j - (1/3)\delta^{ij} r'^2)$ sont les moments quadrupolaires sans trace définis par les sources.

Ainsi, comme cette dernière expression le montre, les propriétés de transversalité et de trace nulle se marquent aussi bien dans la structure de l'onde (voir (1.42)) qu'à la génération : seule la partie transverse à la ligne de visée, et sans trace des moments quadrupolaires des sources contribue à la génération de radiations gravitationnelles tensorielles dans la théorie d'Einstein. Par ailleurs, ce résultat nous montre que les radiations considérées sont d'une intensité extrêmement faible ($\mathcal{O}_{(qua)}^h(1/c^4)$). Sous forme simplifiée, ces solutions radiatives s'écrivent

$$h_{ij}^{TT}(\vec{x}, t) \sim -\frac{GM_Q}{Rc^2} \sim \frac{V_Q}{c^2}, \quad (2.15)$$

où V_Q est la valeur sur Terre du potentiel produit par l'équivalent en masse M_Q de la quantité d'énergie "quadrupolaire" contenue dans les sources. Une estimation grossière pour les sources les plus intenses, en fonction de leur distance, donne une amplitude d'onde [Tho95, Sch99b] de l'ordre de

$$h_{ij}^{TT}(\vec{x}, t) \sim 10^{-21} (10^{-22}). \quad (2.16)$$

Ce résultat donne une idée de la sensibilité extrême qui doit être atteinte par les détecteurs sur Terre (voir (1.43) et (1.44)), et justifie une approche différente en termes de l'influence de l'émission gravitationnelle sur le mouvement des sources.

Décroissance orbitale d'un système binaire

Nous nous proposons de calculer la perte d'énergie associée à l'émission d'ondes en fonction des moments quadrupolaires des sources. Par unité de temps, cette énergie peut être calculée par intégration sur les angles solides du flux de quantité de mouvement associé aux radiations dans la zone d'onde. Vu la faible intensité des radiations, le tenseur énergie-moment (2.3) associé aux radiations peut être évalué en très bonne approximation au second ordre :

$$\kappa t_{\mu\nu}^{(rg)} = -R_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}^{(2)}. \quad (2.17)$$

Nous pouvons encore calculer ces composantes à partir des termes cinétiques de l'action pour la théorie linéarisée (voir (1.151)). De manière générale, le tenseur énergie-moment $t^{\mu\nu}$ pour un champ est donné par

$$t^{\mu\nu} = -\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \Big|_{\eta_{\mu\nu}}, \quad (2.18)$$

⁴Ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes : $\perp^{ij} n_j = 0$ et $\perp^{ij} \perp_{jl} = \perp^i$.

où \mathcal{L} est la densité lagrangienne associée à ce champ, quand celle-ci ne dépend que du champ et de la métrique elle-même. Nous imposons *a priori* les conditions (1.39) de transversalité et de trace nulle dans l'action à l'ordre 2 pour $h_{\mu\nu}$. Pour le développement (1.22), nous obtenons

$$\mathcal{L}_{cin.}^{TT} = \left(\frac{1}{2c\kappa} \right) \frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta}, \quad (2.19)$$

et

$$t^{\mu\nu(rg)} = -\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{1}{2} \partial^\nu h^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta} + \partial_\rho h^{\beta\mu} \partial^\rho h_\beta^\nu \right). \quad (2.20)$$

Les composantes d'impulsion, pour une onde $h_{ij}(t - R/c)$, se réduisent à

$$t^{i0(rg)} = \frac{c^2}{32\pi G} \left(\dot{h}^{kl} \dot{h}_{kl} \right) n^i. \quad (2.21)$$

L'intensité d'énergie rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles par unité d'angle solide s'écrit alors

$$\frac{dI}{d\Omega} = cR^2 n_i t^{i0(rg)} \quad (2.22)$$

$$= \frac{R^2 c^3}{32\pi G} \left(\dot{h}^{kl} \dot{h}_{kl} \right), \quad (2.23)$$

où h^{kl} est la partie transverse et sans trace de l'onde, donnée par l'expression (2.14). La perte d'énergie totale⁵ est par conséquent d'ordre⁶ $\mathcal{O}_{(qua)}^h(1/c^5)$ et fonction des dérivées temporelles troisièmes des moments quadrupolaires sans trace de la source (évaluées en $t - R/c$) [LL66b, Wei72],

$$-\frac{dE}{dt}_{|(rg)} = \frac{G}{5c^5} \ddot{D}^{ij} \ddot{D}_{ij}. \quad (2.24)$$

C'est l'analogie directe pour la gravitation de la formule de Larmor en électromagnétisme, donnant le taux d'émission d'énergie électromagnétique en fonction des moments dipolaires électriques des sources (voir chapitre 5).

Dans le cas particulier de systèmes binaires, et dans l'approximation képlérienne du mouvement, cette perte d'énergie instantanée s'écrit (voir annexe A)

$$-\frac{dE}{dt}_{|(rg)} = \frac{8}{15} \frac{G^3 \mu^2 M^2}{c^5 r^4} [12v^2 - 11\dot{r}^2], \quad (2.25)$$

où r et v sont respectivement les distance et vitesse relatives des deux corps ; $M = m_1 + m_2$ est la masse totale du système, et $\mu = m_1 m_2 / M$, la masse réduite. La moyenne sur une période T du mouvement s'écrit encore [PM63] :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{dE}{dt}_{|(rg)} \right) dt \equiv \left\langle -\frac{dE}{dt}_{|(rg)} \right\rangle_K = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e), \quad (2.26)$$

⁵L'intégration sur les angles solides est donnée par les intégrales angulaires suivantes sur le vecteur n^i : $\int d\Omega = 4\pi$, $\int n^i n^j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta^{ij}$ et $\int n^i n^j n^k n^l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk})$.

⁶La précession relativiste, la déflexion de la lumière, le retard de l'écho radar, ou encore les violations du Principe d'Equivalence sont des corrections $\mathcal{O}(1/c^2)$, dites du premier ordre post-newtonien (1PN). L'émission d'ondes gravitationnelles $\mathcal{O}(1/c^5)$ apparaît donc à l'ordre 2.5PN.

où a et e sont respectivement les demi-grand axe et excentricité de l'orbite réduite. La fonction $f(e) = (1 + 73/24e^2 + 37/96e^4)/(1 - e^2)^{7/2}$ est un facteur de majoration par rapport aux orbites circulaires, croissant rapidement avec l'excentricité de l'orbite ($1 \leq f(e) < \infty$). Cette perte d'énergie est inéluctablement associée à un rétrécissement de l'orbite et à une accélération du mouvement orbital. La variation correspondante de la période orbitale d'un système binaire (décroissance orbitale) est une grandeur *a priori* observable et constitue donc le paramètre important du point de vue astrophysique. Son expression résulte des relations suivantes. L'énergie totale du binaire peut être exprimée en fonction du demi-grand axe comme $E = -G\mu M/2a$. La loi d'harmonie, troisième loi de Kepler, donne le carré de la période orbitale proportionnellement au cube du demi-grand axe : $T^2 = 4\pi^2 a^3/GM$. L'expression théorique pour la variation relative de la période orbitale associée à l'émission de radiations quadrupolaires s'écrit donc (voir (A.32)) :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \Big|_{(rg)} = -\frac{G^3}{c^5} \frac{96}{5} \frac{\mu M^2}{a^4} f(e) . \quad (2.27)$$

2.2 Analyse expérimentale (pulsars binaires)

Les étoiles à neutrons constituent le stade ultime de l'évolution d'étoiles beaucoup plus massives que notre Soleil. L'éjection des couches externes d'une étoile lors de l'explosion d'une supernova laisse derrière elle un cœur d'une densité extrême, comprimant une masse de l'ordre de celle du Soleil dans un rayon de l'ordre de dix kilomètres. Le champ gravitationnel en leur sein est suffisamment fort pour condenser les atomes ordinaires en une matière constituée essentiellement de neutrons, avec une contamination en protons et électrons en quantités égales ; un immense noyau atomique. Les conservations du moment angulaire et du champ magnétique à travers l'explosion de l'étoile initiale en font des corps en rotation rapide (leur période de rotation s'étale entre une fraction de seconde et quelques secondes), siège d'un champ magnétique dipolaire intense (de l'ordre de 10^{12} Gauss). Les forces électromagnétiques en présence induisent un rayonnement radio intense le long des directions définies par les pôles magnétiques. Les faisceaux radio ainsi définis balayent le ciel à la vitesse de rotation de l'étoile. Si la Terre se trouve sur leur trajet, nous appelons cette étoile à neutrons un pulsar. Le premier spécimen a été découvert en 1967. Des mesures de précision de la période intrinsèque de pulsation, telle qu'elle est définie par le temps d'arrivée des pulses radio, montrent que ces pulsars sont des horloges extrêmement stables, rivalisant avec le degré de précision des horloges atomiques les plus précises. Cette stabilité se comprend par l'inertie intense que ces étoiles opposent, de par leur densité, à toute force de friction extérieure.

A l'époque, il semblait naturel que ces étoiles à neutrons soient des étoiles solitaires. La perte de masse immense induite par le phénomène de supernova étant sans doute responsable de la destruction de l'orbite de toute étoile compagnon. Pourtant, en 1974 déjà, les radioastronomes Hulse et Taylor découvrent le premier pulsar binaire [Wil93b, Hul94], le PSR B1913+16⁷ (radiotélescope d'Arecibo, Puerto Rico), constitué de deux étoiles à neutrons. L'analyse des paramètres de l'orbite du système a mené à la première évidence expérimentale pour l'existence des ondes de gravitation [TFC79, WTF81, Wil93a]. A ce jour, une telle analyse a pu être répétée dans un autre pulsar binaire constitué de deux étoiles à neutrons,

⁷La désignation des systèmes binaires est définie par leur position sur la sphère céleste. En l'occurrence, le pulsar est à une ascension droite de 19 heures et 13 minutes et à une déclinaison de +16 degrés, plaçant le système dans la constellation de l'Aigle, dans notre Galaxie, à une distance estimée de 15000 années-lumière.

le PSR B1534 + 12. Cependant la précision du test réalisé étant beaucoup plus importante dans le cas du système de Hulse et Taylor, nous concentrons essentiellement notre étude sur le PSR B1913 + 16.

Le pulsar de Hulse et Taylor

L'étoile à neutrons est le seul objet visible (dans le domaine radio) dans le système. Il n'a pourtant pas fallu plus de deux mois après la découverte du PSR B1913 + 16 pour comprendre que ce pulsar fait partie d'un système binaire, et pour déterminer les paramètres essentiels de l'orbite. La période du signal radio mesurée sur Terre est affectée d'une perturbation cyclique. La période intrinsèque du signal T_p (59 millisecondes) étant extrêmement stable, cette modification apparente (jusqu'à 80 microsecondes⁸) ne peut s'expliquer que par un effet Doppler classique dû à une variation de la vitesse radiale (vitesse dans la direction de la ligne de visée) du pulsar dans sa révolution autour d'une autre étoile. L'analyse de la courbe des vitesses radiales, c'est-à-dire l'analyse de la période de rotation (propre) apparente de l'étoile à neutrons, permet la détermination des paramètres képlériens suivants. D'une part, la période orbitale T (7.75 heures) est identifiée à la période de variation des temps d'arrivée des pulses. D'autre part, la structure de cette courbe donne l'excentricité de l'orbite e (0.6), ainsi que la projection du demi-grand axe de l'orbite du pulsar sur la ligne de visée, $a_p \sin i$ (où i est l'angle d'inclinaison de l'orbite par rapport au plan du ciel), de l'ordre du rayon de notre Soleil ($7 \cdot 10^8$ mètres)⁹. Nous donnons ci-dessous les valeurs mesurées aujourd'hui :

$$T_p = 59.029\,997\,929\,613(7) \text{ ms} \quad (2.28)$$

$$T = 0.322\,997\,462\,736(7) \text{ j} \quad (2.29)$$

$$e = 0.617\,130\,8(4) \quad (2.30)$$

$$a_p \sin i = 2.341\,759\,2(19) \text{ s lum}, \quad (2.31)$$

où les chiffres entre parenthèses définissent l'erreur sur la dernière décimale [Tay93, Wil01].

Au-delà de cette approche standard en termes de la courbe des vitesses radiales, l'analyse des temps d'arrivée des signaux radio a permis la mesure de deux paramètres relativistes essentiels. Cette mesure permet la détermination des masses du pulsar (m_p) et de son compagnon (m_c), ainsi que la valeur absolue du demi-grand axe de l'orbite¹⁰ a . Le premier de ces paramètres n'est autre que le taux de précession du périastre, tel qu'il est prédit dans le cadre de la Relativité Générale. En radians par révolution, nous avons

$$\Delta\omega = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}, \quad (2.32)$$

⁸La période de rotation intrinsèque du pulsar (T_p) est en fait obtenue avec une précision importante après soustraction de cet effet Doppler classique ($\Delta T_p/T_p \simeq v/c \simeq 10^{-3}$) et des effets relativistes de dilatation du temps identifiés par l'équation (2.34), d'ordre 2 dans la vitesse du pulsar ($\Delta T_p/T_p \simeq (v/c)^2 \simeq 10^{-6}$).

⁹La longitude du périastre ω , définissant la position du périastre dans le plan de l'orbite, est aussi déterminée.

¹⁰Les variations importantes de la période apparente sont associées à des vitesses orbitales de l'ordre du millièème de la vitesse de la lumière ($\Delta T_p/T_p \simeq 10^{-3} \simeq v/c$). La petite valeur de la projection du demi-grand axe, de l'ordre du rayon solaire, suggère en outre que les deux étoiles sont très rapprochées. Par conséquent, des effets relativistes beaucoup plus importants que dans le cas de systèmes d'étoiles binaires classiques sont attendus. La détermination des masses du PSR B1913 + 16 à partir d'effets prédits par la Relativité Générale constitue la première expérience astrophysique dans laquelle notre théorie de la gravitation est utilisée comme outil, et non simplement considérée comme une théorie physique à tester.

où $M = m_p + m_c$. La loi d'harmonie donne le demi-grand axe comme $a = (GM/n^2)^{1/3}$, où $n = 2\pi/T$ est le moyen mouvement lié à la révolution du système. Aussi, nous pouvons encore écrire, en radians par unité de temps,

$$\dot{\omega} = \frac{3n}{1-e^2} \left(\frac{GMn}{c^3} \right)^{2/3}. \quad (2.33)$$

Le second paramètre intègre les effets de dilatation du temps (effet Doppler transverse, prédit par la Relativité Restreinte) et de *redshift* gravitationnel (lié à l'hypothèse du Principe d'Equivalence). Une différence entre le temps mesuré à la surface du pulsar et le temps de coordonnée s'ensuit, donnée par la loi différentielle

$$\frac{d\tau_p}{dt} = 1 - \frac{v_p^2}{2c^2} - \frac{Gm_c}{rc^2}, \quad (2.34)$$

v_p étant la vitesse orbitale du pulsar dans le centre de masse du système, et r la distance relative des deux étoiles. L'intégration de cette relation donne à travers les lois classiques du mouvement,

$$\tau_p = t - \gamma \sin E. \quad (2.35)$$

Le paramètre γ intègre les effets relativistes considérés,

$$\gamma = \frac{e m_2}{n M} \left(1 + \frac{m_2}{M} \right) \left(\frac{GMn}{c^3} \right)^{2/3}, \quad (2.36)$$

où E est l'anomalie excentrique du mouvement, c'est-à-dire l'angle polaire dans le plan de l'orbite, par rapport à la position du périastre et dans un système de coordonnées où le centre de l'ellipse du mouvement est à l'origine¹¹. Ces deux paramètres relativistes peuvent donc être considérés comme des fonctions des masses du système uniquement (le moyen mouvement et l'excentricité étant déterminés indépendamment), et leur mesure permet la détermination de celles-ci. Les valeurs précises de ces paramètres pour le PSR B1913 + 16 sont [Tay93, Wil01]

$$\dot{\omega} = 4.226\,621(11) \text{ } ^\circ an^{-1} \quad (2.37)$$

$$\gamma = 4.295(2) \text{ } ms. \quad (2.38)$$

Ces effets sont effectivement extrêmement importants, et confirment l'idée que ce système définit un régime de champ fort par comparaison avec notre système solaire. Pour référence, le taux de précession du périhélie de Mercure est près de 36000 fois moins important (43 secondes d'arc par siècle). L'intersection dans le plan $m_p - m_c$ des courbes correspondant à l'identification des valeurs expérimentales aux prédictions théoriques définit donc les masses du système astrophysique. Ces masses sont de l'ordre de 1.4 masses solaires. Elles sont déterminées avec une précision supérieure à un pour mille :

$$m_p = 1.441\,1 \pm 0.000\,7 M_\odot \quad (2.39)$$

$$m_c = 1.387\,3 \pm 0.000\,7 M_\odot. \quad (2.40)$$

¹¹Cette anomalie excentrique est définie par les relations

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E) \\ E - e \sin E &= n(t - t_0), \end{aligned}$$

où t_0 est l'instant de passage au périastre. L'anomalie vraie ϕ est l'angle polaire, par rapport au périastre et dans un système de coordonnées polaires centré au foyer de l'orbite. Elle est donnée par l'équation standard de l'ellipse dans un tel référentiel, et par la conservation du moment angulaire (voir annexe A).

De ces résultats, nous déduisons immédiatement le demi-grand axe, effectivement de l'ordre du rayon solaire ($a \simeq 2.8 r_{\odot}$), et l'inclinaison i du plan de l'orbite par rapport au plan du ciel ($i \simeq 45^\circ$).

Avant de tester la théorie dans sa prédiction pour l'existence des ondes gravitationnelles, il nous faut préciser la nature de l'étoile compagnon [WTF81]. La contrainte majeure sur la nature de ce compagnon silencieux provient du fait que celui-ci doit être suffisamment petit pour tenir à l'intérieur de l'orbite du pulsar. Quatre types d'étoiles effondrées sont susceptibles de satisfaire à cette condition. La première possibilité, la plus plausible, consiste à considérer qu'il s'agit d'une seconde étoile à neutrons (éventuellement un second pulsar). Une seconde hypothèse est celle du trou noir, le stade le plus extrême de l'évolution finale d'une étoile, où l'effondrement gravitationnel n'est jamais stabilisé pour former une étoile à neutrons, et où la matière est comprimée jusqu'à une densité infinie. Mais une telle évolution laisse en général une étoile dont la masse est deux à trois fois supérieure à celle du Soleil. La masse du compagnon étant ici de l'ordre de 1.4 masses solaires, il est très improbable qu'il s'agisse d'un trou noir. La troisième possibilité est celle d'une naine blanche, dont la dimension typique est celle de la Terre. Leur masse est limitée par la masse théorique de Chandrasekhar, de l'ordre de 1.4 masses solaires, au-delà de laquelle l'effondrement ne peut être stabilisé à la dimension d'une naine blanche et évolue jusqu'au stade plus extrême de l'étoile à neutrons sous l'effet de la pression gravitationnelle trop intense. Cette éventualité ne peut donc pas être exclue (à une distance de 15000 années-lumière, une naine blanche serait effectivement invisible), même si elle est improbable étant donné que la masse du compagnon est proche de la masse critique. Le quatrième et dernier candidat est l'étoile à hélium, dont la taille typique est de quelques dixièmes de rayons solaires, résidu (constitué essentiellement d'hélium) d'une étoile initialement beaucoup plus massive dont les couches supérieures ont été éjectées. Mais un tel compagnon devrait être visible. Nous supposons donc que le PSR B1913 + 16 est au cœur d'un système propre, constitué de deux étoiles à neutrons, où aucun effet classique de déformation de l'étoile compagnon ne peut altérer l'analyse du système réalisée¹². Remarquons pour terminer que l'histoire de l'évolution du système, finissant donc inéluctablement dans l'explosion d'une seconde supernova au voisinage de la première étoile à neutrons formée, explique naturellement le caractère fortement excentrique de l'orbite actuelle ($e \simeq 0.6$).

Décroissance orbitale du PSR B1913 + 16

Tous les paramètres du système étant connus avec une précision importante, nous pouvons maintenant imaginer tester la théorie d'Einstein dans sa prédiction de l'existence des ondes de gravitation, à travers l'analyse de la décroissance orbitale du pulsar binaire.

Tout comme pour les autres paramètres relativistes mesurés, l'expression théorique (2.27)

¹²Dans l'hypothèse où le compagnon est une étoile à hélium, ou dans une moindre mesure une naine blanche, des phénomènes classiques contribuent aux effets de précession et de décroissance orbitale. De telles étoiles peuvent en effet subir des distorsions dues à leur rotation propre (tout comme notre Soleil acquiert un moment quadrupolaire non nul par sa rotation propre), ou à des effets de marées dans le champ gravitationnel intense du pulsar (pour une étoile à hélium). Les déformations résultantes pourraient rendre compte d'une partie ou même de l'entièreté de la précession du périastre du pulsar, masquant l'effet purement relativiste et rendant plus précaire la détermination indépendante des masses du système. Dans le cas de l'étoile à hélium, l'accélération du mouvement orbital pourrait aussi s'expliquer en partie à travers des phénomènes de friction associés à la déformation de l'étoile par les effets de marées. Au contraire, si le compagnon est un trou noir, une naine blanche sans rotation propre, ou une autre étoile à neutrons, nous sommes assurés que ces phénomènes sont largement dominés par les effets relativistes.

de la décroissance orbitale due à l'émission de radiations gravitationnelles peut s'exprimer comme une fonction du moyen mouvement n , de l'excentricité e et des masses du système (m_p et m_c). Nous obtenons l'expression

$$\dot{T}_{(rg)} = -\frac{192\pi}{5} \frac{\mu}{M} \left(\frac{GMn}{c^3} \right)^{5/3} f(e), \quad (2.41)$$

prédisant une diminution de la période orbitale de près de 76 microsecondes par an, de l'ordre de 10^{-12} secondes par seconde, pour le PSR B1913 + 16 (voir (2.42)). Au niveau expérimental, la décroissance orbitale observée (voir (2.43)) doit être affectée d'une correction due à l'accélération relative du pulsar et du Soleil dans la Galaxie (d'autres corrections doivent *a priori* être prises en compte, mais sont négligeables) [DT91]. Les données de la position du pulsar et de son mouvement propre, combinées avec la courbe de rotation de la Galaxie, définissent une contribution galactique de l'ordre de 10^{-14} secondes par seconde (voir (2.44)). La valeur expérimentale précise attribuée à une variation intrinsèque de la période orbitale se trouve ainsi réduite à la différence entre la décroissance observée et cette contribution galactique (voir (2.45)). Ces valeurs théoriques et expérimentales précises pour le PSR B1913 + 16 sont résumées ci-dessous [Tay93] :

$$\dot{T}_{(rg)} = (-2.4025 \pm 0.0001) \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1} \quad (2.42)$$

$$\dot{T}_{(obs)} = (-2.4225 \pm 0.0056) \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1} \quad (2.43)$$

$$\dot{T}_{(gal)} = (-0.0124 \pm 0.0064) \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1} \quad (2.44)$$

$$\dot{T}_{(obs)} - \dot{T}_{(gal)} = (-2.4101 \pm 0.0085) \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1}. \quad (2.45)$$

L'existence des ondes gravitationnelles est ainsi confirmée de manière indirecte, dans le cadre de la Relativité Générale, avec une précision impressionnante de 0.35% :

$$\frac{\dot{T}_{(obs)} - \dot{T}_{(gal)}}{\dot{T}_{(rg)}} \Big|_{(1913+16)} = 1.0032 \pm 0.0035. \quad (2.46)$$

C'est la première confirmation expérimentale de la théorie au-delà du régime de champ faible étudié par les expériences dans le système solaire¹³.

¹³Nous citons, pour comparaison, les résultats correspondants pour le test réalisé dans le second pulsar binaire qui a permis une vérification de la Relativité Générale dans sa prédiction pour l'émission d'ondes de gravitation, le PSR B1534 + 12 [Sta98]. La période propre du pulsar est de $T_p = 37.9044404878552(5) \text{ ms}$. Les période orbitale, excentricité et projection du demi-grand axe de l'orbite sont respectivement donnés par $T = 0.42073729930(4) \text{ j}$, $e = 0.2736776(2)$ et $a_p \sin i = 3.7294628(7) \text{ s lum}$. Les mesures de la précession du périastre et du paramètre γ ($\dot{\omega} = 1.75576(4)^\circ \text{ an}^{-1}$ et $\gamma = 2.066(10) \text{ ms}$) déterminent des masses identiques pour les deux étoiles à neutrons, aux erreurs expérimentales près : $m_p = m_c = 1.339 \pm 0.003 M_\odot$. Une décroissance de la période orbitale est observée, $\dot{T}_{(obs)} = (-0.129 \pm 0.014) \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1}$. Remarquons cependant que l'ordre de précision de cette mesure est faible par rapport au cas du pulsar de Hulse et Taylor. La contribution galactique, $\dot{T}_{(gal)} = (0.038 \pm 0.012) \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1}$, est elle-même affectée d'une incertitude relative importante, liée à la mauvaise connaissance de la distance du système par rapport au système solaire. La valeur attribuée à la variation intrinsèque de la période orbitale après soustraction de la contribution galactique est donnée par $\dot{T}_{(obs)} - \dot{T}_{(gal)} = (-0.167 \pm 0.018) \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1}$. La comparaison avec la prédiction de la Relativité Générale pour le taux d'émission de radiations gravitationnelles, $\dot{T}_{(rg)} = -0.1924 \times 10^{-12} \text{ s s}^{-1}$, fournit une vérification de la théorie avec une précision de l'ordre de 15%.

2.3 Dipole (Brans-Dicke)

Cette section a pour but d'établir le taux d'émission d'ondes gravitationnelles scalaires en fonction de la structure du mouvement du système source. Les contributions jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(1/c^5)$ doivent être prises en considération, si nous voulons définir le poids relatif de ces radiations par rapport aux radiations quadrupolaires tensorielles.

Structure multipolaire des ondes scalaires et décroissance orbitale

Les équations exactes (1.48) et (1.49) pour les théories de Brans-Dicke peuvent s'écrire sous forme d'équations d'ondes :

$$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\theta}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^{\lambda} \bar{\theta}_{\lambda\nu)} = -2\kappa' \tau_{\mu\nu}^{(bd)} \quad (2.47)$$

$$\square \varphi - \left[\left(\bar{\theta}^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta} \varphi \right) \varphi_{,\beta} \right]_{,\alpha} = \frac{1}{2} \xi \kappa \sqrt{-g} T, \quad (2.48)$$

pour le développement en perturbations donné par les relations (1.50) et (1.53).

Pour la partie tensorielle, les termes sources sont définis par le pseudo-tenseur $\tau_{\mu\nu}^{(bd)} = T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{(bd)}$. Comme dans le cadre de la Relativité Générale, ses composantes identifient un tenseur énergie-moment complet, comprenant des contributions des champs de matière ($T_{\mu\nu}$), et des contributions purement gravitationnelles ($t_{\mu\nu}^{(bd)}$), scalaires et tensorielles, définies par des termes d'ordre 2 et supérieurs dans les perturbations $\theta_{\mu\nu}$ et φ . A nouveau, des identités de Bianchi d'ordre 1 pour $\theta_{\mu\nu}$ assurent la conservation locale de ce tenseur énergie-moment $\tau_{\mu\nu}^{(bd)}$:

$$\tau^{\mu\nu}{}_{,\nu}^{(bd)} = 0. \quad (2.49)$$

Les équations tensorielles (2.47) pour $\theta_{\mu\nu}$ sont ainsi formellement identiques à celles de la Relativité Générale. Des radiations tensorielles sont donc définies. Elles sont données par les composantes quadrupolaires de masse uniquement, comme dans le cadre de la théorie d'Einstein (voir (A.1)). Le taux d'émission d'énergie associé est cependant affecté de corrections d'ordre $\mathcal{O}_{(qua)}^\theta(\xi/c^5)$, induites par les expressions modifiées pour les constantes de couplage, G' pour le couplage de la matière aux champs de gravitation, et G_{12} pour l'interaction non relativiste entre les champs de matière. Notons que les contributions purement gravitationnelles ($t_{\mu\nu}$) s'évanouissent. Ceci suggère, à l'instar du résultat obtenu en Relativité Générale, que l'approximation linéaire donnée par les équations (1.19) et (1.27) est suffisante pour le calcul des radiations tensorielles à l'ordre quadrupolaire.

Pour la perturbation scalaire, c'est la trace du tenseur énergie-moment pour les champs de matière qui est source de radiations (voir (2.48))¹⁴. Les équations d'ondes tensorielles et scalaire étant découplées, les radiations scalaires se superposent simplement aux radiations tensorielles. Pour une distribution discrète de sources non compactes a , nous avons

$$\frac{1}{2} \xi \kappa \sqrt{-g} T = \xi \frac{4\pi G}{c^2} \sum_a \frac{d\tau_a}{dt} \rho_a. \quad (2.50)$$

Dans l'approximation linéaire ($\varphi \sim \mathcal{O}(\xi/c^2)$), la source s'identifie à la masse, qui est conservée et n'induit par conséquent aucune dynamique. Les ondes de gravitation scalaires participent

¹⁴Le terme source entre crochets étant une divergence totale, il ne contribue pas au niveau des solutions pour des mouvements de sources périodiques et locaux.

donc d'un phénomène intrinsèquement non linéaire. Au-delà de l'approximation linéaire, les champs de gravitation eux-mêmes (à travers $d\tau_a/dt$) génèrent les premiers termes scalaires dynamiques (monopolaires), au même ordre que les premières contributions (quadrupolaires) provenant des champs de matière. Le développement multipolaire des radiations dans la zone d'onde donne en effet :

$$\varphi(t - R/c) = \xi \frac{G}{Rc^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d^3\vec{x}' \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c} \right)^m \cdot \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\sum_a \frac{d\tau_a}{dt} \rho_a(\vec{x}', t - R/c) \right). \quad (2.51)$$

La quantité de mouvement du système étant conservée dans la limite non relativiste, la structure dipolaire est négligeable ($\varphi_{(di)} \sim \mathcal{O}(\xi/c^5)$). Ainsi, le taux d'émission d'énergie sous forme de radiations gravitationnelles scalaires est donné par des contributions d'ordre $\mathcal{O}_{(mo,qua)}^\varphi(\xi/c^5)$. Pour des sources non compactes, l'impact de la composante scalaire sur la perte d'énergie est donc d'ordre $\mathcal{O}(\xi/c^5)$. Leur contribution relative par rapport au taux d'émission donné par la Relativité Générale ($\mathcal{O}(1/c^5)$) est extrêmement ténue, compte tenu des contraintes obtenues en champ faible sur le couplage scalaire. Il semble donc, au premier abord, que la structure radiative de la théorie ne constitue pas un domaine d'étude privilégié, où l'effet du couplage scalaire serait davantage mis en valeur que dans les phénomènes post-newtoniens du premier ordre.

Toutefois, si nous considérons des sources compactes, une structure de champ fort intervient explicitement et introduit des effets importants. Dans ce contexte, l'équation d'onde pour le champ scalaire est donnée à partir de l'équation généralisée (1.135) :

$$\square\varphi = \frac{1}{2}\xi\kappa\sqrt{-g} \left(T - 2\Phi \frac{\partial T}{\partial \Phi} \right). \quad (2.52)$$

D'une part, l'apparition d'un terme source supplémentaire induit des modifications mineures du taux d'émission scalaire dans ses composantes monopolaires et quadrupolaires. L'annexe A établit la perte d'énergie associée à ces radiations monopolaires (scalaires) et quadrupolaires (scalaires et tensorielles), en fonction de la compacité des sources s_1 et s_2 . Les équations (A.28) à (A.31) donnent

$$\left\langle -\frac{dE_{(mo,qua)}^{(\theta,\varphi)}}{dt} \right\rangle_K = \frac{8}{15} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} \frac{G_{12}}{G} \left[12\kappa_1^{(\theta,\varphi)} f_1(e) - 11\kappa_2^{(\theta,\varphi)} f_2(e) \right]. \quad (2.53)$$

Les fonctions $f_1(e)$ et $f_2(e)$ sont des facteurs de majoration dépendant de l'excentricité de l'orbite. $\kappa_1^{(\theta,\varphi)}$ et $\kappa_2^{(\theta,\varphi)}$ sont des constantes égales à l'unité en Relativité Générale et dont la valeur anormale est induite par les contributions scalaires. Mais d'autre part, à ces termes standard se superposent des radiations scalaires dipolaires, purement proportionnelles aux énergies de liaison internes des sources. Ces contributions d'ordre $\mathcal{O}_{(di)}^\varphi(\xi/c^3)$ dominent largement la structure radiative jusqu'ici définie par les contributions $\mathcal{O}_{(qua)}^\theta(1/c^5)$, $\mathcal{O}_{(qua)}^\theta(\xi/c^5)$ et $\mathcal{O}_{(mo,qua)}^\varphi(\xi/c^5)$:

$$\left\langle -\frac{dE_{(di)}^\varphi}{dt} \right\rangle_K = \frac{2}{3}\xi \frac{G^3}{c^3} \frac{\mu^2 M^2}{a^4} \left[\frac{G_{12}^2}{G^2} (s_1 - s_2)^2 g(e) \right], \quad (2.54)$$

où $g(e) = (1 + e^2/2)/(1 - e^2)^{5/2}$ est le facteur de majoration associé. Ce résultat suggère *a priori* que l'étude de la décroissance orbitale de systèmes binaires devrait permettre d'obtenir

des contraintes nouvelles sur le couplage scalaire des théories de Brans-Dicke. Les relations (A.31) et (A.32) donnent l'expression réduite complète de la perte d'énergie sous forme de radiations gravitationnelles ainsi que le taux de décroissance orbitale associé.

Le pulsar de Hulse et Taylor

Nous reprenons ici l'analyse du PSR B1913+16, dans le cadre des théories scalaire-tenseur. Les paramètres képlériens tels que la période orbitale $T = 2\pi/n$, l'excentricité e et la projection du demi-grand axe $a_p \sin i$ étant déterminés indépendamment de la théorie de la gravitation sur base de la courbe des vitesses radiales, leur valeur n'est pas remise en question. Les paramètres relativistes $\dot{\omega}$, γ et \dot{T} peuvent ainsi être considérés comme des fonctions des masses m_p et m_c seules, et le test expérimental de la théorie se résume au problème de la coïncidence des courbes définies par l'identification de leur expression théorique à leur mesure expérimentale dans le plan $m_p - m_c$:

$$\dot{\omega}_{(th)}(m_p - m_c) = \dot{\omega}_{(obs)} \quad (2.55)$$

$$\gamma_{(th)}(m_p - m_c) = \gamma_{(obs)} \quad (2.56)$$

$$\dot{T}_{(th)}(m_p - m_c) = \dot{T}_{(obs)}. \quad (2.57)$$

Les valeurs théoriques pour la précession du périastre $\dot{\omega}_{(th)}$ ($\mathcal{O}(1/c^2)$), le paramètre $\gamma_{(th)}$ ($\mathcal{O}(1/c^2)$) aussi bien que la décroissance orbitale $\dot{T}_{(th)}$ ($\mathcal{O}(1/c^5)$) sont modifiées par l'existence d'un couplage scalaire. Outre les radiations dipolaires, nous avons vu que les corrections au taux d'émission d'ondes, et donc à la période orbitale, sont d'ordres $\mathcal{O}(\xi/c^5)$ et $\mathcal{O}(\xi s/c^5)$. D'une part, une correction $\mathcal{O}(\xi/c^2)$ à la précession provient de la valeur de la combinaison des paramètres post-newtoniens définie par la relation (1.96). D'autre part, la violation du Principe d'Equivalence Fort induit des corrections $\mathcal{O}(\xi s/c^2)$ à la précession ainsi qu'au paramètre γ . Par ailleurs, la fréquence intrinsèque de rotation du pulsar se trouve modifiée par la variation locale de la constante de gravitation, dans le champ du compagnon (voir (1.139)). Il en résulte¹⁵ une contribution supplémentaire $\mathcal{O}(\xi s_r/c^2)$ au paramètre γ , où s_r est un paramètre inférieur à l'unité déterminant la réponse du moment d'inertie du pulsar à une variation locale de la constante de gravitation. Notons encore que la contribution galactique $\dot{T}_{(gal)}$ à la décroissance orbitale apparente est modifiée par le fait qu'une étoile à neutrons subit une accélération anormale dans le champ de la Galaxie, due à l'effet Nordtvedt. Le couplage scalaire étant contraint à des valeurs de l'ordre de $\xi \leq 3 \times 10^{-4}$ par les résultats de déflection de la lumière, et la sensibilité d'une étoile à neutrons étant de l'ordre de $s_{(ns)} \simeq 0.2$, toutes ces contributions sont largement inférieures aux barres d'erreur expérimentales pour la mesure de la décroissance orbitale (3.5×10^{-3}).

La seule contribution anormale au test $\dot{\omega} - \gamma - \dot{T}$ provient du terme additionnel à la décroissance orbitale, dû aux radiations scalaires dipolaires. Nous pouvons donc considérer que les masses du système (définies par les mesures de $\dot{\omega}$ et γ) sont celles déterminées par

¹⁵Par conservation du moment angulaire de rotation de l'étoile à neutrons, la variation relative de la fréquence de rotation est donnée (tenant compte de la compacité du compagnon) comme

$$\frac{d\nu_p}{\nu_p} = -\frac{dI}{I} = -s_r \xi (1 - 2s) \frac{Gm_c}{rc^2},$$

où I est le moment d'inertie du pulsar par rapport à son axe de rotation propre et $s_r = -(d \ln I / d \ln G)_{|\Phi_0}$ détermine la réponse de ce moment d'inertie à une variation locale de la constante de gravitation.

la Relativité Générale. Des expressions (A.31) et (A.32), et dans cette limite où seule la contribution dipolaire s'ajoute à la valeur prédite par la Relativité Générale, nous déduisons l'expression suivante pour la décroissance orbitale du système :

$$\dot{T}_{(bd)} \simeq -\frac{192\pi}{5} \frac{\mu}{M} \left(\frac{GMn}{c^3} \right)^{5/3} f(e) \left[1 + \frac{5}{48} \xi \frac{(s_p - s_c)^2}{\frac{GM}{ac^2}} \frac{g(e)}{f(e)} \right]. \quad (2.58)$$

Malheureusement, le caractère "symétrique" du système découvert par Hulse et Taylor provoque une suppression importante de la contribution dipolaire relative. La valeur approximative de la sensibilité d'une étoile à neutrons est de l'ordre de $s_{(ns)} \simeq 0.2$. La valeur exacte en fonction de la masse de l'étoile dépend de l'équation d'état considérée pour en définir la structure. Mais les deux étoiles ayant des masses presque identiques ($1.4 M_\odot$), les différents modèles s'accordent pour donner une différence de sensibilités extrêmement petite [WZ89] :

$$(s_p - s_c)^2 \simeq 10^{-6}. \quad (2.59)$$

Le potentiel moyen dans le système étant donné par $GM/ac^2 \simeq 2 \times 10^{-6}$, la contribution relative des radiations scalaires dipolaires dans la double étoile à neutrons est par conséquent au moins aussi insignifiante que les autres contributions scalaires. La prédiction des théories de Brans-Dicke pour la décroissance orbitale du PSR B1913 + 16 s'identifie donc elle aussi essentiellement à celle de la Relativité Générale. Notons que le cas du PSR B1534 + 12 est encore plus désespéré : les valeurs établies pour les masses du système étant identiques, les sensibilités des deux étoiles à neutrons sont égales. La symétrie parfaite du système (dans la limite des incertitudes expérimentales) conduit ainsi à une prédiction pour un taux d'émission de radiations dipolaires identiquement nul. Nous ne pouvons donc espérer aucune contrainte nouvelle sur le couplage scalaire à partir des mesures actuelles (voir encore [DEF96b]). Dans cette perspective, l'analyse de systèmes binaires constitués d'étoiles de sensibilités suffisamment différentes serait nécessaire.

2.4 Dipole et Principe Fort

Avant de conclure, nous voudrions mettre en évidence une relation générique entre le Principe d'Equivalence Fort et les radiations dipolaires.

D'une part, la structure de l'interaction gravitationnelle dans les théories métriques repose sur le postulat fondamental du Principe d'Equivalence (outre le principe de Relativité Générale), fortement suggéré par l'expérience depuis Newton. La Relativité Générale se distingue des autres théories par le fait que la métrique de l'espace-temps y est l'unique champ définissant la gravitation. L'absence de champs auxiliaires confère une structure particulière à la théorie d'Einstein, qui inclut le Principe d'Equivalence sous sa version la plus forte.

D'autre part, au sein des théories de Brans-Dicke, nous venons d'exhiber des effets scalaires importants dans la structure radiative en champ fort de la théorie, associés à l'existence de radiations scalaires dipolaires. Il s'agit en fait d'un phénomène générique, lié à la violation du Principe d'Equivalence Fort, et indépendant de la nature du champ auxiliaire participant à l'interaction gravitationnelle. En effet, la violation du Principe d'Equivalence Fort implique une masse variable, dépendant du point de l'espace-temps à travers la valeur asymptotique locale des champs auxiliaires de gravitation, $m = m(\phi)$. Pour un corps libre de toute autre interaction que la gravitation, la théorie peut se développer comme

$$S_{mat} = -c \int m(\phi) ds \simeq -c \int [m + (ms) \phi] ds, \quad (2.60)$$

où $s = (d \ln m / d\phi)_{,0}$ est la sensibilité du corps aux champs de gravitation auxiliaires. A travers ms , une nouvelle charge de gravitation est donc identifiée, au-delà de la masse m elle-même. Cette charge conservée est inéluctablement source de radiations dipolaires, à l'instar de la charge électrique en électromagnétisme. Remarquons que ces radiations dipolaires sont identifiées dans la théorie linéarisée, au même titre que les contributions quadrupolaires tensorielles.

En conclusion, l'existence de radiations dipolaires dominantes n'est nullement spécifique aux théories de Brans-Dicke. Elle est associée à la violation du Principe d'Equivalence Fort à travers la présence d'une charge de gravitation auxiliaire. Au chapitre 5, nous généralisons encore cette relation, et proposons des contraintes expérimentales importantes sur les charges gravitationnelles auxiliaires (notamment sur le couplage scalaire) en termes de l'analyse de la décroissance orbitale de différents systèmes binaires.

Conclusion

En conclusion, les pulsars binaires PSR B1913 + 16 et PSR B1534 + 12 restent aujourd'hui encore les seuls laboratoires nous donnant une évidence indirecte de l'existence des ondes de gravitation. Cependant, encore une fois, si l'accord avec les prédictions de la Relativité Générale dans ce test de la structure radiative de l'interaction gravitationnelle est impressionnant (0.35% pour le pulsar de Hulse et Taylor), il n'exclut en rien le concours éventuel d'une composante scalaire de gravitation, avec un couplage tel qu'il est donné par les contraintes dans notre système solaire. En effet, en termes de l'émission de radiations gravitationnelles dans des systèmes de corps compacts, les prédictions des théories de Brans-Dicke s'écartent de façon notable de celles de la Relativité Générale, les radiations dipolaires scalaires étant *a priori* largement dominantes. L'analyse expérimentale de ces laboratoires idéaux que constituent les systèmes d'étoiles binaires devrait donc nous permettre d'établir des contraintes sur la composante scalaire de gravitation. Malheureusement, dans le cas précis des deux pulsars étudiés, les masses presque identiques des deux étoiles à neutrons conspirent accidentellement pour supprimer cette émission dipolaire, et aucune contrainte nouvelle ne peut être définie sur le couplage scalaire.

A travers les théories de Brans-Dicke, nous avons considéré jusque-là une première alternative majeure à la Relativité Générale, dans l'idée de l'introduction de *champs de gravitation auxiliaires* en quatre dimensions. Les deux chapitres qui suivent sont consacrés à la discussion du concept de *dimension supérieure*.

Chapitre 3

Dimensions supérieures larges

¹En 1921, T. Kaluza introduit pour la première fois le concept de dimension supplémentaire de l'espace-temps dans sa tentative d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. Aujourd'hui, cette notion est essentielle à la cohérence des théories quantiques relativistes qui unifient les interactions fondamentales (Supergravité et théories de Cordes). En particulier, dans les modèles que nous considérons, seule la gravitation se propage dans les dimensions supplémentaires. Cette idée est naturelle dans le cadre des théories de Cordes, dans lesquelles la notion de membrane est introduite comme un objet où s'attachent les extrémités des cordes ouvertes, dont la phénoménologie effective à basse énergie doit donner notre Modèle Standard. Seules les cordes fermées, dont les excitations à basse énergie s'identifient aux médiateurs de l'interaction gravitationnelle, sont *a priori* libres de se propager dans toutes les dimensions. Par ailleurs, dans notre conception classique, la gravitation est de nature géométrique. L'interaction gravitationnelle est par conséquent inévitablement liée à la structure globale de l'espace-temps, et non confinée à une partie de celui-ci.

Le présent chapitre est consacré à l'analyse des modèles *ADD*, proposés en 1998 par N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et G. Dvali en réponse au problème hiérarchique dans le Modèle Standard. L'espace y est défini comme simple produit direct de l'espace quadridimensionnel habituel avec un espace de dimensions supplémentaires compactifiées larges, où seule la gravitation se propage. L'échelle fondamentale de la théorie est définie par l'échelle électrofaible. Nous établissons d'abord la théorie effective associée en quatre dimensions afin de comprendre comment la présence de ces dimensions supplémentaires affecte la structure de l'interaction gravitationnelle avec la matière (sections 3.1 à 3.3). Nous étudions ensuite la phénoménologie et les contraintes expérimentales (sections 3.4 et 3.5).

3.1 Hiérarchie des couplages

Avant d'aborder précisément ces théories, il nous paraît important d'exposer en quelques mots l'origine de leur introduction, à savoir le problème de la hiérarchie des couplages dans le Modèle Standard de la physique des particules [PS95]. L'échelle de masse fondamentale pour la gravitation est donnée par la masse de Planck² :

$$M_{Pl} \equiv G^{-1/2} \simeq 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}, \quad (3.1)$$

¹ $\hbar = c = 1$.

²Pour être plus précis, le couplage gravitationnel exact $(4\pi G)^{1/2}$ est associé à une masse de Planck réduite : $\bar{M}_{Pl} = (4\pi)^{-1/2} M_{Pl}$.

où G est la constante de Newton expérimentale. Les couplages électrofaibles sont communément définis par l'échelle de masse des bosons de jauge W^\pm et Z_0 , médiateurs de l'interaction faible. Plus fondamentalement, toutes les masses du Modèle Standard sont induites par la brisure spontanée de la symétrie électrofaible, à travers l'introduction d'une valeur dans le vide v pour le champ scalaire fondamental de Higgs. Cette valeur définit l'échelle de masse de la théorie :

$$M_{ew} \equiv v = 2^{-1/4} G_F^{-1/2} \simeq 246 \text{ GeV}, \quad (3.2)$$

où G_F , la constante de Fermi, est la constante de couplage effective pour les interactions faibles. Cependant, les corrections radiatives δm à une masse scalaire divergent quadratiquement dans la masse introduite pour régulariser la théorie. L'unique échelle à laquelle ces divergences peuvent être régularisées, dans le Modèle Standard, est la masse de Planck. Afin de protéger la masse du Higgs et par là, l'échelle électrofaible (M_{ew}), un ajustement fin et peu naturel des masses nues (m_0) par rapport aux corrections radiatives est nécessaire :

$$m_{|\mathcal{O}(TeV^2)}^2 = m_{0|\mathcal{O}(M_{Pl}^2)}^2 + \delta m_{|\mathcal{O}(M_{Pl}^2)}^2. \quad (3.3)$$

Ce problème de hiérarchie est une pierre d'achoppement majeure au sein de notre Modèle Standard. L'introduction de la Supersymétrie est une réponse possible au problème, qui préserve le caractère fondamental de la masse de Planck. L'existence de dimensions supplémentaires offre en fait une alternative sérieuse reposant sur la constatation suivante. Alors que les interactions électrofaibles ont été étudiées à l'échelle M_{ew} , les forces de gravitation n'ont été sondées que depuis des échelles de l'ordre des distances définies dans le système solaire, jusqu'à des distances légèrement inférieures au millimètre. Considérer que la masse de Planck soit l'échelle de masse fondamentale revient à supposer que la gravitation n'est pas modifiée sur 32 ordres de grandeur, depuis le millimètre jusqu'à la distance de Planck (10^{-35} mètres). Ce qui n'est pas nécessairement naturel. L'échelle de masse fondamentale pourrait être très différente de la masse de Planck. Les modèles introduits dans ce chapitre proposent une échelle de l'ordre de l'échelle électrofaible, éliminant par définition la hiérarchie des constantes de couplages.

3.2 Modèles ADD

Ces modèles ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali [ADD98]) introduits en 1998 sont caractérisés par une interaction gravitationnelle définie au-delà des quatre dimensions habituelles, dans δ dimensions supplémentaires de notre espace-temps. L'action correspondante s'écrit

$$S^{(4+\delta)} = -\frac{1}{4} M_{(4+\delta)}^{2+\delta} \int d^4x \int d^\delta y \sqrt{|\hat{g}|} \hat{R} + S_{mat}, \quad (3.4)$$

où le secteur gravitationnel est donné par l'action d'Einstein-Hilbert en $4 + \delta$ dimensions (les coordonnées x^μ identifient les dimensions habituelles et y^m les dimensions supplémentaires³). \hat{g} est le déterminant de la métrique \hat{g}_{MN} . \hat{R} est le scalaire de courbure correspondant. $M_{(4+\delta)}$ définit l'échelle de masse fondamentale de la théorie. En l'absence de gravitation, la structure de l'espace-temps est définie par la métrique de Minkowski en $4 + \delta$ dimensions (η_{MN}), qui

³Nous nous tenons aux conventions d'indices suivantes : les indices majuscules courent sur toutes les dimensions ($0 \leq M, N \dots \leq 3 + \delta$), les indices grecs identifient toujours les quatre dimensions d'espace-temps habituelles ($0 \leq \mu, \nu \dots \leq 3$), les indices latins "ij" courent sur les trois dimensions spatiales usuelles ($1 \leq i, j \dots \leq 3$), alors que les indices latins "mn" tiennent pour les dimensions supplémentaires seulement ($4 \leq m, n \dots \leq 3 + \delta$).

préserve notamment l'invariance sous les transformations de Poincaré en quatre dimensions. Dans ce cadre, l'espace-temps apparaît donc comme simple produit direct de notre espace-temps quadridimensionnel habituel sans courbure avec un espace δ -dimensionnel plat. Par ailleurs, il semble évident que les dimensions supplémentaires ne peuvent être infinies, puisqu'elles restent jusqu'ici inaccessibles à l'expérience. Nous sommes par conséquent amenés à compactifier l'espace extradimensionnel. Par souci de simplicité, la compactification est faite sur un tore de volume V_δ dont nous considérons tous les rayons égaux ($R_i = R$). Dans les limites expérimentales actuelles, c'est-à-dire à des échelles d'énergies (de distances) inférieures (supérieures) à 100 GeV ($2 \times 10^{-18} \text{ m}$), le Modèle Standard est confiné dans nos quatre dimensions habituelles d'espace-temps. Si nous voulons introduire la matière ordinaire dans une dimension supplémentaire, il est donc indispensable de considérer cette dimension comme compactifiée sur une échelle de distance encore extrêmement petite afin de ne pas modifier la phénoménologie en deçà de 100 GeV :

$$R < 2 \times 10^{-18} \text{ m} . \quad (3.5)$$

Les modèles étudiés admettent que seule la gravitation se propage dans toutes les dimensions, se libérant ainsi de cette contrainte importante. La matière est confinée sur une 3-membrane (localisée en $y^m = 0$), dont les dimensions correspondent à celles de notre espace-temps habituel :

$$S_{mat} = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \mathcal{L}_{mat}(\Psi, \hat{g}_{\mu\nu}) . \quad (3.6)$$

Le symbole Ψ définit les champs de matière, dont le couplage à la gravitation est donné par la partie de la métrique de l'espace-temps induite sur la membrane $\hat{g}_{\mu\nu}(x^\mu) \equiv \hat{g}_{\mu\nu}(x^\mu, y^m = 0)$. Dans cette action, \hat{g} identifie le déterminant de cette métrique en quatre dimensions.

L'introduction de dimensions supplémentaires larges est primordiale dans l'idée d'une résolution du problème hiérarchique. Comme nous l'établissons dans la section suivante, les échelles de masse de la théorie fondamentale ($M_{(4+\delta)}$) et de la théorie effective en quatre dimensions (\bar{M}_{Pl}) sont liées par la relation suivante :

$$\bar{M}_{Pl}^2 = M_{(4+\delta)}^{2+\delta} V_\delta . \quad (3.7)$$

La masse de Planck est une échelle dérivée. La dilution de l'interaction dans le volume des dimensions supplémentaires justifie naturellement un couplage gravitationnel faible en quatre dimensions. Le développement complet montre que les conséquences phénoménologiques de l'existence de dimensions supplémentaires (sections 3.4 et 3.5) sont davantage liées au rayon de compactification (R) qu'à la longueur même de la dimension compactifiée ($L = 2\pi R$). Aussi, $M_{(4+\delta)}$ est redéfinie en termes d'une masse fondamentale réduite $\bar{M}_{(4+\delta)} \equiv (2\pi)^{\delta/(2+\delta)} M_{(4+\delta)}$, qui évalue plus précisément l'échelle de masse de la théorie, et la relation (3.7) se réécrit

$$\bar{M}_{Pl}^2 = \bar{M}_{(4+\delta)}^{2+\delta} R^\delta . \quad (3.8)$$

La masse fondamentale définit *a priori* l'échelle à partir de laquelle des effets quantiques forts sont attendus. Dans le souci de répondre au problème hiérarchique, sans toutefois introduire de modification profonde de la phénoménologie aux énergies accessibles à l'expérience en laboratoire aujourd'hui ($\leq 100 \text{ GeV}$), l'échelle fondamentale réduite peut essentiellement être identifiée à l'échelle des interactions électrofaibles (M_{ew}). Si nous fixons cette valeur à

$$\bar{M}_{(4+\delta)} \simeq 1 \text{ TeV} , \quad (3.9)$$

le rayon de compactification des dimensions supplémentaires est donné en fonction du nombre de dimensions supplémentaires par

$$R_{(4+\delta)} = \left(\frac{\bar{M}_{Pl}}{\bar{M}_{(4+\delta)}} \right)^{2/\delta} \frac{\hbar c}{\bar{M}_{(4+\delta)} c^2} \quad (3.10)$$

$$\simeq 10^{31/\delta} \frac{\hbar c}{TeV} \quad (3.11)$$

$$\simeq 2 \times 10^{(31/\delta - 19)} m, \quad (3.12)$$

ce qui nous permet d'imaginer l'existence de dimensions de taille macroscopique, plutôt que réduites à l'échelle de Planck ou à l'échelle électrofaible elle-même. Notons déjà que dans le cas $\delta = 1$, la dimension supplémentaire serait de l'ordre de l'échelle des distances dans le système solaire. La loi de Newton en $1/r^2$ étant en fait modifiée en-deçà du rayon de compactification (section 3.4), la présence d'une dimension supplémentaire unique serait en contradiction flagrante avec notre expérience de la gravitation classique sur Terre aussi bien que dans le système solaire. Pour $\delta \geq 2$, le rayon de compactification est réduit en-deçà du millimètre. Avant de discuter précisément la phénoménologie et les contraintes expérimentales associées à ces modèles, nous établissons la théorie effective en quatre dimensions.

3.3 Théorie effective

Nous développons dans cette section l'action effective associée à la théorie linéarisée [HLZ99, GRW99], suffisante pour établir les caractéristiques majeures des modèles considérés, à des énergies inférieures à l'échelle de masse fondamentale. En présence de gravitation, $\hat{h}_{MN}(x, y)$ définit la perturbation de la métrique autour de l'espace de Minkowski,

$$\hat{g}_{MN}(x, y) = \eta_{MN} + \hat{h}_{MN}(x, y). \quad (3.13)$$

L'action à l'ordre 2 pour les champs de gravitation $\hat{h}_{MN}(x, y)$ et leur interaction linéaire avec la matière est donnée par

$$S_{(4+\delta)}^{(2)} = \frac{1}{4} M_{(4+\delta)}^{2+\delta} \int d^{(4+\delta)}x \left(\frac{1}{4} \partial_M \hat{h}^{AB} \partial^M \hat{h}_{AB} - \frac{1}{4} \partial_M \hat{h} \partial^M \hat{h} + \frac{1}{2} \partial^M \hat{h} \partial^N \hat{h}_{MN} - \frac{1}{2} \partial_N \hat{h}^{MN} \partial^R \hat{h}_{MR} \right) - \frac{1}{2} \int d^4x \left(\hat{h}^{\mu\nu}(x, 0) T_{\mu\nu} \right), \quad (3.14)$$

analogue en $4 + \delta$ dimensions du développement (1.151) pour la Relativité Générale. $T_{\mu\nu}$ est toujours le tenseur énergie-moment pour les champs de matière sur la 3-membrane (calculé sur l'espace de Minkowski). Afin de voir plus clairement le contenu en champs de la théorie effective, considérons un instant les équations de champs linéarisées. Sous les conditions de jauge harmonique habituelles, en $4 + \delta$ dimensions,

$$\partial^M \bar{\hat{h}}_{MN} = 0, \quad (3.15)$$

les équations dans le vide pour les perturbations \hat{h}_{MN} sont

$$\square_{(4+\delta)} \bar{\hat{h}}_{MN} = 0. \quad (3.16)$$

L'hypothèse de compactification sur le tore implique que chaque champ (réel) se décompose en modes⁴ $\hat{h}_{MN}^{(\vec{n})}(x)$ par simple décomposition de Fourier :

$$\hat{h}_{MN}(x, y) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \hat{h}_{MN}^{(\vec{n})}(x) e^{i(\frac{\vec{n}\cdot\vec{y}}{R})}. \quad (3.17)$$

Par conséquent, les équations pour les modes (en quatre dimensions) s'écrivent

$$(\square_{(4)} + m_n^2) \hat{h}_{MN} = 0, \quad (3.18)$$

avec

$$m_n = \frac{n}{R}, \quad (3.19)$$

où $n = |\vec{n}|$. Aussi, la théorie effective en quatre dimensions comprend aussi bien des modes de masse nulle ($\vec{n} = 0$) pour la médiation de l'interaction gravitationnelle, que des excitations massives ($\vec{n} \neq 0$), appelées modes de Kaluza-Klein, et dont la masse est quantifiée sur une échelle définie par le rayon de compactification. Cette analyse est cependant loin d'être complète. Nous ne savons effectivement pas à quels types de champs ces modes correspondent et nous n'avons pas étudié leur couplage à la matière. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de s'encombrer des équations du mouvement pour étudier la théorie en quatre dimensions. Formellement, celle-ci est définie par intégration de l'action (3.14) sur les dimensions supplémentaires cachées. Nous pouvons donc travailler directement à ce niveau.

Réduction de la métrique

Au premier ordre pour une transformation infinitésimale des coordonnées

$$x'^M = x^M + \varepsilon^M(x, y), \quad (3.20)$$

la perturbation $\hat{h}_{MN}(x, y)$ devient

$$\hat{h}'_{MN}(x, y) = \hat{h}_{MN}(x, y) - \varepsilon_{(M,N)}(x, y). \quad (3.21)$$

L'analyse de ces relations pour les modes nuls suggère que les composantes $\hat{h}_{\mu\nu}^{(\vec{n}=0)}(x)$ sont associées à un champ de spin 2 en quatre dimensions, que les δ champs $\hat{h}_{\mu n}^{(\vec{n}=0)}(x)$ sont des vecteurs en quatre dimensions (pour chaque n , $\varepsilon_n^{(\vec{n}=0)}(x)$ identifie le paramètre d'une transformation de jauge $U(1)$, interne du point de vue des quatre dimensions d'espace-temps habituelles), et que les $\delta(\delta + 1)/2$ champs $\hat{h}_{mn}^{(\vec{n}=0)}(x)$ sont des scalaires⁵ :

$$\hat{h}'_{\mu\nu}^{(\vec{n}=0)}(x) = \hat{h}_{\mu\nu}^{(\vec{n}=0)}(x) - \varepsilon_{(\mu,\nu)}^{(\vec{n}=0)}(x) \quad (3.22)$$

$$\hat{h}'_{\mu n}^{(\vec{n}=0)}(x) = \hat{h}_{\mu n}^{(\vec{n}=0)}(x) - \varepsilon_{n,\mu}^{(\vec{n}=0)}(x) \quad (3.23)$$

$$\hat{h}'_{mn}^{(\vec{n}=0)}(x) = \hat{h}_{mn}^{(\vec{n}=0)}(x). \quad (3.24)$$

⁴L'indice $\vec{n} = (n_4, \dots, n_{3+\delta})$ est un vecteur à composantes entières ($-\infty < n_i < +\infty$) dans l'espace extradimensionnel.

⁵La perturbation $\varepsilon^M(x, y)$ se décompose en modes de Fourier ($\varepsilon_M(x, y) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_M^{(\vec{n})}(x) e^{i(\vec{n}\cdot\vec{y}/R)}$) au même titre que les champs $\hat{h}_{MN}(x, y)$.

Un simple argument de comptage des degrés de liberté physiques corrobore encore cette répartition des composantes. Dans le cadre de la Relativité Générale, le nombre de degrés de liberté physiques associés au graviton est défini par un raisonnement simple basé sur l'invariance de jauge (voir chapitre 1) : $10 - (2 \times 4) = 2$. Par le même raisonnement en $4 + \delta$ dimensions, le nombre de degrés de liberté physiques contenus dans le champ métrique d'une théorie invariante sous transformation générale des coordonnées est donné par

$$\frac{(4 + \delta)(5 + \delta)}{2} - (2 \times (4 + \delta)) = \frac{(4 + \delta)(1 + \delta)}{2}. \quad (3.25)$$

A chaque niveau \vec{n} , la théorie effective est donc définie pour $(4 + \delta)(1 + \delta)/2$ composantes physiques. En particulier, pour les modes nuls, les transformations de jauge (3.22) à (3.24) proposent une décomposition en un graviton non massif (hélicité 2, deux composantes transverses et sans trace), δ (gravi-)vecteurs non massifs (hélicité 1, deux composantes transverses) et $\delta(\delta + 1)/2$ (gravi-)scalaires non massifs (hélicité 0, une composante), qui remplissent exactement le compte des degrés de liberté :

$$2 + (2 \times \delta) + \left(1 \times \frac{\delta(\delta + 1)}{2}\right) = \frac{(4 + \delta)(1 + \delta)}{2}. \quad (3.26)$$

Cette analyse justifie la décomposition suivante de la métrique :

$$\eta_{MN} + \hat{h}_{MN}(x, y) = \eta_{MN} + \begin{bmatrix} h_{\mu\nu}(x, y) + \alpha\eta_{\mu\nu}\varphi(x, y) & A_{\mu n}(x, y) \\ A_{m\nu}(x, y) & -2\alpha\varphi_{mn}(x, y) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

où $\varphi = \eta^{mn}\varphi_{mn}$ est la trace associée aux scalaires φ_{mn} dans les dimensions supplémentaires, et α une constante à déterminer. Par définition, la théorie effective associée en quatre dimensions résulte de l'intégration de l'action fondamentale sur le volume des dimensions compactifiées. Pour deux modes différents ($\vec{n} \neq \vec{m}$), l'intégration de $e^{i((\vec{n}-\vec{m})\cdot\vec{y}/R)}$ sur \vec{y} s'annule. Seuls les modes correspondant à la même valeur de \vec{n} vont coupler les uns aux autres :

$$\int_0^{2\pi R} d^\delta y = V_\delta. \quad (3.28)$$

Considérons dans un premier temps la théorie effective pour les modes de masse nulle (théorie effective à basse énergie). L'introduction de la décomposition (3.27) pour ces modes dans l'action originale donne

$$\begin{aligned} S_{(4+\delta)}^{(\vec{n}=0)} &= \frac{1}{4}M_{(4)}^2 \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4}\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial^\mu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{1}{2}\partial^\mu h\partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial^\rho h_{\mu\rho} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi) + \left(\frac{1}{4}F^{\mu\nu m}F_{\mu\nu m} + \alpha^2\partial_\mu\varphi_0^{mn}\partial^\mu\varphi_{0mn} \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x (h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + \alpha\varphi T), \end{aligned} \quad (3.29)$$

où nous avons omis l'indice " $\vec{n} = 0$ " identifiant les modes considérés. Les tenseurs $F^{\mu\nu m}$ sont les tenseurs de forces liés aux champs vectoriels : $F^{\mu\nu m} \equiv \partial^\mu A^{\nu m} - \partial^\nu A^{\mu m}$. Les scalaires φ_0^{mn} sont les parties sans trace des champs φ^{mn} : $\varphi_0^{mn} = \varphi^{mn} - (1/\delta)\eta^{mn}\varphi$. La diagonalisation des termes cinétiques pour $h_{\mu\nu}$ et φ n'est obtenue que moyennant la présence du terme de trace dans la partie 4×4 de la décomposition (3.27). La normalisation du terme cinétique pour

φ n'est obtenue que pour le choix $\alpha^2 = \delta/(\delta + 2)$. En vertu de l'équation (3.28), l'échelle de masse $M_{(4)}$ est définie par la relation $M_{(4)}^2 = M_{(4+\delta)}^{2+\delta} V_\delta$. Ce résultat donne la relation attendue (3.7) entre les échelles de masse fondamentale et effective, si $M_{(4)}$ est identifiée à la masse de Planck réduite \bar{M}_{Pl} (voir section 3.5). La normalisation canonique des termes cinétiques peut être obtenue en redéfinissant le développement de la métrique en perturbations (3.13) en fonction de la constante de couplage en quatre dimension $G_{(4)}$,

$$\hat{g}_{MN}(x, y) = \eta_{MN} + \sqrt{2\kappa_{(4)}} \hat{h}_{MN}(x, y), \quad (3.30)$$

avec

$$\frac{1}{2}\kappa_{(4)} = M_{(4)}^{-2} = 4\pi G_{(4)}. \quad (3.31)$$

Le confinement des champs de matière sur la 3-membrane réduit donc de façon importante l'interaction. Les champs scalaires ne couplent qu'à travers leur trace φ , alors que les champs vectoriels $A^{\mu m}$ sont tout à fait découplés. La théorie effective à basse énergie qui en résulte s'identifie à une théorie scalaire-tenseur de type Brans-Dicke avec un couplage scalaire fort :

$$S_{(4+\delta)}^{(\vec{n}=0)} = S_{(rg)}^{(2)}(h_{\mu\nu}, \kappa_{(4)}) + S_{(sc)}^{(2)}(\varphi, \alpha_{(4+\delta)}), \quad (3.32)$$

avec

$$\alpha_{(4+\delta)} = \sqrt{\frac{\delta}{\delta + 2}} \left(\omega_{(4+\delta)} = \frac{1 - \delta}{\delta} \right). \quad (3.33)$$

Le couplage scalaire évolue de sa valeur $\alpha_{(5)} = 1/\sqrt{3}$ ($\omega_{(5)} = 0$) pour une dimension supplémentaire unique ($\delta = 1$), vers un couplage unitaire $\alpha_{(4+\delta)} \rightarrow 1$ ($\omega \rightarrow -1$) pour un nombre infini de dimensions supplémentaires ($\delta \rightarrow \infty$).

Nous savons que les modes $\vec{n} \neq 0$ définissent des champs massifs. Cependant, leur identification et l'obtention de leur couplage à la matière sont fastidieuses et nécessitent une redéfinition complexe des modes à chaque niveau \vec{n} . Cette redéfinition [GRW99] fait apparaître, pour chaque mode \vec{n} , un état de spin 2 (cinq composantes), $\delta - 1$ états vectoriels (spin 1, trois composantes) et $\delta(\delta - 1)/2$ états scalaires (spin 0, une composante), comme le suggère le comptage des degrés de liberté⁶ :

$$5 + (3 \times (\delta - 1)) + \left(1 \times \frac{\delta(\delta - 1)}{2} \right) = \frac{(4 + \delta)(1 + \delta)}{2}. \quad (3.34)$$

En fait, à partir d'une hypothétique décomposition en champs non massifs au mode \vec{n} (voir (3.26)), un mécanisme de nature purement géométrique intervient, par lequel un champ vectoriel (2 composantes) et un champ scalaire (1 composante) sont absorbés par les composantes du tenseur de rang 2 (2 composantes), pour donner un graviton massif, et $\delta - 1$ autres champs scalaires sont absorbés dans les composantes longitudinales des $\delta - 1$ champs vectoriels restants. Mais, la matière étant confinée en quatre dimensions, certains de ces champs sont tout à fait découplés et ne participent pas à la phénoménologie. Dans la section suivante, nous décrivons une méthode originale beaucoup plus simple permettant d'identifier tous les couplages (massifs et non massifs) à partir de la "réduction du propagateur" de la théorie en $4 + \delta$ dimensions.

⁶En quatre dimensions, un champ massif de spin 1 peut être défini à partir d'un champ vectoriel A_μ sous la contrainte $\partial^\mu A_\mu = 0$, qui réduit le nombre de composantes physiques de quatre à trois, à travers l'élimination de la composante longitudinale scalaire. De façon analogue, un champ massif de spin 2 peut être défini à partir d'un tenseur symétrique $S_{\mu\nu}$, avec les conditions $\partial^\mu S_{\mu\nu} = 0$ et $S^\mu_\mu = 0$ supprimant les composantes vectorielles et scalaire. Toute particule de spin 2 massive comprend donc cinq degrés de liberté physiques parmi les dix composantes de base.

Réduction du propagateur

A l'inverse de la démarche précédente, nous étudions la structure et la propagation de la gravitation en $4 + \delta$ dimensions avant d'en étudier la décomposition en quatre dimensions. Dans ce cadre, l'interaction gravitationnelle est véhiculée par un seul état d'hélicité 2 non massif. Considérons le développement,

$$\hat{g}_{MN}(x, y) = \eta_{MN} + \sqrt{2\kappa_{(4+\delta)}} \hat{h}_{MN}(x, y), \quad (3.35)$$

pour un couplage défini par l'échelle électrofaible (soit $S_{(3+\delta)}$, l'aire de la surface de la sphère unité dans l'espace de dimension $3 + \delta$)⁷ :

$$\frac{1}{2}\kappa_{(4+\delta)} = M_{(4+\delta)}^{-(2+\delta)} = S_{(3+\delta)}G_{(4)}. \quad (3.36)$$

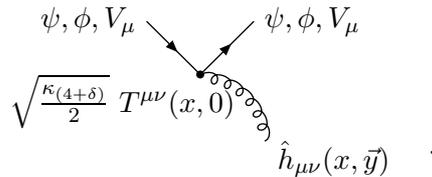
L'action originale (3.14) est ainsi normalisée de façon canonique :

$$S_{(4+\delta)}^{(2)} = \int d^{(4+\delta)}x \left[\frac{1}{4}\partial_M \hat{h}^{AB} \partial^M \hat{h}_{AB} - \frac{1}{4}\partial_M \hat{h} \partial^M \hat{h} + \frac{1}{2}\partial^M \hat{h} \partial^N \hat{h}_{MN} - \frac{1}{2}\partial_N \hat{h}^{MN} \partial^R \hat{h}_{MR} \right] - \sqrt{\frac{\kappa_{(4+\delta)}}{2}} \int d^4x \left(\hat{h}^{\mu\nu}(x, 0) T_{\mu\nu} \right). \quad (3.37)$$

Dans le formalisme défini au premier chapitre (section 1.6), la médiation de l'interaction est définie en termes du propagateur pour ce graviton unique. Dans l'espace des moments, si $q_{(4+\delta)}$ est le moment de transfert, la fonction de Green des équations du mouvement en $4 + \delta$ dimensions s'écrit

$$G^{MN,AB}(q_{(4+\delta)}) = \frac{\eta^{MA}\eta^{NB} + \eta^{MB}\eta^{NA} - \frac{2}{2+\delta}\eta^{MN}\eta^{AB}}{q_{(4+\delta)}^2 + i\varepsilon}. \quad (3.38)$$

Le terme d'interaction ($\sim \hat{h}^{\mu\nu}(x, 0)T_{\mu\nu}$) définit un vertex trilinéaire pour l'interaction entre le graviton en dimension supérieure et les champs de matière confinés sur la membrane :



A nouveau, nous pouvons définir une amplitude générale de diffusion pour l'étude de la théorie linéarisée. L'amplitude pour la diffusion de deux champs (de tenseurs énergie-moment $T_{\mu\nu}^{(1)}$ et $T_{\mu\nu}^{(2)}$) par le graviton prend la forme

$$\mathcal{M}_{(4+\delta)}(q_{(4+\delta)}) = \frac{1}{c^5} \mathcal{N} S_{(3+\delta)} \left[G_{(4+\delta)} T_{\mu\nu}^{(1)} G^{\mu\nu, \alpha\beta}(q_{(4+\delta)}) T_{\alpha\beta}^{(2)} \right], \quad (3.39)$$

où \mathcal{N} est le coefficient de normalisation standard (voir (1.156)).

⁷Comme nous le montrons dans la section suivante, cette définition est introduite afin de s'assurer que $G_{(4+\delta)}$ soit la constante de couplage exacte définissant la loi de Newton en $4 + \delta$ dimensions. Remarquons que dans le cas $\delta = 0$, nous retrouvons bien $S_{(3)} = 4\pi$ et $\kappa_{(4)} = 8\pi G_{(4)}$.

L'interaction en $4 + \delta$ dimensions est établie. Sa décomposition dans une théorie effective en quatre dimensions est donnée par le raisonnement suivant. L'équation (3.18) identifie la partie transverse du moment de transfert (c'est-à-dire les composantes en dimensions supplémentaires, \vec{q}_δ) à la masse d'un mode \vec{n} :

$$q_{(4+\delta)}^2 = q_{(4)}^2 - m_n^2, \quad (3.40)$$

avec $m_n = n/R$. La nature de ces modes et leurs couplages à la matière peuvent être établis grâce à la "réduction du propagateur" dans l'amplitude de diffusion définie ci-dessus. Pour un moment de transfert $q_{(4)}$ fixé, tous les modes de Kaluza-Klein pour les champs de gravitation participent à la propagation :

$$G^{MN,AB}(q_{(4)}, y^m - y'^m = 0) = \frac{1}{V_\delta} \sum_{\vec{n}} G^{MN,AB}(q_{(4)}, \vec{n}). \quad (3.41)$$

L'amplitude de diffusion générale prend donc la forme effective suivante en quatre dimensions :

$$\mathcal{M}_{(4+\delta)}(q_{(4)}) = \frac{1}{c^5} \mathcal{N} S_{(3+\delta)} \left[\frac{1}{V_\delta} \sum_{\vec{n}} G_{(4+\delta)} T_{\mu\nu}^{(1)} G^{\mu\nu,\alpha\beta}(q_{(4)}, \vec{n}) T_{\alpha\beta}^{(2)} \right] \quad (3.42)$$

$$= \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[\sum_{\vec{n}} G_{(4)} T_{\mu\nu}^{(1)} G^{\mu\nu,\alpha\beta}(q_{(4)}, \vec{n}) T_{\alpha\beta}^{(2)} \right]. \quad (3.43)$$

La relation entre les constantes de couplages

$$G_{(4)} = \frac{S_{(3+\delta)}}{4\pi V_\delta} G_{(4+\delta)}, \quad (3.44)$$

est posée pour obtenir le couplage standard d'interaction en quatre dimensions. Elle n'est qu'une expression équivalente de l'équation (3.7). L'amplitude totale se décompose donc en

$$\mathcal{M}_{(4+\delta)}(q_{(4)}) = \mathcal{M}_{0(4+\delta)} + \sum_{\vec{n} \neq 0} \mathcal{M}_{n(4+\delta)}, \quad (3.45)$$

où $\mathcal{M}_{0(4+\delta)}$ et $\mathcal{M}_{n(4+\delta)}$ sont associées à l'interaction par la propagation de médiateurs non massifs et massifs, respectivement.

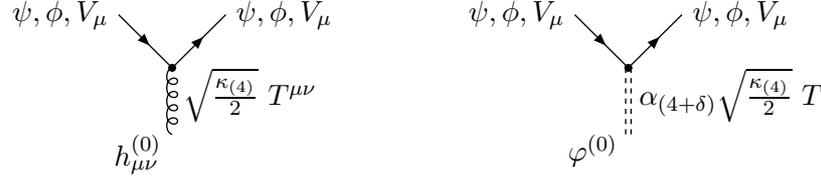
L'amplitude à basse énergie $\mathcal{M}_{0(4+\delta)}$ peut encore se développer comme

$$\mathcal{M}_{0(4+\delta)} = \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[G_{(4)} T_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \frac{2}{2+\delta} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}}{q_{(4)}^2 + i\varepsilon} T_{\alpha\beta}^{(2)} \right] \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[G_{(4)} T_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}}{q_{(4)}^2 + i\varepsilon} T_{\alpha\beta}^{(2)} \right. \\ \left. + \frac{\delta}{\delta + 2} G_{(4)} T_{\mu\nu}^{(1)} \frac{1}{q_{(4)}^2 + i\varepsilon} T_{\alpha\beta}^{(2)} \right]. \quad (3.47)$$

L'action effective correspondante en quatre dimensions définit la théorie scalaire-tenseur de gravitation avec un couplage scalaire fort, identifiée dans la section précédente (voir (3.32)).

Nous obtenons donc deux vertex pour l'interaction gravitationnelle à basse énergie



En ces termes par contre, l'identification des couplages massifs est immédiate (notons que la structure tensorielle d'un champ de spin 2 massif est légèrement différente du cas non massif⁸). Pour chaque \vec{n} , nous pouvons développer $\mathcal{M}_{n(4+\delta)}$ comme

$$\mathcal{M}_{n(4+\delta)} = \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[G_{(4)} T_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \frac{2}{2+\delta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{q_{(4)}^2 - m_n^2 + i\varepsilon} T_{\alpha\beta}^{(2)} \right] \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[G_{(4)} T_{\mu\nu}^{(1)} \frac{\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \frac{2}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}}{q_{(4)}^2 - m_n^2 + i\varepsilon} T_{\alpha\beta}^{(2)} \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{\delta - 1}{\delta + 2} G_{(4)} T^{(1)} \frac{1}{q_{(4)}^2 - m_n^2 + i\varepsilon} T^{(2)} \right]. \quad (3.49)$$

La théorie effective correspondante comprend donc, à chaque mode \vec{n} , un graviton et un scalaire massifs. L'interaction correspondante peut être définie à partir de l'action pour des champs réels $h^{\mu\nu(\vec{n})}$ et $\varphi^{(\vec{n})}$:

$$S_{(4+\delta)}^{(\vec{n} \neq 0)} = \sum_{\vec{n} \neq 0} \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta(\vec{n})} \partial^\mu h_{\alpha\beta}^{(\vec{n})} - \frac{1}{4} \partial_\mu h^{(\vec{n})} \partial^\mu h^{(\vec{n})} + \frac{1}{2} \partial^\mu h^{(\vec{n})} \partial_\nu h_{\mu\nu}^{(\vec{n})} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu(\vec{n})} \partial^\rho h_{\mu\rho}^{(\vec{n})} + \frac{1}{4} m_n^2 h^{(\vec{n})} h^{(\vec{n})} - \frac{1}{4} m_n^2 h^{\alpha\beta(\vec{n})} h_{\alpha\beta}^{(\vec{n})} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^{(\vec{n})} \partial^\mu \varphi^{(\vec{n})} - \frac{1}{2} m_n^2 \varphi^{(\vec{n})} \varphi^{(\vec{n})} \right) \right] \\ \sum_{\vec{n} \neq 0} -\sqrt{\frac{\kappa(4)}{2}} \int d^4x \left(h^{\mu\nu(\vec{n})} T_{\mu\nu} + \beta_{(4+\delta)} \varphi^{(\vec{n})} T \right). \quad (3.50)$$

La constante $\beta_{(4+\delta)}^2 = (2/3)[(\delta - 1)/(\delta + 2)]$ définit le couplage relatif du mode scalaire au mode tensoriel. En conclusion, dans un espace-temps comptant au moins deux dimensions

⁸Un calcul direct à partir de l'action pour un champ massif de spin 2 en quatre dimensions,

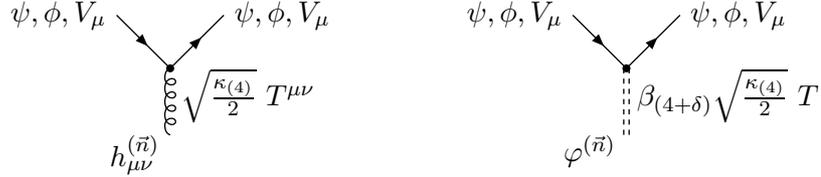
$$S = \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial^\rho h_{\mu\rho} \right) + \left(\frac{1}{4} m^2 h^2 - \frac{1}{4} m^2 h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \right) \right],$$

donne la structure suivante pour le propagateur correspondant :

$$G^{\mu\nu,\alpha\beta}(q) = \left(\frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \left[\left(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \frac{2}{3}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \right) + \left(\frac{2}{3} \frac{q^\mu q^\nu}{m^2} \eta^{\alpha\beta} + \frac{2}{3} \frac{q^\alpha q^\beta}{m^2} \eta^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\alpha}{m^2} \eta^{\nu\beta} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q^\nu q^\alpha}{m^2} \eta^{\mu\beta} - \frac{q^\mu q^\beta}{m^2} \eta^{\nu\alpha} - \frac{q^\nu q^\beta}{m^2} \eta^{\mu\alpha} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta}{m^4} \right) \right],$$

où les termes $\mathcal{O}(q^\mu q^\nu, \dots)$ ne contribuent pas à l'interaction avec la matière, par conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement : $q_\mu T^{\mu\nu}(q) = 0$.

supplémentaires ($\delta \geq 2$) compactes, des $(4 + \delta)(1 + \delta)/2$ degrés physiques disponibles à chaque mode \vec{n} , 6 couplent à la matière confinée en quatre dimensions, à travers un graviton de spin 2 (cinq composantes) et un scalaire (une composante). Dans le cas d'une dimension supplémentaire unique ($\delta = 1$), seul un graviton de spin 2 subsiste à chaque mode. Le couplage scalaire est par ailleurs interdit par simple comptage des degrés de liberté : $(4 + \delta)(1 + \delta)/2 = 5$. Les vertex associés aux excitations massives se résument donc à



Notons que cette procédure de réduction du propagateur évite, dans l'analyse des modes nuls autant que pour les modes massifs, la prise en compte de champs scalaires et vectoriels qui se propagent sans interaction avec la matière et ne participent donc pas à la phénoménologie. Dans la section suivante, nous utilisons à nouveau les amplitudes de diffusion (et la réduction du propagateur) pour comprendre la structure de l'interaction classique à travers le potentiel associé, comme nous l'avons fait au chapitre 1 pour la Relativité Générale et les théories de Brans-Dicke.

3.4 Potentiel d'interaction

Cette section établit la structure du potentiel d'interaction à toutes les échelles d'énergies, au sein de ces théories où seule la gravitation peut se propager dans les dimensions supplémentaires [ADD99, KS00]. Dans un premier temps, ce potentiel est établi à partir de la théorie originale en dimension supérieure, où la gravitation est définie par un unique graviton non massif. Nous obtenons ensuite ce même résultat dans le cadre de la théorie effective au sein de laquelle une tour infinie d'excitations de Kaluza-Klein participent à une interaction purement quadridimensionnelle.

Théorie originale

La transformée de Fourier du potentiel classique d'interaction en $4 + \delta$ dimensions est donnée par l'amplitude (3.39) pour la diffusion de deux champs ψ_1 et ψ_2 , dans la limite non relativiste statique ($T^{\mu\nu} \equiv \rho c^2 \delta_0^\mu \delta_0^\nu$) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{(4+\delta)}(q_{(4+\delta)}) &= \begin{array}{c} \psi_1 \swarrow \quad \searrow \psi_1 \\ \bullet \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \psi_2 \swarrow \quad \searrow \psi_2 \end{array} \\
 &= \frac{1}{c} \mathcal{N} \left(2 \frac{\delta + 1}{\delta + 2} \right) G_{(4+\delta)} m_1 m_2 \left(\frac{S_{(3+\delta)}}{-\vec{q}_{(4+\delta)}^2} \right). \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

$\vec{q}_{(4+\delta)}$ est la composante spatiale du moment de transfert en $4 + \delta$ dimensions. L'approche indépendante qui suit est basée sur l'analyse de l'équation de Poisson pour le potentiel gra-

vitational dans la théorie originale. Elle revient essentiellement à calculer la transformée de Fourier inverse de l'expression (3.51), aux différentes échelles d'énergie.

Le mouvement des corps est géodésique. Dans la limite non relativiste, le potentiel d'interaction $V(\vec{x}, \vec{y})$ induit par une distribution de densité $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ est donné par l'équation de Poisson

$$\Delta_{(3+\delta)} V(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta + 1}{\delta + 2} \kappa_{(4+\delta)} \rho(\vec{x}, \vec{y}) \quad (3.52)$$

$$= 2 \frac{\delta + 1}{\delta + 2} S_{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} \rho(\vec{x}, \vec{y}) . \quad (3.53)$$

Cette équation n'est qu'une autre expression de la loi de Gauss pour l'interaction gravitationnelle :

$$\vec{\nabla}_{(3+\delta)} \cdot \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = -2 \frac{\delta + 1}{\delta + 2} S_{(3+\delta)} G_{(4+\delta)} \rho(\vec{x}, \vec{y}) , \quad (3.54)$$

où $\vec{f}(\vec{x}, \vec{y})$ est la force gravitationnelle par unité de masse exercée sur un corps au point (\vec{x}, \vec{y}) . La matière est confinée sur la membrane. Nous considérons une source ponctuelle m_1 au point \vec{x}_1 . La densité est donc donnée par une distribution delta : $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = m_1 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1) \delta^\delta(\vec{y})$. A une échelle de distance largement inférieure au rayon de compactification ($r < R$), l'espace-temps est purement $4 + \delta$ -dimensionnel, et l'intégration sur les $3 + \delta$ dimensions spatiales donne une force en $1/r^{2+\delta}$. Pour la force \vec{F} exercée par la source m_1 sur une masse m_2 , nous obtenons en effet

$$\vec{F}(r) = -G_{N(4+\delta)} \frac{m_1 m_2}{r^{2+\delta}} \hat{r} , \quad (3.55)$$

où \vec{r} est le vecteur joignant m_1 à m_2 , et $\hat{r} = \vec{r}/r$, le vecteur unité correspondant. Le couplage exact $G_{N(4+\delta)}$ est défini par

$$G_{N(4+\delta)} = 2 \frac{\delta + 1}{\delta + 2} G_{(4+\delta)} . \quad (3.56)$$

Par contre, à des distances plus grandes que l'échelle de compactification ($r > R$), la source peut être vue comme une distribution cylindrique qui remplit la totalité de la dimension supplémentaire. Par application de la loi de Gauss (3.54) autour de cette distribution cylindrique, et en vertu de la relation (3.44) entre les constantes de couplage nues $G_{(4)}$ et $G_{(4+\delta)}$, nous obtenons la loi de Newton habituelle en quatre dimensions :

$$\vec{F}(r) = -G_{N(4)} \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} . \quad (3.57)$$

Le couplage exact $G_{N(4)}$, identifié à la constante de Newton expérimentale G , est encore défini à partir du couplage nu par

$$G_{N(4)} = 2 \frac{\delta + 1}{\delta + 2} G_{(4)} . \quad (3.58)$$

Théorie effective

En termes de la théorie effective en quatre dimensions, le potentiel d'interaction est donné par l'amplitude totale (3.43) pour la diffusion de deux champs ψ_1 et ψ_2 , dans la limite non

relativiste statique. Cette amplitude se décompose comme

$$\mathcal{M}_{(4+\delta)}(q_{(4)}) = \sum_{\vec{n}} \frac{1}{c} \mathcal{N} \left(2 \frac{\delta+1}{\delta+2} \right) G_{(4)} m_1 m_2 \left(\frac{4\pi}{-\vec{q}^2 - m_n^2} \right) \quad (3.59)$$

$$= \sum_{\vec{n}} \left(\begin{array}{c} \psi_1 \swarrow \quad \psi_1 \searrow \\ \text{---} h_{\mu\nu}^{(\vec{n})} \text{---} \\ \psi_2 \swarrow \quad \psi_2 \searrow \end{array} + \begin{array}{c} \psi_1 \swarrow \quad \psi_1 \searrow \\ \text{---} \varphi^{(\vec{n})} \text{---} \\ \psi_2 \swarrow \quad \psi_2 \searrow \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{c} \mathcal{N} G_{(4)} m_1 m_2 \left[\left(1 + \alpha_{(4+\delta)}^2 \right) \frac{4\pi}{-\vec{q}^2} + \sum_{\vec{n} \neq 0} \left(\frac{4}{3} + \beta_{(4+\delta)}^2 \right) \frac{4\pi}{-\vec{q}^2 - m_n^2} \right], \quad (3.60)$$

où \vec{q} est la composante spatiale du moment de transfert en quatre dimensions. La contribution des modes nuls scalaire et tensoriel donne le potentiel de Newton exact. En accord avec la théorie scalaire-tenseur définie à basse énergie, la constante de Newton est identifiée par la relation $G = G_{(4)}(1 + \alpha_{(4+\delta)}^2)$, équivalente à la relation (3.58). Les modes massifs définissent, à chaque niveau $\vec{n} \neq 0$, un potentiel de Yukawa dont la portée est inversement proportionnelle à la masse du mode considéré ($m_n = n/R$) :

$$V(r) = V_0(r) + \sum_{\vec{n}} V_n(r) \quad (3.61)$$

$$= -G m_1 m_2 \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-nr/R}}{r}. \quad (3.62)$$

A des échelles de distance largement supérieures à l'échelle de compactification ($r > R$), ou encore à des échelles d'énergie inférieures à l'énergie de masse du premier niveau d'excitation, les contributions des termes de Yukawa sont supprimées, la théorie est essentiellement définie par les modes de masse nulle et l'interaction est purement newtonienne, en accord avec le résultat (3.57) :

$$V(r > R) \simeq -G \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + 2\delta e^{-r/R} + \dots \right). \quad (3.63)$$

Au-delà de cette échelle d'énergie ($r < R$), tous les modes massifs doivent être considérés, et leur sommation peut s'exprimer sous forme intégrale, qui donne finalement la structure exacte du potentiel d'interaction en terme d'une loi en $1/r^{1+\delta}$:

$$V(r < R) = -G m_1 m_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{n} \frac{e^{-nr/R}}{r} \quad (3.64)$$

$$= -G \frac{V_\delta S_\delta \Gamma(\delta)}{(2\pi)^\delta} \frac{m_1 m_2}{r^{\delta+1}} \quad (3.65)$$

$$= -\frac{G_{N(4+\delta)} m_1 m_2}{1 + \delta} \frac{1}{r^{\delta+1}}. \quad (3.66)$$

$\Gamma(d)$ est la valeur de la fonction $\Gamma(d)$ standard en $d = \delta$, et S_d est l'aire de la surface de la sphère unité en dimension d . Cette loi donne l'expression exacte de la force en $1/r^{2+\delta}$ définie

ci-dessus (voir (3.55))⁹.

En conclusion, l'interaction à courte distance est donnée par une loi différente de la loi de Newton, dont l'intensité augmente plus rapidement lorsque les corps en interaction se rapprochent. Par ailleurs, si la théorie originale nous donne un calcul direct du potentiel classique, la théorie effective nous permet de comprendre l'origine quadridimensionnelle des différentes contributions. La section suivante discute des contraintes expérimentales définies sur base de cette structure.

3.5 Contraintes expérimentales

Cette dernière section établit les contraintes expérimentales majeures sur les modèles étudiés. Dans un premier temps, des limites sur la grandeur et le nombre des dimensions supplémentaires sont définies et un mécanisme est envisagé pour leur stabilisation. La théorie effective à basse énergie est redéfinie. Nous considérons ensuite les limites astrophysiques et de laboratoire. Les contraintes correspondantes sur l'échelle de masse fondamentale de la théorie résultent de modifications non négligeables des interactions à l'échelle électrofaible introduites par la présence des vecteurs d'interactions massifs.

Potentiel d'interaction et couplage scalaire

Les considérations de la section précédente permettent de définir une limite sur la grandeur des dimensions supplémentaires. Les tests expérimentaux de la gravitation, dont la vérification de la loi de potentiel en $1/r$, s'étendent depuis des distances d'ordre astronomique jusqu'au millimètre [LCP99]. Par conséquent, les dimensions supplémentaires doivent être compactifiées sur des rayons inférieurs au millimètre, de manière à assurer le découplage de tous les modes massifs et des potentiels de Yukawa correspondants aux échelles accessibles expérimentalement (voir (3.63)). Ceci revient à demander une échelle de masse ($\mu \equiv m_{(n=1)} = 1/R$) suffisamment importante pour les modes de Kaluza-Klein :

$$R_{(exp)} \leq 10^{-3} m \quad (3.67)$$

$$\mu_{(exp)} \geq 2 \times 10^{-4} eV. \quad (3.68)$$

Ces conditions définissent donc la possibilité de dimensions extrêmement larges par rapport à l'échelle de Planck, ou même à l'échelle électrofaible. Au niveau théorique, une masse fondamentale au TeV fixe le rayon de compactification $R_{(4+\delta)}$ (voir (3.12)), et de manière équivalente l'échelle de masse $\mu_{(4+\delta)}$, en fonction du nombre de dimensions supplémentaires :

$$R_{(4+\delta)} = 2 \times 10^{(31/\delta-19)} m \quad (3.69)$$

$$\mu_{(4+\delta)} = 10^{(12-31/\delta)} eV. \quad (3.70)$$

Dans le cas d'une dimension supplémentaire unique, le rayon de compactification est de l'ordre de grandeur de notre système solaire ($R_{(5)} \simeq 2 \times 10^{12} m$), correspondant à une dégénérescence

⁹L'aire de la surface de la sphère unité dans un espace d -dimensionnel est donnée par $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$. Les fonctions $\Gamma(d)$ sont définies comme $\Gamma(d) \equiv \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x}$. Elles satisfont aux relations utiles suivantes : $\Gamma(d/2) \times \Gamma((d+1)/2) = (\pi^{1/2}/2^{d-1}) \times \Gamma(d)$ et $d \times \Gamma(d) = \Gamma(d+1)$, et prennent les valeurs particulières $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ et $\Gamma(1) = 1$ en $d = 1/2$ et $d = 1$.

extrême des masses ($\mu_{(5)} \simeq 10^{-19} eV$). Ce cas est par conséquent exclu par les contraintes expérimentales. Par contre, à partir de deux dimensions supplémentaires ($\delta \geq 2$), leur rayon est inférieur au millimètre ($R_{(4+\delta)} < 10^{-3} m$), et la masse de la première excitation est suffisante pour que le potentiel correspondant découple des expériences actuelles ($\mu_{(4+\delta)} > 2 \times 10^{-4} eV$). Toute vérification expérimentale de la loi de Newton en $1/r$ à plus petite distance donnerait des contraintes plus fortes sur la compactification et sur le nombre des dimensions supplémentaires. Notons déjà que les expériences les plus récentes [Hoy01, Ade02] vérifient la validité de la loi en $1/r$ jusqu'à des distances de l'ordre de 200 micromètres. Strictement, ce résultat n'est déjà plus compatible avec l'existence de deux dimensions supplémentaires que pour une échelle fondamentale légèrement supérieure au TeV (augmenter l'échelle de masse fondamentale revient en effet à diminuer le rayon de compactification des dimensions supplémentaires) : $\delta = 2, \bar{M}_{(4+\delta)} \geq 4 TeV$.

Le problème de la dynamique de la compactification est une question récurrente dans le cadre des théories en dimension supérieure. Quels que soient les détails du mécanisme dynamique à l'origine de la compactification [ADM01], il est indispensable que les dimensions supplémentaires soient finalement stabilisées autour de leur valeur R . De manière générique, l'introduction d'un potentiel pour les modes scalaires nuls offre une réponse adéquate à ce problème. Ces modes définissant une perturbation sur la mesure R des dimensions supplémentaires,

$$ds_y^2 = (\eta_{mn} - 2\alpha\varphi_{mn}) dy^m dy^n, \quad (3.71)$$

celles-ci sont ainsi naturellement stabilisées autour du minimum de ce potentiel. Remarquons en outre que la structure de l'interaction à basse énergie est modifiée par le mécanisme de stabilisation, sans lequel la constatation suivante conduirait à un échec majeur de la théorie. L'action (3.32) définit en effet, à basse énergie, une théorie scalaire-tenseur avec un couplage scalaire fort : $\alpha_{(4+\delta)}^2 \geq 1/3$. Or, l'ensemble des expériences gravitationnelles actuelles ne sont compatibles qu'avec la présence d'une composante scalaire faiblement couplée à la matière, la contrainte la plus forte venant des expériences de déflexion de la lumière : $\alpha_{(exp)}^2 \leq 1.4 \times 10^{-4}$ (voir (1.92)). Mais l'introduction d'un potentiel pour la mesure des dimensions supplémentaires induit un terme de masse pour les perturbations de cette mesure autour du minimum. Le champ scalaire φ acquiert donc une masse m_φ et, si cette masse est suffisamment importante ($m_\varphi \geq 2 \times 10^{-4} eV$), découple totalement de la théorie au-dessus du millimètre, à l'instar des excitations de Kaluza-Klein. Par conséquent, la théorie effective à basse énergie s'identifie à la Relativité Générale, en accord évident avec les contraintes expérimentales. Remarquons que, dans le même temps, la constante de couplage $G_{(4)}$ s'identifie à la constante de Newton G . L'échelle de masse dérivée $M_{(4)}$ est donc égale à la masse de Planck réduite \bar{M}_{Pl} , et la relation (3.7) est finalement exacte.

Contraintes de laboratoire et astrophysiques

Le couplage gravitationnel en $4 + \delta$ dimensions étant défini par une échelle de l'ordre du TeV ($\bar{M}_{(4+\delta)} \simeq 1 TeV$), une physique nouvelle associée à des effets quantiques forts devrait être accessible aux expériences futures en laboratoire. A des énergies inférieures, certains effets gravitationnels pourraient déjà être observables. Ces effets sont essentiellement liés à la production réelle de gravitons dans les processus électrofaibles. Du point de vue $4 + \delta$ -dimensionnel, il s'agit de la production d'un graviton non massif unique, dont le couplage est supprimé par $\bar{M}_{(4+\delta)}$ plutôt que par la masse de Planck ($(\kappa_{(4+\delta)}/2)^{1/2} = M_{(4+\delta)}^{-(2+\delta)/2}$). La perte

d'énergie correspondante est toujours associée à une énergie manquante. Le graviton produit dans les dimensions supplémentaires a en effet une probabilité extrêmement faible d'interagir à nouveau avec la membrane sur laquelle la matière est confinée. Du point de vue quadridimensionnel, toutes les excitations de Kaluza-Klein du graviton sont définies par un couplage à l'échelle de Planck $((\kappa/2)^{1/2} = \bar{M}_{Pl}^{-1})$. Leur production (et détection) individuelle est par conséquent largement supprimée aux échelles impliquées dans les processus astrophysiques ou en laboratoire. Par contre, la production combinée de ces modes de Kaluza-Klein est associée à des effets *a priori* observables, étant donné la grande multiplicité des excitations qui peuvent être produites :

$$\begin{array}{c} \dots \longrightarrow \\ M_{(4+\delta)}^{-(2+\delta)/2} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \hat{h}_{\mu\nu}(x, \vec{y}) \\ \searrow \psi, \phi, V_\mu \end{array} = \sum_{KK} \left(\begin{array}{c} \dots \longrightarrow \\ \bar{M}_{Pl}^{-1} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow g_{KK} \\ \searrow \psi, \phi, V_\mu \end{array} \right) .$$

Mais au niveau expérimental, la gravitation semble tout à fait découplée des autres interactions, aussi bien dans les processus astrophysiques et cosmologiques (à des énergies de l'ordre du keV ou du MeV), que dans les processus électrofaibles étudiés en laboratoire (jusqu'à des énergies au-delà de $100 GeV$). Cette constatation définit des contraintes importantes sur les théories en dimension supérieure [ADD98, ADD99].

Considérons d'abord les contraintes astrophysiques [Bar99]. Différents processus peuvent entrer en jeu pour modifier la dynamique de l'évolution stellaire : annihilation d'une paire photon - photon ($\gamma\gamma \rightarrow g_{KK}$) ou électron - positron ($e^+e^- \rightarrow g_{KK}$) en gravitons, diffusion "gravi-compton" ($e^-\gamma \rightarrow e^-g_{KK}$), bremsstrahlung, etc.. A une échelle d'énergie E au sein d'une étoile, la section efficace pour la production d'un mode unique est essentiellement donnée par l'inverse de la masse de Planck carrée : $\sigma_{KK} \sim \bar{M}_{Pl}^{-2}$. Mais la production de tous les modes de masse inférieure à l'énergie définie doit être prise en compte. Si le nombre de dimensions supplémentaires est grand, l'échelle de séparation des masses des excitations de Kaluza-Klein est importante¹⁰ et peu d'excitations massives peuvent être produites. La section efficace totale est par conséquent négligeable. Nous considérons les cas où le nombre de dimensions supplémentaires est petit ($\delta \leq 6$). La séparation entre les excitations massives est faible, et la dégénérescence des états produits est importante. Dans la limite du continu, nous pouvons écrire approximativement leur multiplicité à une échelle E comme

$$\left(\int_0^E \frac{dm}{1/R} \right)^\delta = (ER)^\delta . \quad (3.72)$$

La section efficace, proportionnelle à l'échelle fondamentale $M_{(4+\delta)}$, est beaucoup moins supprimée que pour les productions individuelles :

$$\sigma_{tot} = \sum_{KK} \sigma_{KK} \sim \frac{(ER)^\delta}{\bar{M}_{Pl}^2} \sim \frac{E^\delta}{\bar{M}_{(4+\delta)}^{2+\delta}} . \quad (3.73)$$

Le même résultat est obtenu par simple argument dimensionnel si nous considérons la production équivalente d'un graviton unique en $4+\delta$ dimensions. A des énergies largement inférieures au TeV , le taux d'émission d'énergie associé à la production de gravitons dans ces processus

¹⁰ $\mu_{(6)} \simeq 3 \times 10^{-4} eV$, $\mu_{(8)} \simeq 20 keV$, $\mu_{(10)} \simeq 7 MeV$ et $\mu_{(12)} \simeq 0.1 GeV$ pour $\delta = 2, 4, 6, 8$ respectivement. Dans la limite formelle $\delta \rightarrow \infty$, la masse de la première excitation est donnée par l'échelle fondamentale elle-même : $\mu_{(\infty)} = 1 TeV$.

astrophysiques est d'autant plus important que le nombre de dimensions supplémentaires est faible. Les contraintes expérimentales sont donc associées à des limites sur le nombre de ces dimensions. De manière équivalente, pour un nombre de dimensions fixé, la contrainte est portée sur la valeur de l'échelle de masse fondamentale $M_{(4+\delta)}$.

Les températures en jeu dans la dynamique stellaire sont de l'ordre du keV ($1 keV$ dans le soleil, $100 keV$ au sein d'une géante rouge), alors que l'énergie disponible par particule dans une supernova est supérieure à $30 MeV$. Les limites expérimentales les plus fortes sont données par l'observation de la supernova SN1987A. Les modifications de la dynamique stellaire sont suffisamment faibles au-delà de trois dimensions supplémentaires pour proposer une échelle fondamentale au TeV en accord avec l'observation : $\delta \geq 3$, $\bar{M}_{(4+\delta)} \simeq 1 TeV$. Par contre, dans un espace-temps comptant deux dimensions supplémentaires, la dégénérescence des modes massifs est trop importante. La théorie n'est alors compatible avec la dynamique observée que pour une échelle fondamentale près de deux ordres de grandeur supérieure : $\delta = 2$, $\bar{M}_{(4+\delta)} \geq 30 TeV$. Toutes les autres limites d'ordre astrophysique ou cosmologique (liées notamment à la nucléosynthèse primordiale) étant définies à plus basse énergie, elles donnent des contraintes moins fortes.

En laboratoire, l'ensemble des processus électrofaibles peuvent *a priori* être réétudiés [HLZ99]. En particulier, des contraintes fortes sont attendues dans l'étude de contributions anormales à la désintégration de particules massives. Ces contributions sont à nouveau associées à l'émission d'un graviton réel, sur une branche quelconque du diagramme correspondant. Considérons le cas de la désintégration du boson massif Z_0 ($m_{Z_0} \simeq 90 GeV$) en fermion-antifermion au *tree-level* ($Z_0 \rightarrow f\bar{f} + g_{KK}$). Dans la limite où les masses des fermions sont négligées, un argument dimensionnel donne l'expression suivante pour la largeur de désintégration totale :

$$\Gamma_{tot} \sim \frac{m_{Z_0}^5}{M_{ew}^4} \left(\frac{m_{Z_0}}{\bar{M}_{(4+\delta)}} \right)^{2+\delta}. \quad (3.74)$$

Le facteur hors parenthèses correspond grossièrement à la largeur totale de désintégration du Z_0 . Le facteur entre parenthèses définit le rapport de branchement pour la production de gravitons dans cette désintégration. Dans la limite la plus critique ($\delta = 2$, $\bar{M}_{(6)} \simeq 1 TeV$), ce rapport reste extrêmement faible. Il est en fait inférieur aux incertitudes expérimentales sur la largeur du Z_0 :

$$B_{tot}(Z_0 \rightarrow f\bar{f} + g_{KK}) \sim 10^{-4}. \quad (3.75)$$

Dans le cas de la désintégration de particules moins massives, ce rapport de branchement est encore plus faible. Aucune contrainte nouvelle n'est donc définie par cette analyse.

En conclusion, les contraintes expérimentales sur le potentiel d'interaction en $1/r$ excluent l'existence d'une dimension supplémentaire unique ($\delta = 1$). Les observations astrophysiques (SN1987A) et les expériences en laboratoire définissent des contraintes sur la production de gravitons dans les processus électrofaibles. Ces contraintes admettent les théories proposant au moins trois dimensions supplémentaires larges avec une échelle fondamentale au TeV ($\delta \geq 3$, $\bar{M}_{(4+\delta)} \simeq 1 TeV$). Cette échelle fondamentale doit être légèrement supérieure au TeV dans le cas de la présence de deux dimensions supplémentaires ($\delta = 2$, $\bar{M}_{(6)} \geq 30 TeV$). Notons que l'implémentation de ces modèles *ADD* dans le cadre de certaines théories de Cordes permet d'éviter cette majoration de l'échelle fondamentale [ADD99] pour $\delta = 2$.

Conclusion

En conclusion, proposer des (δ) dimensions supplémentaires larges pour la propagation de l'interaction gravitationnelle revient à considérer une théorie en quatre dimensions, où la gravitation est définie à travers l'interaction d'une tour infinie d'excitations massives (dont les masses sont fortement dégénérées pour un faible nombre de ces dimensions supplémentaires) en sus du graviton de masse nulle habituel. Si nous admettons l'existence d'au moins deux dimensions compactes ($\delta \geq 2$), ces modèles remplissent parfaitement l'ensemble des contraintes expérimentales pour une échelle fondamentale à l'ordre du TeV ($\bar{M}_{(6)} \geq 30 TeV$ et $\bar{M}_{((4+\delta)>6)} \simeq 1 TeV$) et définissent une physique nouvelle à des énergies et distances bientôt accessibles à l'expérience. Cependant, le décalage entre les échelles électrofaible et de Planck n'est éliminé qu'au prix de l'introduction d'une nouvelle mesure définissant les dimensions larges ($\mu = 1/R$). Une nouvelle hiérarchie apparaît donc entre cette échelle (pour référence, $\mu_{(6)} \simeq 3 \times 10^{-4} eV$) et la masse électrofaible. Le problème de la hiérarchie des couplages n'est donc pas vraiment résolu, mais seulement déplacé. Le chapitre suivant est consacré à l'étude de modèles qui semblent mieux répondre au problème hiérarchique du Modèle Standard.

Chapitre 4

Dimension supérieure unique

¹Le modèle *RS* a été proposé en 1999 par L. Randall et R. Sundrum. Une dimension supplémentaire unique y est définie dans une géométrie non factorisable : les composantes quadridimensionnelles habituelles sont déformées par la présence d'un facteur conforme dépendant de la cinquième dimension y :

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (4.1)$$

Cette cinquième dimension est délimitée par la présence de deux membranes, sur l'une desquelles est défini notre univers quadridimensionnel. L'échelle fondamentale de la théorie est donnée par la masse de Planck, qui doit naturellement régir la courbure de l'espace (k) et la distance entre les deux membranes, mesure de la dimension supplémentaire (y_c). Dans la perspective de la résolution du problème hiérarchique, cette forme de la métrique est suggérée par le fait que la présence d'un facteur conforme (multipliant la métrique de Minkowski, nécessaire à l'invariance sous les transformations de Poincaré en quatre dimensions) définit un changement d'échelle exponentiel, et en particulier une renormalisation importante des masses. Nous établissons d'abord la théorie effective en quatre dimensions à travers une approche originale (sections 4.1 à 4.3). Nous étudions ensuite la phénoménologie associée (section 4.4).

4.1 Modèle *RS*

Le modèle est donné par l'action suivante [RS99a, RS99b] :

$$S^{(rs)} = \int d^4x \int dy \sqrt{\hat{g}} \left(-\Lambda_{(5)} - \frac{1}{4} M_{(5)}^3 \hat{R} \right) + \sum_{\pm} S_{mat}^{\pm}. \quad (4.2)$$

Le secteur gravitationnel est défini par l'action d'Einstein-Hilbert en cinq dimensions en présence d'une constante cosmologique. \hat{R} est le scalaire de courbure en cinq dimensions ; \hat{g} est le déterminant de la métrique \hat{g}_{MN} , et $\Lambda_{(5)}$ la constante cosmologique. $M_{(5)}$ est l'échelle de masse de la théorie², de l'ordre de la masse de Planck M_{Pl} . La compactification de la cinquième dimension est réalisée sur l'intervalle $-y_c \leq y \leq y_c$. Nous considérons une compactification sur

¹ $\hbar = c = 1$.

²Dans la formulation originale, l'échelle de masse $M_{(5)}$ est définie par le terme $-2M_{(5)}^3 \hat{R}$ au niveau de l'action (4.2). Nous choisissons une normalisation différente pour la cohérence avec les développements du chapitre précédent.

le cercle : $y = r_c \phi$, où r_c est le rayon de compactification, et ϕ la variable angulaire, avec $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ($y_c = \pi r_c$). A cette symétrie se superpose une symétrie \mathcal{Z}_2 , correspondant à l'identification des coordonnées y et $-y$. La dimension supplémentaire est donc définie par le quotient S^1/\mathcal{Z}_2 . Cette compactification dite "orbifold" offre deux points fixes : $y^+ = 0$ et $y^- = y_c$. En chacun de ces points est définie une membrane fixe, de tension V^\pm . La matière considérée sur l'une ou l'autre membrane est définie par la structure habituelle :

$$S_{mat}^\pm = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}^\pm} \left(\mathcal{L}^\pm \left(\hat{\Psi}, \hat{g}_{\mu\nu}^\pm(x^\mu) \right) - V^\pm \right), \quad (4.3)$$

où $\hat{g}_{\mu\nu}^\pm(x^\mu) \equiv \hat{g}_{\mu\nu}(x^\mu, y = y^\pm)$ est la métrique induite sur la membrane, et où $\hat{\Psi}$ représente les champs de matière sur cette structure. L'univers quadridimensionnel que nous connaissons est défini sur la membrane en $y = y_c$ ($S_{mat}^- = S_{(vis)}$). La membrane en $y = 0$ n'est pas directement accessible ($S_{mat}^+ = S_{(hid)}$) et aucune autre forme d'énergie que la tension n'y est définie ($\mathcal{L}^+ = 0$).

Nous comprenons d'emblée comment une réponse satisfaisante au problème hiérarchique du Modèle Standard peut être obtenue. Comme la section suivante l'établit, l'échelle de masse de la théorie effective (\bar{M}_{Pl}) est donnée à travers la relation

$$\bar{M}_{Pl}^2 = \frac{M_{(5)}^3}{k} \left(1 - e^{-2ky_c} \right). \quad (4.4)$$

Cette relation est naturellement vérifiée, sans introduction de hiérarchie importante entre $M_{(5)}$, k et $\mu_c = 1/y_c$, si les valeurs de ces paramètres fondamentaux sont de l'ordre de la masse de Planck (réduite). Contrairement aux modèles *ADD*, l'échelle fondamentale est donc donnée par la masse de Planck, et l'échelle électrofaible doit en être dérivée. Pour le comprendre, considérons le lagrangien classique pour la matière dans la théorie métrique définie sur la membrane visible³. Si l'espace-temps est effectivement défini par la structure (4.1), la métrique induite sur la membrane est conformément plane,

$$\hat{g}_{\mu\nu}^{(vis)} = e^{-2ky_c} \eta_{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Le changement d'échelle nécessaire pour retrouver la structure asymptotique de Minkowski ($g_{\mu\nu}^{(vis)} = \eta_{\mu\nu}$) est associé à une renormalisation des paramètres de masse de la théorie fondamentale :

³Nous pouvons encore établir ce résultat dans l'action définissant le champ de Higgs \hat{H} dans le Modèle Standard. Cette action est définie en fonction de deux paramètres, λ et ν_0 :

$$\begin{aligned} S_{(vis)}^H &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}_{(vis)}} \left[\hat{g}_{(vis)}^{\mu\nu} D_\mu \hat{H}^\dagger D_\nu \hat{H} - \lambda \left(|\hat{H}|^2 - \nu_0^2 \right)^2 \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\eta} \left[e^{-2ky_c} \eta^{\mu\nu} D_\mu \hat{H}^\dagger D_\nu \hat{H} - e^{-4ky_c} \lambda \left(|\hat{H}|^2 - \nu_0^2 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Après normalisation standard du terme cinétique ($H = e^{-ky_c} \hat{H}$), et pour $v \equiv e^{-ky_c} \nu_0$, cette expression s'écrit encore

$$S_{(vis)}^H = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left[\eta^{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda \left(|H|^2 - v^2 \right)^2 \right].$$

La valeur dans le vide du champ de Higgs est donc naturellement réduite à l'échelle électrofaible pour un paramètre fondamental ν_0 défini par l'échelle de Planck. Il en est de même pour toutes les masses du modèle, qui sont définies par cette valeur v .

$$S_{mat} = - \int m_0 ds_{|(e^{-2ky_c} \eta_{\mu\nu})} = - \int m ds_{|(\eta_{\mu\nu})}, \quad (4.6)$$

avec

$$m = e^{-ky_c} m_0. \quad (4.7)$$

Ainsi, les masses à l'échelle électrofaible ($m \simeq 1 TeV (M_{ew})$) sont obtenues à partir d'un paramètre initial autour de l'échelle de Planck ($m_0 \simeq \bar{M}_{Pl}$), l'unique échelle fondamentale de la théorie. La réduction exponentielle définit la mesure de la dimension supplémentaire en fonction du paramètre de courbure par la relation $y_c \simeq 40/k$. En termes du rayon de compactification, nous avons encore $r_c \simeq 12/k$. Aucune hiérarchie importante n'est donc requise : les paramètres $M_{(5)}$, k , $\mu_c = 1/y_c$ et m_0 sont tous de l'ordre de la masse de Planck, et l'échelle électrofaible est naturelle pour les masses des champs définis sur la membrane en $z = z_0$.

4.2 Théorie effective

Le développement exact permettant l'établissement de la théorie effective est assez complexe. D'une part, les fonctions d'onde définissant le développement des champs gravitationnels en modes quadridimensionnels sont inconnues, contrairement au cas de l'espace plat, où la décomposition de Fourier s'applique *a priori*. Ces fonctions d'ondes doivent donc être déterminées à partir des équations de champs définies par la théorie originale en cinq dimensions. D'autre part, rappelons qu'un mode scalaire non massif est associé à la mesure de la dimension supplémentaire (à travers la composante h_{55}). La présence de matière étant responsable de vibrations de la membrane dans la cinquième dimension, un couplage scalaire additionnel au couplage étudié dans les modèles *ADD* doit être pris en compte. La méthode de "réduction du propagateur" définie au chapitre 3 est ainsi mise en défaut [GKR00], et l'étude exacte de la composante scalaire est beaucoup moins directe. Ces résultats sont établis en toute rigueur dans la littérature. Sans prétendre à une déduction exacte et complète, nous voudrions suggérer dans cette section quelques éléments originaux pour accéder à la théorie effective en termes d'une "action en coordonnées conformes". Nous étudions ensuite la phénoménologie associée.

Espace courbe (AdS_5)

Avant toute autre chose, vérifions que la structure géométrique suggérée (voir (4.1)), caractéristique essentielle du modèle, est effectivement définie par les équations de champs de la théorie. Introduisant un *ansatz*, pour une géométrie non factorisable, de la forme

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (4.8)$$

les équations de champs se réduisent aux deux équations suivantes pour la fonction $\sigma(y)$:

$$\sigma'^2(y) = - \frac{\Lambda_{(5)}}{3M_{(5)}^3} \quad (4.9)$$

$$\sigma''(y) = \frac{2}{3M_{(5)}^3} (V_{hid} \delta(y) + V_{vis} \delta(y - y_c)), \quad (4.10)$$

où $\sigma'(y) \equiv \partial_y \sigma$. Ces équations n'admettent de solution que si la constante cosmologique globale est négative, et si les tensions sont opposées et correctement ajustées :

$$\Lambda_{(5)} = -3M_{(5)}^3 k^2 \quad (4.11)$$

$$V_{hid} = -V_{vis} = 3M_{(5)}^3 k, \quad (4.12)$$

où $k > 0$ est une constante arbitraire. La solution invariante sous la symétrie \mathcal{Z}_2 s'écrit $\sigma(y) = k|y|$, et nous retrouvons la forme (4.1) attendue pour l'élément de distance, où k est un paramètre de courbure. L'espace-temps ainsi défini s'identifie à la double copie d'une tranche ($0 \leq y \leq y_c$) d'un espace Anti-de Sitter en cinq dimensions (AdS_5)⁴. La métrique s'écrit donc sous la forme

$$\gamma_{MN}(y) = \text{diag} \left(e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu}, -1 \right), \quad (4.13)$$

et les perturbations peuvent être définies par le développement

$$\hat{g}_{MN}(x, y) = \gamma_{MN}(y) + h_{MN}(x, y). \quad (4.14)$$

Notons que les relations (4.11) et (4.12) définissent deux ajustements (induisant notamment une constante cosmologique nulle dans la théorie effective) qui peuvent paraître peu naturels. Nous verrons plus loin qu'ils ne sont pas indispensables à la cohérence du modèle.

Action en coordonnées conformes

Les principaux éléments de notre approche consistent à définir la théorie effective au niveau de l'action elle-même par intégration de la dimension supplémentaire, et non au niveau des équations du mouvement. Cette technique a été envisagée récemment dans la littérature [Boo02], toutefois nous considérons la théorie à partir d'un système de coordonnées différent du système généralement utilisé, dont nous espérons qu'il simplifie le raisonnement.

La coordonnée conforme z dans la cinquième dimension est définie par la relation

$$z = \text{sgn}(y) \frac{1}{k} \left(e^{k|y|} - 1 \right), \quad (4.15)$$

sur l'intervalle $-z_c \leq z \leq z_c$ où la borne z_c est donnée par l'échelle $z_c \equiv (1/k) (e^{ky_c} - 1) \simeq 1 \text{ TeV}^{-1}$, alors que y_c est définie par l'échelle de Planck. Dans ce système de coordonnées, la géométrie de l'espace est conformément plane :

$$ds^2 = e^{-2\tilde{\sigma}(z)} \eta_{MN} dx^M dx^N, \quad (4.16)$$

où le facteur exponentiel est donné par $e^{\tilde{\sigma}(z)} = e^{\sigma(y(z))} = k|z| + 1$. Nous pouvons dès lors écrire le développement en perturbations du champ gravitationnel sous la forme suivante,

$$\hat{g}_{MN}(x, z) = e^{-2\tilde{\sigma}(z)} g_{MN}(x, z) = e^{-2\tilde{\sigma}(z)} (\eta_{MN} + h_{MN}(x, z)). \quad (4.17)$$

Une simple transformation de Weyl permet de s'affranchir du facteur exponentiel global. Les champs $h_{MN}(x, z)$ correspondent aux perturbations autour de l'espace de Minkowski.

⁴L'espace AdS_5 est défini sur une dimension supplémentaire infinie ($-\infty < y < \infty$) par la métrique

$$ds_{(AdS_5)}^2 = e^{-2ky} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2.$$

Sous la transformation de Weyl (4.17), l'action (4.2) s'écrit en coordonnées conformes (à une dérivée totale près⁵)

$$S^{(rs)} = \int d^4x \int dz \sqrt{g} \left(-\frac{1}{4} M_{(5)}^3 e^{-3\tilde{\sigma}} (R + 12\tilde{\sigma}^{iM} \tilde{\sigma}_{iM}) - e^{-5\tilde{\sigma}} \Lambda_{(5)} \right) + \sum_{\pm} S_{mat}^{\pm}, \quad (4.18)$$

avec, sur la membrane visible,

$$S_{mat}^- = S_{mat}^{(vis)} = \int d^4x \sqrt{-g^{(vis)}} \left(\mathcal{L}^{(vis)} \left(\Psi, g_{\mu\nu}^{(vis)}(x^\mu) \right) - V^{(vis)} \right). \quad (4.19)$$

Les champs de matière (et leur paramètre de masse notamment) sont redéfinis sur la métrique asymptotiquement plane ($\tilde{\Psi} \rightarrow \Psi$) par la transformation d'échelle liée au facteur exponentiel (voir (4.6)). Dans cette approche, la structure de l'interaction et les couplages gravitationnels dérivés dans la littérature pour la théorie effective en quatre dimensions peuvent être suggérés comme suit.

(Structure de l'interaction)

Au chapitre précédent (section 3.3), notre analyse du nombre des degrés de liberté du champ gravitationnel en $4 + \delta$ dimensions nous a déjà permis de suggérer la répartition des degrés physiques dans des champs tensoriels, vectoriels et scalaires de la théorie effective en quatre dimensions. Il est évident que les couplages gravitationnels sont modifiés par la structure asymptotique non triviale de l'espace dans le modèle *RS*. Mais le comptage des degrés de liberté, et par conséquent la structure de l'interaction, doivent être les mêmes que dans le modèle *ADD* en cinq dimensions, où le champ gravitationnel compte cinq composantes physiques à chaque mode. Si la théorie effective exhibe des modes massifs, chaque mode ne comptera par conséquent qu'un graviton de spin 2 (voir (3.34)). Au niveau non massif, outre le radion, scalaire associé à la mesure dans la dimension supplémentaire, un graviton d'hélicité 2 et un vecteur sont attendus (voir (3.26)). Etant donné la structure géométrique particulière, nous considérons une jauge axiale, définie par les conditions

$$g_{M5} = \eta_{M5} \quad (h_{M5} = 0). \quad (4.20)$$

Les perturbations restantes (dix composantes de $h_{\mu\nu}$) peuvent *a priori* se décomposer comme un mode tensoriel transverse et sans trace $h_{\mu\nu}^{(tt)}$ (cinq composantes, $\partial^\mu h_{\mu\nu}^{(tt)} = 0$ et $h^{(tt)} = 0$), un champ vectoriel $\partial^\mu h_{\mu\nu}^{(st)}$ (quatre composantes, $h_{\mu\nu}^{(st)} \equiv h_{\mu\nu} - (1/4)\eta_{\mu\nu}h$) et le scalaire défini par la trace $h = h^\mu_\mu$ elle-même (une composante).

Pour les champs non massifs, l'identification des degrés physiques passe par le choix de conditions non explicitement covariantes telles que

$$\begin{aligned} h_{\mu 0}^{(tt)} &= 0 \\ \partial^\mu h_{\mu 0}^{(st)} &= 0 \\ \partial^\nu \partial^\mu h_{\mu\nu}^{(st)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

⁵Sous transformation de Weyl ($\hat{g}_{MN}(x) = e^{-2\sigma(x)} g_{MN}(x)$), le scalaire de courbure dans un espace n -dimensionnel est donné par l'expression générale suivante :

$$\hat{R} = e^{2\sigma} \left[R - (n-1)(n-2) \sigma^{iM} \sigma_{iM} + 2(n-1) \sigma_{iM}^{iM} \right].$$

Ces conditions laissent respectivement deux composantes tensorielles transverses et sans trace pour un graviton d'hélicité 2 ($h_{\mu\nu}^{(tt)}$), deux composantes vectorielles transverses pour un vecteur non massif ($\partial^\mu h_{\mu\nu}^{(st)}$), et la composante scalaire h .

Pour les modes massifs, l'absence de modes vectoriel et scalaire s'exprime respectivement dans les (cinq) contraintes supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_z \partial^\mu \left(e^{-2\tilde{\sigma}} h_{\mu\nu}^{(st)} \right) &= 0 \\ \partial_z \left(e^{-2\tilde{\sigma}} h \right) &= 0.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Ces relations identifient donc les cinq composantes du graviton massif. De manière générale, le confinement des champs de matière sur une 3-membrane et la conservation du tenseur énergie-moment qui en résulte excluent d'emblée les couplages vectoriels⁶. Pour la simplicité nous posons donc

$$\partial^\mu h_{\mu\nu}^{(st)} = 0.\tag{4.23}$$

Notons que sous cette dernière condition, les composantes transverses et sans trace sont données par $h_{\mu\nu}^{(tt)} \equiv h_{\mu\nu}^{(st)}$.

En conclusion, la théorie effective en quatre dimensions doit définir le couplage à la matière d'une tour infinie d'états massifs de spin 2, ainsi qu'une structure scalaire-tenseur non massive, dont les couplages restent à déterminer. Remarquons que l'ajustement des valeurs de la constante cosmologique globale $\Lambda_{(5)}$ et des tensions V^\pm (voir (4.11) et (4.12)) est tel que l'intégration de la dimension supplémentaire à l'ordre zéro dans les perturbations s'annule exactement. La constante cosmologique dans la théorie effective en quatre dimension est donc nulle :

$$\Lambda_{(4)} = 0.\tag{4.24}$$

(Couplages gravitationnels)

Considérons la théorie définie par le terme contenant le scalaire de courbure (multiplié par le facteur exponentiel $e^{-3\tilde{\sigma}}$), et sous les contraintes (4.20), (4.22) et (4.23). L'expression habituelle pour le développement à l'ordre 2 du scalaire de courbure autour de la métrique de Minkowski est donnée par l'équation (3.14). Nous pouvons en extraire les termes cinétiques pour les champs $h_{\mu\nu}^{(tt)}$ et h , ainsi que les termes de masse pour les perturbations transverses et sans trace ($h_{\mu\nu}^{(st)}$). Tous les termes de trace non dérivatifs (en quatre dimensions, " ∂_μ ") y sont négligés. Leur contribution effective globale doit être nulle, puisqu'aucun mode scalaire massif ne peut apparaître. Les couplages linéaires à la matière en quatre dimensions sont les couplages classiques issus du lagrangien $\mathcal{L}^{(vis)}$. La théorie linéarisée est donc donnée par

$$\begin{aligned}S_{(rs)}^{(2)} \supset & \int d^4x \int dz \left[\frac{1}{4} M_{(5)}^3 e^{-3\tilde{\sigma}} \left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{(tt)\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta}^{(tt)} - \frac{1}{4} h'^{(tt)\alpha\beta} h'_{\alpha\beta}^{(tt)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} M_{(5)}^3 e^{-3\tilde{\sigma}} \left(-\frac{3}{32} \partial_\mu h \partial^\mu h \right) - \frac{1}{2} h^{(tt)\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{8} h T \right],\end{aligned}\tag{4.25}$$

⁶Dans le modèle *RS* en particulier, les champs vectoriels eux-mêmes sont interdits. Le comptage des degrés de liberté nous a montré qu'aucun mode vectoriel massif ne peut apparaître. La symétrie \mathcal{Z}_2 imposée *a priori* interdit l'existence d'une composante vectorielle de masse nulle. En effet, si nous n'imposons pas la jauge axiale, les modes vectoriels de masse nulle sont naturellement identifiés par des composantes non diagonales $h_{\mu 5}(x)$ indépendantes de la cinquième dimension dans le développement (4.14). La symétrie \mathcal{Z}_2 impose que les champs $h_{\mu 5}(x, y)$ soient impairs sous parité dans la dimension supplémentaire, et interdit donc tout mode vectoriel de masse nulle.

où $h'^{\mu\nu} \equiv \partial_z h^{\mu\nu}$.

Les fonctions d'ondes pour les perturbations tensorielles étant inconnues, la théorie ne peut être intégrée d'emblée. Nous admettons l'existence d'une base de fonctions d'onde $\chi_{(m)}(z)$ définissant le développement en modes suivant :

$$h_{MN}^{(tt)}(x, z) = \sum_m \chi_{(m)}(z) h_{MN}^{(m)}(x). \quad (4.26)$$

La normalisation canonique du terme cinétique et l'identification d'un terme de masse pour les modes $h_{MN}^{(m)}(x)$ dans la théorie effective, donne respectivement les contraintes suivantes, qui doivent déterminer la fonction d'onde :

$$\frac{1}{4} M_{(5)}^3 \int dz e^{-3\sigma} \chi_{(m)}^2(z) = 1 \quad (4.27)$$

$$e^{-3\sigma} \chi_{(m)}^2(z) = m^2 e^{-3\sigma} \chi_{(m)}^2. \quad (4.28)$$

Il apparaît de façon évidente que la théorie comprend un état d'hélicité 2 non massif, le graviton, donné par une fonction d'onde constante $\chi_{(0)}$. Les solutions de l'équation différentielle (4.28) définissent aussi des états massifs de spin 2. La forme canonique de cette équation est dérivée et étudiée en détail dans la section suivante.

Pour la perturbation scalaire, la dernière relation (4.22) identifie *a priori* une contrainte de masse nulle. Elle définit aussi la fonction d'onde associée à la perturbation scalaire (non massive donc),

$$h(x, z) = C e^{2\tilde{\sigma}(z)} \varphi(x), \quad (4.29)$$

dont le coefficient C est fixé par la normalisation du terme cinétique correspondant en quatre dimensions.

Nous obtenons donc la théorie effective. Pour chaque mode massif, l'action s'écrit

$$S_{(rs)}^{(m \neq 0)} = \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{(m)\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta}^{(m)} - \frac{1}{4} m^2 h^{(m)\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(m)} \right) - \frac{1}{2} \chi_{(m)}(z_c) h^{(m)\mu\nu} T_{\mu\nu} \right], \quad (4.30)$$

où le couplage à la matière est défini par la valeur de la fonction d'onde sur la membrane visible $\chi_{(m)}(z_c)$. Pour les modes de masse nulle (théorie effective à basse énergie), nous obtenons une théorie de Brans-Dicke :

$$S_{(rs)}^{(m=0)} = \int d^4x \left[\left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{(0)\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta}^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right) - \sqrt{\frac{\kappa_{(4)}}{2}} \left(h^{(0)\mu\nu} T_{\mu\nu} + \alpha_{(rs)} \varphi T \right) \right]. \quad (4.31)$$

La fonction d'onde constante du graviton non massif, donnée par la relation

$$\chi_{(0)}^2 = \frac{4k}{M_{(5)}^3 (1 - e^{-2\tilde{\sigma}(z_c)})}, \quad (4.32)$$

identifie par définition le couplage gravitationnel nu habituel ($\chi_{(0)}^2 = 2\kappa_{(4)}$). Par conséquent, la relation entre les échelles de masse effective ($M_{(4)}^{-2} = \kappa_{(4)}/2$) et fondamentale s'écrit

$$M_{(4)}^2 = \frac{M_{(5)}^3}{k} \left(1 - e^{-2\tilde{\sigma}(z_c)} \right). \quad (4.33)$$

Le couplage scalaire relatif explose exponentiellement [GT00, CGR00, PRZ00] :

$$\alpha_{(rs)} = \frac{e^{\tilde{\sigma}(z_c)}}{\sqrt{3}} \quad (4.34)$$

$$\omega_{(rs)} = -\frac{3}{2} \left(1 - e^{-2\tilde{\sigma}(z_c)} \right). \quad (4.35)$$

Remarquons que pour une courbure nulle, $k = 0$, nous retombons effectivement sur les résultats des modèles *ADD* en cinq dimensions. L'équation différentielle (4.28) admet pour solutions les exponentielles imaginaires définissant la décomposition de Fourier ($\chi_{(m)}^2 \rightarrow \chi_{(n)}\chi_{(-n)}$) et le spectre de masse est défini par la relation $m = n/R$. La théorie effective à basse énergie est définie par une théorie de Brans-Dicke dont le couplage scalaire est donné par $\alpha_{(5)} = 1/\sqrt{3}$ ($\omega_{(5)} = 0$). Comme nous l'avons suggéré, la majoration du couplage scalaire dans le modèle *RS* est liée au mode de vibration de la membrane visible dans la cinquième dimension.

4.3 Modes massifs

L'objectif de cette section est d'obtenir le spectre des excitations massives du graviton et les couplage associés [RS99b, Boo02]. Une intégration par parties de la contrainte (4.28) donne l'équation différentielle linéaire simple suivante pour la fonction d'onde des états de spin 2 massifs :

$$\chi''(z) - 3\tilde{\sigma}'\chi'(z) = -m^2\chi(z). \quad (4.36)$$

Si nous redéfinissons la fonction d'onde par $\psi(z) = e^{-3/2\sigma}\chi(z)$, cette équation prend la forme canonique d'un puits de potentiel en mécanique quantique, avec la normalisation habituelle de la fonction d'onde de l'état étudié⁷ :

$$\frac{1}{4}M_{(5)}^3 \int dz \psi^2(z) = 1, \quad (4.37)$$

$$\left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z) \right] \psi(z) = \frac{1}{2}m^2\psi(z), \quad (4.38)$$

pour le potentiel

$$V(z) \equiv \frac{15}{8}k^2 e^{-2\tilde{\sigma}(z)} - \frac{3}{2}k \left(\delta(z) - e^{-\tilde{\sigma}(z_c)}\delta(z - z_c) \right). \quad (4.39)$$

Au voisinage de l'origine, le potentiel ressemble à une distribution $\delta(z)$, augmentée d'une barrière de potentiel, qui lui confère l'allure d'un "potentiel volcan". Un puits de potentiel donné par une distribution $\delta(z)$ admet un état lié unique. L'équation exacte produit effectivement un état lié donné par la solution de masse nulle que nous avons déjà établie :

$$\psi_{(0)}(z) = \sqrt{2\kappa_{(4)}} e^{-3/2\tilde{\sigma}(z)}. \quad (4.40)$$

Considérons maintenant l'équation pour $m \neq 0$. Les distributions delta introduites par les tensions sur chacune des deux membranes définissent des conditions aux limites à imposer aux solutions générales (conditions de saut). Les coefficients de l'équation résiduelle n'étant

⁷Les relations donnant les dérivées de $\tilde{\sigma}(z)$ peuvent être utiles dans l'établissement de l'équation pour $\psi(z)$: $\tilde{\sigma}'(z) = e^{-\tilde{\sigma}} \operatorname{sgn}(z)k$ et $\tilde{\sigma}''(z) = -e^{-2\tilde{\sigma}}k^2 + 2e^{-\tilde{\sigma}}k(\delta(z) - \delta(z - z_c))$.

fonction que de la variable $x = m(|z| + 1/k) > 0$, il est naturel de définir une fonction d'onde $\tilde{\psi}(x) = \psi(z)$. L'équation correspondante s'écrit

$$\tilde{\psi}''(x) + \left(1 - \frac{15}{4x^2}\right) \tilde{\psi}(x) = 0, \quad (4.41)$$

dont les solutions (qui, en termes de z , seront naturellement paires comme la symétrie \mathcal{Z}_2 l'impose) sont données par les fonctions de Bessel⁸ d'ordre 2, $Y_2(x)$ et $J_2(x)$. Considérons donc l'expression la plus générale,

$$\tilde{\psi}(x) = N_m \sqrt{x} (Y_2(x) + R J_2(x)), \quad (4.42)$$

où N_m est un coefficient défini par la normalisation (4.37) et R une constante arbitraire. Sous les hypothèses de parité et de continuité de la fonction d'onde, les conditions de saut en $z = 0$ et $z = z_c$ sont définies, à partir de l'équation (4.38), par

$$\psi'(0^+) = -\frac{3}{2}k\psi(0) \quad (4.43)$$

$$\psi'(z_c^-) = -\frac{3}{2}k e^{-\tilde{\sigma}(z_c)} \psi(z_c). \quad (4.44)$$

Les valeurs $\psi'(0^+)$ et $\psi'(z_c^-)$ représentent les dérivées de la fonction d'onde en $z = 0$ et $z = z_c$. Les limites sont prises pour des valeurs supérieures à 0 et inférieures à z_c respectivement (la fonction d'onde étant paire, sa dérivée est impaire sous parité dans la cinquième dimension). La première condition fixe le poids relatif des solutions $Y_2(x)$ et $J_2(x)$: $R = 4k^2/\pi m^2$. La seconde contrainte, associée à la compactification de la dimension supplémentaire, définit naturellement la discrétisation du spectre de masse. Cette condition n'est satisfaite que pour des valeurs de masses telles que les fonctions de Bessel sont dans leur régime asymptotique $x > 1$,

$$\sqrt{x}J_2(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \frac{5\pi}{4}\right) \quad (4.45)$$

$$\sqrt{x}Y_2(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(x - \frac{5\pi}{4}\right). \quad (4.46)$$

Dans ce régime, la forme générale de la solution (4.42) se réduit dans la variable z (pour des masses bien en dessous de la masse de Planck $m/k \ll 1$) à

$$\psi(z)|_{(mz_c > 1)} \simeq \frac{4k^2}{\pi m^2} N_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(m|z| - \frac{5\pi}{4}\right). \quad (4.47)$$

Le spectre de masse est donc défini à l'échelle du TeV , et par l'équation

$$\tan\left(mz_c - \frac{5\pi}{4}\right) \simeq \frac{3}{2} \frac{1}{mz_c}, \quad (4.48)$$

⁸Les fonctions de Bessel d'ordre ν , $Y_\nu(x)$ et $J_\nu(x)$ sont les solutions générales de l'équation de Bessel :

$$W''(x) + \frac{1}{x}W'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)W(x) = 0.$$

dont les solutions pour m sont approximativement données comme $m_{(n=0)} \simeq \pi/2z_c$ et $m_{(n \geq 1)} \simeq (\pi/4 + n\pi)/z_c$. En bonne approximation, la normalisation (N_m) est fixée à partir des solutions asymptotiques :

$$\psi_{(m_n)}(z) \simeq \frac{2}{\left(M_{(5)}^3 z_c\right)^{1/2}} \cos\left(m(|z| + 1/k) - \frac{5\pi}{4}\right). \quad (4.49)$$

Les couplages eux-mêmes des modes massifs sont donc régis par l'échelle électrofaible (sous la condition expresse que $M_{(4)} = \bar{M}_{Pl}$) :

$$\chi_{(m_n)}(z_c) \simeq \frac{2e^{\tilde{\sigma}(z_c)}}{M_{(4)}} \left(\simeq e^{\tilde{\sigma}(z_c)} \chi_{(0)}\right) \simeq 1 TeV^{-1}. \quad (4.50)$$

La structure de l'interaction induite par ces excitations massives est par conséquent fort différente du cas des dimensions supplémentaires plates, où les masses s'échelonnent sur une échelle extrêmement fine (pour un faible nombre de dimensions supplémentaires), pour des couplages définis par l'échelle de Planck. Dans le cadre présent, masses et couplages sont donnés par l'échelle électrofaible.

4.4 Phénoménologie

Aux énergies atteintes actuellement en laboratoire ($\leq 100 GeV$) aucune contrainte expérimentale ne peut être posée. Cependant, à des énergies de l'ordre du TeV , accessibles aux expériences futures, ces résonances sont détectables individuellement et peuvent être étudiées en détail à partir de leurs produits de désintégration [RS99b]. Il s'agit là de la signature phénoménologique principale, à travers laquelle la théorie est effectivement sujette aux vérifications expérimentales, en des termes extrêmement différents des modèles *ADD*.

La structure du potentiel d'interaction complet est aussi très différente de celle des autres théories en dimensions supplémentaires, mais les modifications de la loi en $1/r$ sont absolument inaccessibles à l'expérience. La géométrie de l'espace total étant non triviale, le potentiel d'interaction classique sur la membrane ne peut être défini aisément à partir de la théorie originale en cinq dimensions. Dans le cadre de la théorie effective par contre, nous savons que le potentiel complet pour l'interaction statique entre deux corps m_1 et m_2 est donné par les potentiels de Yukawa induits par l'échange de gravitons massifs, en sus de l'interaction newtonienne habituelle $V_0(r)$ définie par les modes de masse nulle :

$$V(r) = V_0(r) + \sum_{m_n} V_{m_n}(r). \quad (4.51)$$

Le couplage important (TeV^{-1}) de chacun de ces modes massifs donne la contribution individuelle suivante :

$$V_{(m_n)}(r) \simeq -Gm_1m_2 \frac{e^{2\tilde{\sigma}(z_c)} e^{-m_n r}}{r}. \quad (4.52)$$

Mais, la masse de ces modes étant donnée par l'échelle du TeV , une telle contribution ne prend d'importance par rapport au potentiel de Newton qu'à des distances extrêmement petites ($r \sim \tilde{\sigma}/m_n \sim 80/m_n$), de l'ordre de l'échelle électrofaible pour les premières masses du spectre. Le potentiel d'interaction est donc donné en très bonne approximation par le potentiel de Newton, même bien au-delà des énergies accessibles aux expériences actuelles et futures testant la loi en $1/r$.

Les modes massifs peuvent donc être négligés à basse énergie, où la gravitation est définie par l'échange d'un mode tensoriel (le graviton) et d'un mode scalaire fort, dont la présence est critique à plusieurs titres. Au niveau théorique d'une part, la relation (4.4) entre l'échelle fondamentale de la théorie originale ($M_{(5)}$) et l'échelle de Planck \bar{M}_{Pl} , est indispensable à l'établissement d'un modèle sans hiérarchie d'échelle. En vertu de l'équation (4.33), cette identité n'est effectivement établie que si, et seulement si, l'échelle de masse nue $M_{(4)}$ est identifiée à la masse de Planck réduite. Or, dans le contexte de la théorie de Brans-Dicke définie par les modes de masse nulle, la relation entre l'échelle de Planck et $M_{(4)}$ est donnée comme $\bar{M}_{Pl}^{-2} = (1 + \alpha_{(rs)}^2)M_{(4)}^{-2}$. Par conséquent, la théorie ainsi définie, avec une contribution scalaire dominant exponentiellement la contribution tensorielle habituelle, semble lourdement mise en défaut. D'autre part, la valeur $\alpha_{(rs)}$ est en décalage profond avec la contrainte expérimentale définie par les tests classiques de la gravitation à l'échelle de notre système solaire : $\alpha_{(exp)} \leq 1.4 \times 10^{-4}$ (voir (1.92)). Fort heureusement, comme nous l'avons vu, la dynamique de la compactification d'une dimension supplémentaire doit inévitablement fournir un mécanisme de stabilisation. De manière générale, la stabilisation est réalisée à travers l'introduction d'un potentiel pour le champ scalaire, qui acquiert une masse et se trouve exclu de la théorie effective à basse énergie. Dans le cadre du modèle *RS* [GW99a, GW99b, GW00, Csá00], la masse associée au champ scalaire est naturellement de l'ordre du *TeV*, bien au-delà de la contrainte expérimentale ($m_\varphi \geq 2 \times 10^{-4} eV$) relative à l'introduction d'un terme de Yukawa dans le potentiel d'interaction. La théorie effective à basse énergie donne donc une interaction purement tensorielle, équivalente à la gravitation en champ faible définie par la Relativité Générale⁹. Masse nue $M_{(4)}$ et masse de Planck sont identifiées, et le modèle peut prétendre être défini à partir d'une échelle fondamentale unique (voir (4.4)).

En conclusion, aucune contrainte expérimentale n'existe sur cette théorie dans les domaines de distance et d'énergie accessibles aux expériences gravitationnelles et électrofaibles actuelles, mais des signatures fortes sont attendues en laboratoire à des énergies de l'ordre du *TeV*.

Conclusion

Proposer une dimension supplémentaire (unique et compactifiée) pour la propagation de l'interaction gravitationnelle dans une géométrie non factorisable, revient encore à définir la gravitation en termes d'une tour infinie d'excitations massives en sus du graviton de masse nulle habituel. La théorie effective à basse énergie s'identifie à nouveau à la Relativité Générale. La géométrie non triviale rend l'identification des modes massifs beaucoup plus subtile que dans le cadre des modèles *ADD* et modifie fondamentalement la phénoménologie : pour une échelle fondamentale à la masse de Planck, les masses et couplages sont donnés à l'échelle électrofaible (*TeV*). Par conséquent, des signatures particulières apparaissent au *TeV*, en termes desquelles cette théorie sera rapidement sujette à des vérifications expérimentales, mais les contraintes expérimentales définies par les expériences gravitationnelles et électrofaibles actuelles sont d'emblée satisfaites. Par ailleurs, la course d'un facteur géométrique exponentiel sur la dimension supplémentaire semble apporter une réponse réelle au problème de la hiérarchie des couplages gravitationnel et électrofaible. Notons que beaucoup d'autres modèles ont déjà été imaginés depuis l'introduction de ce modèle original. Certains admettent la pos-

⁹Notons que le mécanisme particulier introduit pour la stabilisation de la dimension supplémentaire permet de libérer la contrainte d'identification des tensions sur chacune des membranes ($V_{(hid)} \neq V_{(vis)}$), en conservant toutefois un ajustement fin pour une constante cosmologique effective nulle ($\Lambda_{(4)} = 0$).

sibilité d'une constante cosmologique effective non nulle [KR01a, KKR01, KR01b], d'autres imaginent l'existence de plusieurs dimensions supplémentaires dans cette géométrie.

Replaçons-nous dans la perspective de l'établissement de contraintes importantes sur des charges auxiliaires de gravitation en termes de l'étude de radiations dipolaires dominantes liées à la violation du Principe d'Equivalence Fort. Nous pouvons nous attendre à ce que ces théories en dimension supérieure définissent des champs de gravitation auxiliaires de masse nulle à partir des composantes extradimensionnelles de la métrique. Mais les théories considérées admettent un secteur gravitationnel à basse énergie identique à celui de la Relativité Générale. Les raisons qui sont à la base de cette réduction importante sont les suivantes. D'une part, le confinement de la matière en quatre dimensions supprime les couplages vectoriels. D'autre part, la nécessité d'un mécanisme de stabilisation des dimensions compactifiées supprime le couplage scalaire lié à la mesure de ces dimensions. Pour des dimensions supplémentaires dans un espace plat, la compactification est essentielle pour satisfaire aux contraintes expérimentales gravitationnelles et électrofaibles. En annexe, nous montrons que cette hypothèse n'est pas indispensable dans le cadre d'une géométrie non factorisable [RS99b, LR00]. Dans ce cadre, aucune contrainte de stabilisation n'affecte un éventuel couplage scalaire. Malheureusement, dans le même temps, les perturbations de la mesure d'une dimension infinie perdent leur sens, et le couplage du mode scalaire associé tombe naturellement à zéro (voir annexe B). Dans le chapitre suivant, nous (ré)envisageons la possibilité que les champs de matière se propagent, comme la gravitation, en dimension supérieure.

Chapitre 5

Systèmes binaires et contraintes

Dans ce dernier chapitre, nous poursuivons l'étude de l'interaction gravitationnelle définie par la présence de champs auxiliaires en quatre dimensions, dans l'analyse des radiations gravitationnelles dipolaires dominantes associées. Nous généralisons d'abord la relation établie au chapitre 2 entre la violation du Principe d'Equivalence Fort et les radiations dipolaires, en termes du concept général de charge gravitationnelle (section 5.1). Dans la deuxième section, nous revenons sur les théories de Brans-Dicke, première extension minimale de la Relativité Générale, où la charge gravitationnelle auxiliaire est identifiée par l'énergie de liaison gravitationnelle interne de corps compacts. Dans le cadre de la théorie linéarisée, nous redécrivons certains résultats dans une approche centrée sur cette notion de charge auxiliaire. Nous développons ensuite un modèle original [GW02], inspiré par notre étude des espaces-temps de dimension supérieure, définissant une théorie où les champs de matière se propagent dans des dimensions supplémentaires au même titre que la gravitation. A basse énergie, la théorie effective en quatre dimensions s'identifie à une théorie vecteur-tenseur de gravitation, dont la charge vectorielle est définie par la quantité de mouvement transverse des corps (section 5.3). Enfin, l'analyse de la décroissance orbitale de pulsars binaires suggère des contraintes nouvelles sur ces couplages gravitationnels (scalaire et vectoriel) au-delà de la Relativité Générale (section 5.4). Les limites obtenues sur la composante scalaire pourraient en fait atteindre le niveau de précision attendu des expériences futures dédiées à l'étude du couplage associé.

5.1 Charges gravitationnelles

En électromagnétisme, la formule classique de Larmor [Jac75, LL66b] pour le taux de radiation dû à des mouvements cycliques de charges est donnée par

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{6\pi c^3} \ddot{D}^i \ddot{D}^i, \quad (5.1)$$

où $D^i = \sum_a q_a r_a^i$ est le moment dipolaire pour une source constituée d'un ensemble de charges électriques q_a .

Dans la théorie purement tensorielle d'Einstein, l'analogie gravitationnel de la charge électrique q est la masse m elle-même. La conservation de la quantité de mouvement dans la limite non relativiste interdit les radiations dipolaires gravitationnelles et la structure quadrupolaire domine. Intuitivement, nous pouvons nous assurer de la présence de radiations gravitationnelles dipolaires en plongeant la théorie d'Einstein dans un espace-temps de dimension supérieure (disons en dimension 5). La projection d'un mouvement quadrupolaire

sur notre univers quadridimensionnel correspond alors à un mouvement dipolaire (FIG. 5.1) :

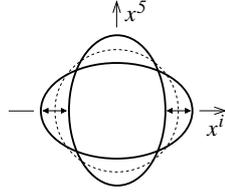


FIG. 5.1 – Dipole comme projection d’un quadrupole extradiimensionnel.

En effet, l’action pour le mouvement géodésique d’une particule-test en cinq dimensions,

$$S = -c \int m ds^{(5)}, \quad (5.2)$$

se réduit dans l’approximation de champ faible et pour $u^5 \ll c$, à

$$S \simeq - \int \left[mc + \left(m \frac{u^5}{c} \right) u^\mu g_{5\mu} \right] ds, \quad (5.3)$$

si $ds = cd\tau$ est l’élément de longueur infinitésimal en quatre dimensions ($u^\mu = dx^\mu/d\tau$ et $u^5 = dx^5/d\tau$). Une seconde charge gravitationnelle est définie dans le second terme de cette action : mu^5/c . Elle est associée au champ vectoriel $g_{5\mu}(\vec{x}, t)$ en quatre dimensions. Une interaction gravitationnelle vectorielle semblable à l’électromagnétisme apparaît donc et des radiations dipolaires sont permises si les corps se propagent dans la dimension supplémentaire avec une vitesse “intrinsèque” constante. Nous envisageons cette possibilité en détail dans la section 5.3. Notons pour l’instant que l’action (5.3) implique les équations du mouvement suivantes :

$$m\dot{u}^\alpha + m\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu \simeq c^2 \left(m \frac{u^5}{c} \right) (g_5^{\rho,\alpha} - g_5^{\alpha,\rho}) \frac{u_\rho}{c}. \quad (5.4)$$

Par conséquent, l’accélération d’un corps dans le référentiel en chute libre est non nulle dans la limite non relativiste ($v^5 = dx^5/dt$) :

$$\vec{a} - \vec{g} \simeq -c^2 \left(\frac{v^5}{c} \right) \vec{\nabla} g_{50}. \quad (5.5)$$

Le terme de droite étant de nature gravitationnelle, le Principe d’Equivalence est violé à travers une perte de l’universalité de la chute libre. Tous les corps chargés (mv^5/c) sont sujets à une accélération anormale. Nous établissons ainsi une connexion générique entre l’existence de radiations dipolaires et la violation du Principe d’Equivalence, liée à l’existence d’une charge de gravitation auxiliaire. Nous généralisons par là le résultat établi dans la section 2.4 pour les théories métriques de gravitation en quatre dimensions. Rappelons que dans ce cadre, la masse de corps compacts dépend de la valeur asymptotique locale des champs auxiliaires de gravitation ϕ . Il en résulte une charge gravitationnelle auxiliaire (ms) associée à une violation du Principe d’Equivalence dans sa version forte seulement.

5.2 Théories de Brans-Dicke

Dans notre étude des théories scalaire-tenseur au premier chapitre, nous avons déjà insisté sur le fait que la masse de corps étendus dépend naturellement de la valeur asymptotique

locale du champ scalaire [Ear75]. La raison en est que l'interaction scalaire survit même dans un référentiel en chute libre, modifiant par là la structure interne des corps et, par conséquent, leur masse totale. Par souci de simplicité, les corps compacts sont traités comme des corps ponctuels, bien qu'ils présentent une dépendance explicite de leur masse dans le champ scalaire. L'action définissant les théories de Brans-Dicke est alors donnée par les équations (1.133) et (1.134) :

$$S^{(bd')} = -\frac{c^3}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \Phi^{,\alpha} \Phi_{,\alpha} \right) - c \sum_a \int m_a(\Phi) ds_a. \quad (5.6)$$

Nous nous intéressons encore une fois à la théorie linéarisée. Soit Φ_0 la valeur cosmologique du champ scalaire, nous définissons les perturbations de la métrique et du champ scalaire de manière légèrement différente par rapport aux relations (1.157) :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \sqrt{2c\kappa'} (h_{\mu\nu} - \alpha \eta_{\mu\nu} \varphi) \\ \Phi &= \Phi_0 \left(1 + \alpha \sqrt{2c\kappa'} \varphi \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dans cette décomposition, le champ $h_{\mu\nu}$ intègre uniquement la partie tensorielle des champs de gravitation (sans nécessité d'introduire la variable $\theta_{\mu\nu}$). La théorie linéarisée est donnée par la décomposition directe suivante :

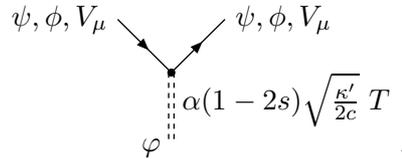
$$S_{(bd')}^{(2)} = S_{(rg)}^{(2)}(h_{\mu\nu}, \kappa') + S_{(sc')}^{(2)}(\varphi, \alpha(1-2s)). \quad (5.8)$$

La partie tensorielle est donnée par l'action linéaire habituelle. La partie scalaire est la généralisation de l'action (1.160), tenant compte d'une interaction supplémentaire pour des corps compacts :

$$S_{(sc')}^{(2)}(\varphi, \alpha(1-2s)) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) + \alpha \sqrt{\frac{\kappa'}{2c}} \varphi T (1-2s) \right]. \quad (5.9)$$

Une seconde charge gravitationnelle apparaît donc en termes de la sensibilité des corps $s = (\partial \ln m / \partial \ln \Phi)|_{\Phi_0}$, qui n'est autre que l'énergie de liaison gravitationnelle interne (voir (1.146)).

Par conséquent, en termes de théorie des champs, la cinétique est toujours définie par les mêmes propagateurs, identifiés par les relations (1.155) et (1.161). Seul le couplage scalaire est modifié :



Violation du Principe d'Equivalence Fort

Le potentiel classique d'interaction est donné par l'amplitude de diffusion standard entre deux champs ψ_1 et ψ_2 , évaluée dans la limite non relativiste statique. Pour le couplage scalaire-tenseur modifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(bd')}(\psi_1\psi_2 \rightarrow \psi_1\psi_2) &= \begin{array}{c} \psi_1 \quad \psi_1 \\ \searrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \psi_2 \quad \psi_2 \end{array} h_{\mu\nu} + \begin{array}{c} \psi_1 \quad \psi_1 \\ \searrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \nearrow \quad \searrow \\ \psi_2 \quad \psi_2 \end{array} \varphi \\
&= \frac{1}{c} \mathcal{N} (1 + \alpha^2 (1 - 2s_1)(1 - 2s_2)) G' m_1 m_2 \left(\frac{4\pi}{-\vec{q}^2} \right), \quad (5.10)
\end{aligned}$$

où \mathcal{N} est le coefficient de normalisation standard, et \vec{q} la composante spatiale du moment de transfert. Cette amplitude définit bien une interaction newtonienne avec pour constante de couplage

$$G_{12} = (1 + \alpha^2 (1 - 2s_1)(1 - 2s_2)) G'. \quad (5.11)$$

Pour des particules-tests (non compactes en l'occurrence), la constante de couplage se réduit à l'expression habituelle définissant la constante de Newton G en fonction du couplage nu G' . L'expression générale pour G_{12} en fonction de G est donc effectivement donnée par la relation (1.145), qui définit la violation du Principe d'Equivalence Fort dans la limite non relativiste.

Dipole scalaire

Comme nous l'avons remarqué au premier paragraphe de cette section, la source du champ scalaire dans notre théorie linéarisée est $m(1 - 2s)$ plutôt que la masse m elle-même. La sensibilité s représente une nouvelle forme de charge gravitationnelle. Par conséquent, des radiations monopolaires sont toujours interdites à cet ordre par conservation de la charge, mais des radiations dipolaires (induites par la charge ms) apparaissent comme dans le cas de l'électromagnétisme. La procédure standard pour obtenir le taux d'émission d'énergie sous forme de radiations scalaires dipolaires consiste à développer la solution radiative pour φ en moments multipolaires, pour l'introduire dans le tenseur énergie-moment associé au champ scalaire. La variation de l'action linéarisée donne l'équation d'onde

$$\square\varphi = \alpha\sqrt{\frac{\kappa'}{2c}} T (1 - 2s), \quad (5.12)$$

où le tenseur énergie-moment est calculé sur l'espace de Minkowski ($T = \rho c^2$). Cette équation est valable à des corrections $\mathcal{O}(1/c^2)$ près. Dans la zone d'onde et pour des mouvements lents, la solution radiative se développe en moments multipolaires. Dans le cadre de notre théorie linéarisée, seuls les termes monopolaire (dominant) et dipolaire (correction d'ordre $\mathcal{O}(1/c)$) prennent tout leur sens. Aussi, omettant le premier terme $\varphi \simeq \int d^3\vec{x}' T(1 - 2s)$ constant, nous écrivons la solution radiative comme une solution purement dipolaire :

$$\varphi(\vec{x}, t) \simeq \frac{\alpha}{4\pi R} \sqrt{\frac{c\kappa'}{2}} n_i \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\vec{x}' x'^i (1 - 2s) \rho(\vec{x}', t - R/c). \quad (5.13)$$

R est la distance à la source. Le temps $t - R/c$ identifie l'instant d'émission de l'onde, et le vecteur unitaire $\vec{n} = \vec{x}/R$ définit la direction source - observateur (ligne de visée), dans un référentiel où la source est à l'origine. Le premier terme (indépendant de s) n'est autre que

la quantité de mouvement totale du système, qui est conservée dans la limite non relativiste. Ce terme ne contribue donc pas à la dynamique. Reste le second terme dipolaire induit par la charge s :

$$\varphi(\vec{x}, t - R/c) \simeq -\frac{\alpha}{2\pi R} \sqrt{\frac{c\kappa'}{2}} n_i \dot{D}_{(s)}^i(t - R/c), \quad (5.14)$$

où le dipole $D_{(s)}^i$ est défini comme

$$D_{(s)}^i = \int d^3\vec{x}' \rho_s x'^i. \quad (5.15)$$

Le tenseur énergie-moment associé au champ scalaire dans l'espace de Minkowski est donné par l'expression générale

$$t_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{cin.}^\varphi}{\partial g^{\mu\nu}} \Big|_{\eta_{\mu\nu}} \quad (5.16)$$

$$= c \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi, \quad (5.17)$$

dont les composantes d'impulsions s'écrivent

$$t^{(\varphi)i0} = \frac{1}{c} \dot{\varphi}^2 n^i. \quad (5.18)$$

Le taux d'émission d'énergie sous forme d'ondes scalaires par unité de temps et d'angle solide s'exprime donc comme

$$\frac{dI^\varphi}{d\Omega} = cR^2 n_i t^{(\varphi)i0} \quad (5.19)$$

$$= R^2 \dot{\varphi}^2 \quad (5.20)$$

$$= \frac{\alpha^2 G'}{\pi c^3} n_i n_j \ddot{D}_{(s)}^i \ddot{D}_{(s)}^j. \quad (5.21)$$

L'intégration sur les angles solides donne le taux moyen d'émission scalaire, purement dipolaire à l'ordre $\mathcal{O}(1/c^3)$:

$$-\frac{dE_{(di)}^\varphi}{dt} = \frac{2}{3} \xi \frac{G}{c^3} \ddot{D}_{(s)}^i \ddot{D}_{(s)}^i. \quad (5.22)$$

Notre approche par la théorie linéarisée écarte *a priori* les contributions scalaires monopolaires et quadrupolaires révélées par l'analyse détaillée du chapitre 2. Ces contributions étant d'ordre $\mathcal{O}(\xi/c^5)$, elles sont de toute façon négligeables en pratique par rapport aux contributions tensorielles $\mathcal{O}(1/c^5)$, ce qui justifie leur omission et notre approche en termes d'une interaction linéaire.

Afin d'éclairer encore notre vision des choses, remarquons que nous pouvons en fait déduire ce résultat par simple analogie avec l'électromagnétisme en identifiant l'interaction scalaire de Brans-Dicke proportionnelle à la sensibilité (voir (5.9)) à l'interaction vectorielle définie par l'action de Maxwell

$$S^{(em)}(q) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{c^{3/2}} A_\mu j^\mu \right], \quad (5.23)$$

où $j^\mu = q \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t)) v^\mu$ est la densité de courant électrique. Substituons donc la charge électrique par l'énergie de liaison gravitationnelle à travers la relation

$$q_{(s)} = \sqrt{16\pi G'} \alpha m s, \quad (5.24)$$

dans notre relation de base (5.1). Prenant en compte un facteur correctif 1/2 de polarisation dans l'identification de $A_\mu v^\mu/c$ à φ , nous obtenons immédiatement le taux de radiation dipolaire donné dans l'équation (5.22). Dans le cas particulier d'une source binaire en mouvement képlérien, le moment dipolaire est donné par $\vec{D}_{(s)} = m_1 s_1 \vec{r}_1 + m_2 s_2 \vec{r}_2$. Nous obtenons ainsi le taux moyen d'émission scalaire dipolaire donné au chapitre 2. Au premier ordre significatif dans le couplage scalaire ξ (identifiant donc les couplages G_{12} et G), nous pouvons écrire

$$\left\langle -\frac{dE_{(di)}^\varphi}{dt} \right\rangle_K = \frac{2}{3} \xi \frac{G^3}{c^3} \frac{\mu^2 M^2}{a^4} (s_1 - s_2)^2 g(e), \quad (5.25)$$

où a et e sont respectivement les demi-grand axe et excentricité de l'orbite réduite du système ; μ et M sont les masses réduite et totale. La fonction $g(e) = (1 + e^2/2)/(1 - e^2)^{5/2}$ est le facteur de majoration.

Ce résultat est à comparer au taux d'émission tensoriel, dont la contribution est donnée (toujours dans le cadre de l'approximation linéaire), à la constante de couplage près, par la formule quadrupolaire standard dans la théorie d'Einstein (équation (A.2)) :

$$-\frac{dE_{(qua)}^h}{dt} = \frac{G'}{5c^5} \ddot{D}^{ij} \ddot{D}_{ij}.$$

Négligeant les corrections introduites par la redéfinition des constantes de couplage¹, le taux moyen de radiations tensorielles s'identifie au résultat de la Relativité Générale (équation (2.26)) :

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle_{(rg)K} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} f(e).$$

Nous avons déjà suffisamment insisté sur le fait que les radiations dipolaires (d'ordre $\mathcal{O}(\xi/c^3)$) vont *a priori* dominer sur les radiations quadrupolaires (d'ordre $\mathcal{O}(1/c^5)$). Avant d'en discuter les implications phénoménologiques, tournons-nous vers l'étude de cette seconde théorie suggérée, où une dynamique dipolaire est attendue à travers l'existence d'un couplage vectoriel de gravitation.

5.3 Théories de "Kaluza"

Nous avons considéré la possibilité de radiations dipolaires induites par couplage d'un champ gravitationnel scalaire à l'énergie de liaison interne de corps compacts. L'alternative que nous considérons ici propose que ces radiations soient induites par couplage entre un champ vectoriel et la quantité de mouvement transverse des corps dans une dimension supplémentaire de notre espace-temps.

Kaluza introduit pour la première fois en 1921 le concept de dimension supplémentaire, dans l'espoir d'unifier les théories de la gravitation et de l'électromagnétisme [Kal21, Kle26, CZ92, Lee84]. Dans sa théorie, la matière classique se propage dans un espace-temps de dimension cinq, et la quantité de mouvement (mv^5/c) dans la cinquième dimension est interprétée comme la charge électrique q par la substitution $q = q_{(v)}$, où la charge vectorielle $q_{(v)}$ est définie par

$$q_{(v)} = \sqrt{16\pi G} \frac{mv^5}{c}. \quad (5.26)$$

¹ G' et G_{12} sont identifiées à G . Une fois de plus, ceci revient à négliger des corrections d'ordre $\mathcal{O}(\xi/c^5)$.

Cependant, cette identification contraint la charge électrique à des valeurs déraisonnablement petites pour les particules élémentaires, ce qui a conduit à l’abandon temporaire du concept de dimension supplémentaire (voir [Don00] pour une revue historique). Les modèles récents en dimension supérieure (*ADD* ou *RS*) confinent les champs de matière sur une 3-membrane de l’espace total. En conséquence, les composantes vectorielles découplent de la théorie linéarisée². Notre modèle réintroduit la matière en dimension supérieure, éliminant le concept de membrane. Mais contrairement à l’idée originale de Kaluza, la nature gravitationnelle du couplage vectoriel est préservée. La théorie vecteur-tenseur suggérée dans la première section de ce chapitre est ainsi précisément définie. Les conséquences observables de la présence d’une charge vectorielle de gravitation pour des phénomènes macroscopiques tels que polarisation orbitale (violation du Principe d’Equivalence) ou émission gravitationnelle dipolaire sont étudiées en détail.

Théorie vecteur-tenseur de gravitation

Nous pouvons donc construire notre modèle par extension des modèles *ADD* en dimension $4 + \delta$ (voir (3.14)). L’absence de confinement augmente le terme d’interaction de la théorie linéarisée aux composantes extradimensionnelles des perturbations de la métrique ($\sim \hat{h}^{MN}(x, y)T_{MN}$, où le tenseur énergie-moment pour la matière est défini dans toutes les dimensions : $T^{MN} = \rho v^M v^N$). Dans la suite, nous admettons par facilité que le mouvement de ces corps est confiné à une direction donnée, disons x^5 . La méthode de “réduction du propagateur” définie au chapitre 3 nous donne immédiatement les couplages supplémentaires. La phénoménologie à haute énergie est modifiée par la présence de couplages d’excitations vectorielles massives. Cependant, dans la perspective de l’étude de phénomènes macroscopiques, nous ne considérons que l’interaction à basse énergie, définie par les modes nuls. L’amplitude de diffusion (3.46) se généralise simplement :

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 4\pi \left[G_{(4)} T_{MN}^{(1)} G^{MN, AB} (q_{(4)}) T_{AB}^{(2)} \right]. \quad (5.27)$$

Nous voyons immédiatement apparaître un couplage vectoriel (\mathcal{M}_0^V) en sus des couplages tensoriel et scalaire (\mathcal{M}_0^{ST} , voir (3.47)) déjà identifiés dans les modèles *ADD* :

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^{ST} + \mathcal{M}_0^V \quad (5.28)$$

$$= \mathcal{M}_0^{ST} + \frac{1}{c^5} \mathcal{N} 16\pi G_{(4)} T_{\mu 5}^{(1)} \frac{-\eta^{\mu\alpha}}{q_{(4)}^2 + i\varepsilon} T_{\alpha 5}^{(2)} \quad (5.29)$$

$$= \mathcal{M}_0^{ST} + \frac{1}{c^3} \mathcal{N} j_{(v)\mu}^{(1)} \frac{-\eta^{\mu\alpha}}{q_{(4)}^2 + i\varepsilon} j_{(v)\alpha}^{(2)}. \quad (5.30)$$

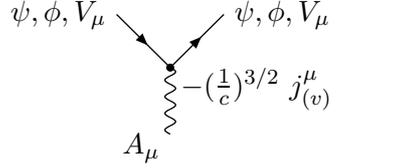
Le propagateur

$$D^{\mu\nu}(q) = \frac{-\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \quad (5.31)$$

identifie la présence d’une interaction vectorielle en quatre dimensions (pour un champ vectoriel non massif). Le courant vectoriel $j_{(v)}^\mu = \rho_{(v)} v^\mu$ est donné en termes de la charge extradimensionnelle $q_{(v)}$ définie par la relation de Kaluza (5.26). Le terme d’interaction correspondant

²De manière générale, remarquons que l’introduction d’une membrane (de tension T) brise inéluctablement la symétrie de jauge $U(1)$ définie par la dimension supplémentaire, vue comme espace interne. Par un mécanisme analogue au mécanisme de Higgs, le champ de jauge associé doit acquérir une masse et découple de la théorie effective à basse énergie ($m_{A_\mu}^2 \sim T/M_{Pl}^2$), même au-delà de l’approximation linéaire [DKS00].

est associé à un vertex trilineaire pour l'interaction entre une composante vectorielle de gravitation et les champs de matière :



Rappelons que $G_{(4)}$ est identifié à la constante de Newton G , la stabilisation des dimensions supplémentaires donnant une masse à la composante scalaire d'interaction φ . La conservation de la charge $q_{(v)}$ découle directement des équations de conservation linéarisées en $4 + \delta$ dimensions, par intégration sur le volume des dimensions compactifiées ($T^M{}_{;N} = 0$). Au premier ordre dans cette charge vectorielle, le modèle s'identifie donc à une théorie vecteur-tenseur de gravitation³. La partie tensorielle est donnée par l'action habituelle pour la Relativité Générale et la partie vectorielle, par l'action de Maxwell, pour la charge gravitationnelle $q_{(v)}$:

$$S_{(kal)} = S_{(rg)}^{(2)}(h_{\mu\nu}, \kappa) + S^{(em)}(q_{(v)}) . \quad (5.32)$$

Violation du Principe d'Equivalence

Le potentiel classique pour l'interaction gravitationnelle ainsi définie est donc donné par une amplitude de diffusion vecteur-tenseur (encore une fois dans la limite non relativiste statique). Considérant deux champs ψ_1 et ψ_2 , cette amplitude s'écrit :

³Une analyse complète de l'amplitude (5.27) révèle la présence de couplages scalaires additionnels portés par des charges proportionnelles au carré de la vitesse extradimensionnelle ($\mathcal{O}(v^5/c^2)$). Pour insister sur la puissance de la méthode de réduction du propagateur par rapport à la réduction standard de la métrique, nous établissons ci-dessous ces contributions. Tout comme nous nous attendions à la présence d'un couplage vectoriel associé aux composantes non diagonales de la métrique, nous savons que des champs scalaires sont associés aux composantes extradimensionnelles. La réduction de la métrique au chapitre 3, nous suggère déjà la présence de ces champs φ_0^{mn} , dont aucun ne couple à la matière, si celle-ci est confinée sur la membrane (voir (3.29)). A l'ordre 2 dans la vitesse v^5/c , le couplage scalaire dans l'amplitude de diffusion (3.47) est redéfini par :

$$\alpha_{(4+\delta)}^2 \rightarrow \alpha_{(4+\delta)}^2 + (1 - \alpha_{(4+\delta)}^2) \left(\left(\frac{v_1^5}{c} \right)^2 + \left(\frac{v_1^5}{c} \right)^2 \right) + (1 + \alpha_{(4+\delta)}^2) \left(\frac{v_1^5}{c} \right)^2 \left(\frac{v_1^5}{c} \right)^2 .$$

D'une part, techniquement, le terme proportionnel à $(1 - \alpha_{(4+\delta)}^2)$ introduit une modification du couplage au scalaire de trace $\varphi \equiv \eta^{mn} \varphi_{mn}$. Mais ce couplage ne produit pas l'entière du terme en $(1 + \alpha_{(4+\delta)}^2)$, et le terme résiduel doit correspondre au couplage d'un autre scalaire $\tilde{\varphi}$ (combinaison appropriée des champs φ_0^{mn}) à la matière. Les termes effectifs d'interaction scalaire correspondants peuvent être définis (pour une normalisation canonique des termes cinétiques) par

$$S_{(int)}^{(lin)}(\varphi, \tilde{\varphi}) = -\sqrt{\frac{\kappa_{(4)}}{2c}} \int d^4x \left[\left(\alpha_{(4+\delta)} + \frac{1 - \alpha_{(4+\delta)}^2}{\alpha_{(4+\delta)}} \left(\frac{v^5}{c} \right)^2 \right) \varphi T + \frac{\sqrt{3\alpha_{(4+\delta)}^2 - 1}}{\alpha_{(4+\delta)}} \left(\frac{v^5}{c} \right)^2 \tilde{\varphi} T \right] .$$

Pratiquement, la stabilisation des dimensions supplémentaires introduit un terme de masse pour chacun de ces champs, qui découple de l'interaction à basse énergie.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0(\psi_1\psi_2 \rightarrow \psi_1\psi_2) &= \begin{array}{c} \psi_1 \swarrow \quad \searrow \psi_1 \\ \quad \quad \quad \circ \\ \psi_2 \swarrow \quad \searrow \psi_2 \end{array} h_{\mu\nu} + \begin{array}{c} \psi_1 \swarrow \quad \searrow \psi_1 \\ \quad \quad \quad \circ \\ \psi_2 \swarrow \quad \searrow \psi_2 \end{array} A_\mu \\
&= \frac{1}{c} \mathcal{N} \left(1 - 4 \frac{v_1^5 v_2^5}{c^2} \right) G m_1 m_2 \left(\frac{4\pi}{-q^2} \right). \quad (5.33)
\end{aligned}$$

L'interaction newtonienne est donc définie par la constante de couplage renormalisée suivante :

$$G_{12} \equiv G \left(1 - 4 \frac{v_1^5 v_2^5}{c^2} \right). \quad (5.34)$$

Cette relation nous donne l'expression mathématique exacte de la violation du Principe d'Equivalence dans nos théories (vecteur-tenseur) extradimensionnelles. Une accélération anormale est attendue pour des corps chargés vectoriellement. Remarquons quelques différences fondamentales avec le cas des théories (scalaire-tenseur) de Brans-Dicke. D'une part, nous ne savons pas comment la charge extradimensionnelle (mv^5/c) est liée à la nature du corps considéré. En particulier, il n'y a aucune raison de se restreindre uniquement à l'étude de corps possédant une énergie de liaison gravitationnelle interne importante (corps célestes, compacts). Il ne s'agit pas ici que d'une violation du Principe d'Equivalence Fort, comme dans les théories métriques en quatre dimensions. Des expériences du type de celle d'Eötvös doivent aussi être considérées dans ce contexte, et permettre d'obtenir des contraintes fortes sur la charge extradimensionnelle (vectorielle) [Su94] de corps étudiés en laboratoire. D'autre part, une accélération anormale est aussi attendue pour des corps célestes dans un champ de gravitation, avec cependant deux différences conceptuelles importantes. D'abord, les deux objets considérés doivent être chargés (voir (5.33)). Ensuite, l'interaction additionnelle étant de nature vectorielle, cette partie anormale du mouvement peut aussi bien correspondre à une accélération qu'à une décélération. Par contre, les expressions analytiques pour les taux de radiation dipolaires scalaire et vectoriel sont en fait identiques, aux charges près.

Dipole vectoriel

La partie vectorielle de l'action effective étant donnée par l'action de Maxwell, des radiations dipolaires vectorielles sont inévitables. Le taux d'émission correspondant est donné par la substitution de la charge électrique par la charge extradimensionnelle $q_{(v)}$ dans la formule de Larmor (5.1) :

$$-\frac{dE_{(di)}^A}{dt} = \frac{8}{3} \frac{G}{c^3} \ddot{D}_{(v)}^i \ddot{D}_{(v)}^i, \quad (5.35)$$

où le moment dipolaire est donné par $D^i \equiv \int d^3x (\rho v^5/c) x^i$. Au premier ordre significatif dans les vitesses ($G_{12} \rightarrow G$), le taux de radiation dipolaire induit par le mouvement képlérien dans un système binaire est par conséquent

$$\left\langle -\frac{dE_{(di)}^A}{dt} \right\rangle_K = \frac{8}{3} \frac{G^3}{c^3} \frac{\mu^2 M^2}{a^4} \left(\frac{v_1^5}{c} - \frac{v_2^5}{c} \right)^2 g(e), \quad (5.36)$$

où $g(e)$ est le facteur de majoration précédemment défini pour le dipole scalaire (voir (5.25)).

5.4 Systèmes binaires et contraintes

Les pulsars binaires sont des laboratoires idéaux pour tester la gravitation relativiste, de par l'extrême précision de leur pulse radio. Nous avons étudié le PSR B1913 + 16, double étoile à neutrons découverte par Hulse et Taylor en 1974. L'analyse des temps d'arrivée des pulses fournit une mesure du taux de décroissance de la période orbitale du système en accord avec la prédiction de la Relativité Générale pour l'émission de radiations gravitationnelles. La précision de ce test $\dot{\omega} - \gamma - \dot{T}$ est de 0.35% [Tay93]. Rappelons encore que le PSR B1534 + 12 est le seul autre exemple connu de double étoile à neutrons pour laquelle le taux de décroissance de la période orbitale a été mesuré [Sta98]. Dans ce cas, l'accord avec la Relativité Générale est obtenu dans une limite de précision moindre, de l'ordre de 15%⁴. De nombreuses découvertes [Kas00, EB01, Cam01] de pulsars binaires constitués d'une étoile à neutrons et d'une naine blanche ont été rapportées récemment. Notons que le taux de naissance de ce type de binaires est, selon les modèles les plus récents, au moins aussi important que pour les doubles étoiles à neutrons. Les perspectives pour la mesure des paramètres relativistes dans ces systèmes, décroissance orbitale incluse, sont très encourageantes, en particulier dans le cas du PSR J1141 – 6545 considéré ci-dessous.

Paramètres optimaux

Avant d'en arriver aux considérations phénoménologiques proprement dites, nous voulons définir les conditions optimales sur les paramètres de ces systèmes sous lesquelles les radiations gravitationnelles dipolaires dominent. Le rapport du taux de perte d'énergie scalaire-tenseur (ou vecteur-tenseur) à la prédiction de la Relativité Générale est une expression simple. Il s'exprime en fonction des charges gravitationnelles auxiliaires d'une part, et des seules observables "excentricité" et "précession du périastre" d'autre part. La précession du périastre inclut en fait le facteur de suppression quadrupolaire $\mathcal{O}((v/c)^2)$. D'un point de vue astrophysique, il est plus judicieux d'introduire le rapport correspondant des taux de décroissance de la période orbitale induits par radiation gravitationnelle. Dans l'approximation képlérienne, ces rapports sont identiques (voir (A.32)). Pour les théories de Brans-Dicke, les équations (2.26) et (5.25) mènent, au premier ordre dans le couplage scalaire effectif ξ , à

$$\left\langle \frac{\dot{T}_{(bd)}}{\dot{T}_{(rg)}} \right\rangle_K = \left\langle \frac{\dot{E}_{(bd)}}{\dot{E}_{(rg)}} \right\rangle_K = 1 + \frac{5\pi}{8} \xi (s_1 - s_2)^2 \left(\frac{h(e)}{\Delta\omega} \right). \quad (5.37)$$

Pour notre modèle en dimensions supplémentaires, les équations (2.26) et (5.36) donnent, à l'ordre dominant dans les charges vectorielles, le rapport suivant :

$$\left\langle \frac{\dot{T}_{(vt)}}{\dot{T}_{(rg)}} \right\rangle_K = \left\langle \frac{\dot{E}_{(vt)}}{\dot{E}_{(rg)}} \right\rangle_K = 1 + \frac{5\pi}{2} \left(\frac{v_1^5}{c} - \frac{v_2^5}{c} \right)^2 \left(\frac{h(e)}{\Delta\omega} \right). \quad (5.38)$$

⁴Plus récemment, un nouveau test de la gravitation relativiste a été réalisé [Str01] dans l'étude du plus proche et du plus brillant des pulsars binaires connus dans la Galaxie, le système étoile à neutrons - naine blanche PSR J0437 – 4715. Cependant, ce test n'est pas donné par l'analyse d'effets de radiations, mais à travers la mesure de l'amplitude et de la forme de l'effet de retard (effet Shapiro) subi par le faisceau radio passant périodiquement à proximité du compagnon. Une mesure similaire a été réalisée pour le PSR B1534 + 12, permettant un test de la théorie avec une précision de 1% [Sta98], c'est-à-dire bien meilleure que les résultats de l'analyse de la décroissance orbitale dans le même binaire.

Le paramètre

$$\Delta\omega = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)} \quad (5.39)$$

définit la précession du périastre en radians par révolution dans le cadre de la Relativité Générale, alors que

$$h(e) \equiv \frac{1+e^2/2}{1+73/24e^2+37/96e^4} \quad (5.40)$$

est un facteur de réduction pour des orbites excentriques. Le paramètre crucial est par conséquent $h(e)/\Delta\omega$: plus l'orbite est circulaire ($h(e) \rightarrow 1$) et moins elle est relativiste ($\Delta\omega \rightarrow 0$), plus l'effet relatif des radiations dipolaires est important par rapport aux radiations quadrupolaires. Cependant, pour l'excentricité maximum ($e = 1$), le facteur de réduction $h(e)$ est approximativement 1/3. Son impact sur la question de la dominance dipolaire est donc loin d'être dramatique. Par ailleurs, une précession relativiste orbitale trop petite serait associée à un effet de décroissance orbitale trop ténu pour être observable. Pour fixer les idées, la grande excentricité ($e \simeq 0.62$) et la précession orbitale importante ($\Delta\omega \simeq 6.5 \times 10^{-5} \text{ rad/rev}$ ou encore $\dot{\omega} \simeq 4.2^\circ \text{ an}^{-1}$) du PSR B1913 + 16 [Tay93] ne seront pas considérées comme des valeurs optimales des paramètres pour la dominance du dipole.

Remarquons que ces critères de sélection des binaires donnant les contraintes les plus fortes sur les radiations dipolaires sont analogues à ceux définis pour tester explicitement le Principe d'Équivalence Fort dans un régime de champ fort. Il a été démontré en effet [DS91] que les pulsars binaires de faible excentricité et de longue période orbitale sont aussi les meilleurs laboratoires dans lesquels un mouvement polarisé (vers le centre de la Galaxie) dû à la violation du Principe d'Équivalence Fort peut être mesuré. Cependant, à la lumière de l'alternative suggérée entre une interaction auxiliaire scalaire ou vectorielle, toute contrainte résultant d'une analyse directe du mouvement anomal dû à une violation du Principe d'Équivalence est en principe ambiguë. En effet, une polarisation orbitale faible d'un système binaire (qu'il s'agisse d'un pulsar binaire ou du système Terre - Lune) pourrait être attribuée à une compensation accidentelle entre les perturbations scalaire et vectorielle plutôt qu'à la petitesse des charges scalaire et vectorielle. Par contre, l'analyse indirecte de l'émission dipolaire ne souffre pas de cette ambiguïté puisque, dans ce cas, les taux d'émission scalaire et vectoriel ne font que s'additionner, sans possibilité d'interférence destructive. Ainsi, toute contrainte sur les taux de radiation dipolaire dans les systèmes binaires fournit une limite sur $(v_1^5/c - v_2^5/c)^2$ et $\xi(s_1 - s_2)^2$.

Dipole vectoriel et pulsars binaires

Comme nous l'avons déjà remarqué, nous ne savons pas ce qui détermine exactement la charge vectorielle (mv^5/c) d'étoiles individuelles. Cependant, son origine dans le cadre de théories en dimensions supplémentaires peut être comprise de la façon suivante [Kle26, Cho85, Lee84, et références]. La partie extradimensionnelle de la quantité de mouvement associée à une particule élémentaire se propageant dans les dimensions compactifiées est quantifiée. Les valeurs permises de cette quantité de mouvement transverse identifient en fait la masse m_{KK} des excitations de Kaluza-Klein correspondantes dans la théorie effective en quatre dimensions :

$$P_{(4+\delta)}^2 = P^\mu P_\mu + P^m P_m \quad (5.41)$$

$$= P_{(4)}^2 - (m_{KK}c)^2 . \quad (5.42)$$

Ainsi, nous pouvons envisager la possibilité que de telles excitations massives soient piégées à l'intérieur des étoiles à travers un phénomène d'accrétion gravitationnelle, de la même façon que les *WIMPs* (*Weakly Interacting Massive Particles*) devraient l'être. La charge vectorielle d'objets macroscopiques serait alors définie par la fraction de la masse totale due à la présence de ces particules de Kaluza-Klein :

$$\frac{v^5}{c} \sim \frac{\sum_{KK} m_{KK}}{m}. \quad (5.43)$$

Mais un modèle précis serait nécessaire pour estimer une telle fraction dans les étoiles à neutrons et autres naines blanches. En attendant, les limites obtenues sur v^5/c ne nous donnent que des informations ponctuelles sur le couplage vectoriel.

Dipole scalaire et binaires étoile à neutrons - naine blanche

La sensibilité (s) de chaque corps étant reliée à son énergie de liaison gravitationnelle interne, c'est une grandeur quantifiable en fonction de la nature du binaire considéré. Une contrainte sur le taux d'émission dipolaire peut définir une limite sur le couplage scalaire ξ de la théorie scalaire-tenseur. En particulier, dans un pulsar binaire, la nature de l'étoile compagnon joue un rôle crucial dans le taux de radiation dipolaire scalaire. Dans le cas d'une double étoile à neutrons, les sensibilités sont essentiellement égales ($s_{(ns)} \simeq 0.2$). Cette constatation conduit à un effet de radiations dipolaires scalaires faible (négligeable) puisque le taux d'émission est proportionnel à la différence des sensibilités (voir l'analyse du PSR B1913 + 16, section 2.3). Par contre, une naine blanche est beaucoup moins compacte qu'une étoile à neutrons ($s_{(wd)} \simeq 10^{-3}$). Les binaires plus asymétriques, constitués d'une étoile à neutrons et d'une naine blanche, sont donc particulièrement intéressants dans le cadre de la recherche d'effets de radiations dipolaires. De plus, dans les binaires où l'étoile à neutrons est la première née du système [Kas00], l'excentricité orbitale est en général très faible, ce qui constitue un avantage pour la dominance de l'émission dipolaire. Ainsi, la détermination du taux de décroissance de la période orbitale d'un binaire étoile à neutrons - naine blanche doit offrir des contraintes fortes sur le couplage scalaire de gravitation. Pour illustration, nous nous intéressons en particulier au cas d'un système récemment découvert, le PSR J1141 – 6545, pour lequel les perspectives de mesure des paramètres orbitaux relativistes sont prometteuses [Kas00]⁵. Etant donné l'excentricité ($e \simeq 0.17$) et la précession angulaire relativiste ($\Delta\omega \simeq 5.0 \times 10^{-5} \text{ rad/rev}$ ou $\dot{\omega} \simeq 5.3^\circ \text{ an}^{-1}$) de son orbite, l'équation (5.37) implique le rapport suivant :

$$\left\langle \frac{\dot{T}_{(bd)}}{\dot{T}_{(rg)}} \right\rangle_{|(1141-6545)} \simeq 1 + 1.4 \times 10^3 \xi. \quad (5.44)$$

La vérification expérimentale de la prédiction de la Relativité Générale avec une précision de 10% donnerait déjà une contrainte sur le couplage scalaire de gravitation ξ du même ordre

⁵L'analyse expérimentale suggère en effet qu'il s'agit d'un système constitué d'une étoile à neutrons et d'une naine blanche. La période de rotation propre du pulsar est de $T_p = 0.393\,897\,833\,900\,2(22) \text{ s}$. Les période orbitale, excentricité et projection du demi-grand axe de l'orbite sont respectivement donnés par $T = 0.197\,650\,965(5) \text{ j}$, $e = 0.171\,881(9)$ et $a_p \sin i = 1.859\,45(1) \text{ s lum}$. Le seul paramètre relativiste déjà mesuré est le taux de précession du périastre : $\dot{\omega} = 5.33(2)^\circ \text{ an}^{-1}$. Cette valeur détermine la masse totale du binaire comme $M \simeq 2.300(12) M_\odot$. La fonction de masse (associée à la troisième loi de Kepler) donne les limites $m_p \leq 1.348 M_\odot$ et $m_c \geq 0.968 M_\odot$ pour la masse du pulsar (cette valeur correspond en fait à la valeur statistique de la masse des étoiles à neutrons dans les pulsars binaires connus) et de son compagnon, respectivement. Ces chiffres mènent à une prédiction pour la décroissance orbitale en Relativité Générale de l'ordre de $\dot{T}_{(rg)} \simeq -3.881 \cdot 10^{-13} \text{ s s}^{-1}$.

de grandeur que les meilleures contraintes actuelles obtenues dans le système solaire (voir (1.92)) : $\xi_{(exp)} \leq 2.8 \times 10^{-4}$, où $\xi = 2\alpha^2/(1 + \alpha^2)$. Une précision plus optimiste de 1% nous fournirait une limite bien meilleure,

$$\xi_{(exp)} \leq 10^{-5} \quad (\omega_{(exp)} \geq 10^5) , \quad (5.45)$$

atteignant le niveau de précision attendu pour les futures expériences satellitaires dédiées à l'analyse des couplages scalaires. Il n'est pas nécessaire d'insister davantage sur le fait que toute mesure indirecte de radiations dipolaires établirait irrévocablement l'existence de nouvelles charges gravitationnelles et mettrait en défaut la théorie d'Einstein.

Conclusion

Au-delà de la Relativité Générale, les théories de la gravitation définissent une charge gravitationnelle auxiliaire associée à la violation du Principe d'Equivalence, et théoriquement responsable d'une émission de radiations dipolaires dominantes. Dans notre modèle vecteur-tenseur, la charge vectorielle est associée à la quantité de mouvement des corps dans un espace de dimensions supplémentaires (mv^5/c). Dans le cadre des théories scalaire-tenseur de Brans-Dicke, la charge scalaire s'identifie à l'énergie de liaison gravitationnelle interne des corps (ms). Les taux de décroissance orbitale observés dans les pulsars binaires PSR B1913 + 16 et PSR B1534 + 12 confirment la prédiction de la Relativité Générale pour une émission purement quadrupolaire. Ces mesures étant réalisées sur des doubles étoiles à neutrons, elles n'offrent aucune limite importante sur la composante scalaire. Par contre, la mesure attendue de la décroissance orbitale de binaires asymétriques, constitués d'une étoile à neutrons et d'une naine blanche, devrait permettre des contraintes fortes sur le couplage scalaire de gravitation. Dans le cas particulier du PSR J1141–6545, une précision relative de l'ordre de 1% améliorerait de plus d'un ordre de grandeur ($\xi \leq 10^{-5}$) la meilleure contrainte actuelle donnée par les résultats de déflexion de la lumière au voisinage du Soleil. Dans le modèle vectoriel, des contraintes ponctuelles peuvent être posées sur les charges associées à chaque binaire considéré, mais un modèle plus précis doit être élaboré si nous voulons définir une limite sur un couplage vectoriel fondamental.

Remarquons que si les taux de décroissance orbitale suggèrent un jour un couplage anomal non nul, il sera impossible de faire la distinction entre l'extension scalaire-tenseur minimale de la théorie d'Einstein et une théorie vecteur-tenseur de "Kaluza". Les taux d'émission de radiations dipolaires sont en effet identiques aux charges près ($q_{(v)} \leftrightarrow q_{(s)}/\sqrt{2}$). Seule une détection directe des ondes gravitationnelles permettrait la distinction entre une polarisation longitudinale (scalaire) et des polarisations transverses (vectorielles).

Conclusions

La théorie de la Relativité Générale est aujourd’hui confirmée par de multiples résultats expérimentaux. Des mesures de la déflexion de la lumière et de la violation du Principe d’Equivalence à l’analyse de la décroissance orbitale de pulsars binaires, toutes les observations confortent les prédictions de la théorie d’Einstein. La précision associée est supérieure au dixième de pourcent. Mais certains arguments théoriques nous mènent à penser qu’il faut aller au-delà. Les concepts de dimensions supplémentaires de l’espace-temps et de champs auxiliaires de gravitation sont suggérés par les théories actuelles proposant l’unification des quatre interactions fondamentales. Ils définissent dès lors des directions importantes pour la construction d’une théorie de la gravitation au-delà de la Relativité Générale.

Considérant l’existence de dimensions supplémentaires, nous avons étudié les modèles *ADD* (Arkani-Hamed - Dimopoulos - Dvali) en $4 + \delta$ dimensions et le modèle *RS* (Randall - Sundrum) en 5 dimensions. Ces développements ont été récemment avancés comme solutions alternatives au problème de la hiérarchie des couplages gravitationnel et électrofaible dans le Modèle Standard de la physique des particules. Ils proposent une interaction gravitationnelle se propageant naturellement dans tout l’espace-temps, alors que la matière et les autres interactions sont confinées dans notre univers quadridimensionnel. Les théories effectives correspondantes en quatre dimensions ont été dérivées dans des approches originales simples : nous avons défini une “réduction du propagateur” dans les modèles *ADD*, et suggéré une “action en coordonnées conformes” dans le modèle *RS*. La structure de l’interaction gravitationnelle y est donnée par des excitations massives qui s’ajoutent au graviton de masse nulle habituel. La phénoménologie et les contraintes expérimentales associées ont été étudiées.

Considérant la présence de champs auxiliaires de gravitation en quatre dimensions, nous avons défini la notion de charge gravitationnelle auxiliaire, au-delà de la masse même des corps. En termes de cette charge, un lien générique et original a été établi entre, d’une part, la violation du Principe d’Equivalence et, d’autre part, l’existence de radiations gravitationnelles dipolaires dominantes. Dans le cas particulier des théories scalaire-tenseur de Brans-Dicke, la charge auxiliaire s’identifie à l’énergie de liaison gravitationnelle interne de corps compacts. Une composante scalaire de gravitation n’est en rien exclue par les expériences actuelles, mais le couplage scalaire doit être au moins quatre ordres de grandeur inférieur au couplage tensoriel. Une contrainte nouvelle a été suggérée sur le couplage scalaire de Brans-Dicke à travers l’étude de la décroissance orbitale du pulsar binaire PSR J1141 – 6545 récemment découvert. Cette décroissance orbitale, intimement liée à l’émission de radiations gravitationnelles par le système, est en effet extrêmement sensible à la charge (et donc au couplage) auxiliaire.

Enfin, nous avons développé un modèle original où les concepts de dimension supérieure

et de champ auxiliaire se rejoignent. Dans le cadre théorique établi, les champs de matière se propagent dans des dimensions supplémentaires au même titre que le champ de gravitation. En quatre dimensions, la théorie effective correspondante donne, à basse énergie, un modèle vecteur-tenseur pour l'interaction gravitationnelle. La charge auxiliaire vectorielle ainsi définie s'identifie à la quantité de mouvement des corps dans les dimensions supplémentaires. Fondamentalement, cette charge est associée à la fraction de la masse des corps constituée d'états de Kaluza-Klein (massifs) des champs de matière. L'étude du mouvement, et en particulier de la décroissance orbitale, de systèmes d'étoiles binaires permettrait de poser des contraintes ponctuelles sur les charges vectorielles impliquées. Un modèle plus précis devrait cependant être élaboré si nous voulons définir une limite sur un couplage vectoriel fondamental, comme nous le proposons pour le couplage scalaire.

Annexe A

Décroissance orbitale

Cette annexe établit l'ensemble des contributions scalaires et tensorielles dominantes aux radiations gravitationnelles générées par des systèmes d'étoiles binaires, dans le cadre des théories de Brans-Dicke. La perte d'énergie totale et la décroissance orbitale qui s'ensuit, sont données par la somme des contributions scalaires et tensorielles. La contribution tensorielle est la même qu'en Relativité Générale. Les contributions scalaires sont importantes pour un système de sources compactes [Ear75, WZ89, DEF92, DEF96a].

A.1 Perte d'énergie tensorielle

Les équations de champs (2.47) pour les perturbations $\theta_{\mu\nu}$ définissent une structure tensorielle des radiations identique à celle de la Relativité Générale, à la constante de couplage près. Les solutions radiatives dans la zone d'onde sont donc données à l'ordre $\mathcal{O}_{(qua)}^\theta((1 + \mathcal{O}(\xi))/c^4)$ par l'équation (2.14) :

$$\theta_{ij}^{TT}(t - R/c) = -\frac{2G'}{Rc^4} \left[\perp_{ik} \perp_{jl} - \frac{1}{2} \perp_{ij} \perp_{kl} \right] \ddot{D}^{kl}(t - R/c), \quad (\text{A.1})$$

où les $D^{ij} = \int d^3\vec{x}' \rho(x'^i x'^j - (1/3)\delta^{ij} r'^2)$ sont les moments quadrupolaires sans trace associés à la source et $G' = G(1 - \xi/2)$. Le taux de perte d'énergie sous forme de radiations gravitationnelles est donné par l'expression quadrupolaire standard, affectée d'une correction due à la redéfinition de la constante de couplage ($\mathcal{O}_{(qua)}^\theta((1 + \mathcal{O}(\xi))/c^5)$) :

$$-\frac{dE_{(qua)}^\theta}{dt} = \frac{G'}{5c^5} \ddot{D}^{ij} \ddot{D}_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

Radiations tensorielles dans un système binaire

Dans un système binaire, l'accélération relative des deux corps $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ est donnée dans la limite non relativiste, comme

$$\vec{a} = -\frac{G_{12}M}{r^3} \vec{r}, \quad (\text{A.3})$$

où $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ est le vecteur position relative des deux corps et $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système. La constante $G_{12} = (1 - \xi s_1 - \xi s_2 + 2\xi s_1 s_2)G$ donne le couplage dans la limite

quasi-newtonienne du mouvement en fonction de la compacité des corps (s_1 et s_2). Dans le référentiel du centre de masse du système, les relations $\vec{r}_1 = -(m_2/M)\vec{r}$ et $\vec{r}_2 = (m_1/M)\vec{r}$ sont vérifiées. En coordonnées polaires dans le plan de l'orbite du mouvement, les vecteurs position et vitesse relatives s'écrivent $\vec{r} = r \vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$, où ϕ est l'angle polaire. Les moments quadrupolaires de masse sont donnés par $D^{ij} = m_1 x_1^i x_1^j + m_2 x_2^i x_2^j$. Dès lors, la perte d'énergie instantanée dans un système binaire prend la forme particulière suivante :

$$-\frac{dE_{(qua)}^\theta}{dt} = \frac{8}{15} \frac{G^3}{c^5} \frac{\mu^2 M^2}{r^4} \left[12\kappa^\theta v^2 - 11\kappa^\theta \dot{r}^2 \right], \quad (\text{A.4})$$

où $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ est la masse réduite du système. La constante κ^θ intègre les valeurs anormales des constantes de couplage; elle définit l'écart par rapport à une valeur unité en Relativité Générale :

$$\kappa^\theta = \frac{G' G_{12}^2}{G^3} = \frac{G_{12}^2}{G^2} \left(1 - \frac{\xi}{2} \right). \quad (\text{A.5})$$

L'équation de l'orbite du mouvement képlérien et la conservation du moment angulaire¹ impliquent l'expression suivante pour la moyenne d'une grandeur sur la période du mouvement :

$$\langle \cdot \rangle_K \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \cdot dt = \frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdot r^2 d\phi, \quad (\text{A.6})$$

où a et e sont respectivement les valeurs du demi-grand axe de l'orbite et de son excentricité. L'expression associée à la perte d'énergie moyenne sous forme de radiations gravitationnelles s'écrit donc finalement

$$\left\langle -\frac{dE_{(qua)}^\theta}{dt} \right\rangle_K = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5} \left[\frac{G_{12}^3}{G^3} \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \right] f(e), \quad (\text{A.7})$$

où la fonction $f(e) = (1 + 73/24e^2 + 37/96e^4)/(1 - e^2)^{7/2}$ est un facteur de majoration par rapport aux orbites circulaires, croissant rapidement avec l'excentricité de l'orbite ($1 \leq f(e) < \infty$). Le résultat pour la Relativité Générale est donné par l'identification des constantes de couplage à la constante de Newton : $G' = G_{12} = G$, ($\xi = 0$).

A.2 Perte d'énergie scalaire

Afin d'établir la perte d'énergie sous forme de radiations gravitationnelles scalaires, nous devons identifier exactement la structure des termes sources jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\xi/c^4)$. Pour des corps compacts, le développement de la masse à l'ordre 2 dans le champ scalaire φ est donné par

$$m(\Phi) = m(\Phi_0) \left(1 + s\varphi - \frac{1}{2} (s' + s - s^2) \varphi^2 + \mathcal{O}(\varphi^3) \right), \quad (\text{A.8})$$

¹L'équation de l'orbite képlérienne elliptique en coordonnées polaires centrées au foyer (référentiel du centre de masse) et la conservation du moment angulaire sont respectivement données par les relations

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi} \\ \dot{\phi} &= \frac{\sqrt{G_{12}Ma(1-e^2)}}{r^2}, \end{aligned}$$

où a est la valeur du demi-grand axe de l'orbite et e la valeur de son excentricité.

où $s \equiv (d \ln m / d \ln \Phi)_{|\Phi_0}$ et $s' \equiv -(d^2 \ln m / d \ln \Phi^2)_{|\Phi_0}$ sont définies comme les sensibilités première et seconde de la masse au champ scalaire. Dans le cadre des théories de Brans-Dicke, elles sont égales et s'identifient à l'énergie de liaison gravitationnelle interne par unité de masse, c'est-à-dire la compacité, du corps considéré :

$$s = s' = \frac{|E^{gr}|}{mc^2}. \quad (\text{A.9})$$

Considérant un système de sources compactes m_a , l'équation (2.52) pour le champ scalaire se développe donc comme

$$\square \varphi = \xi \frac{4\pi G}{c^2} \sum_a \frac{d\tau_a}{dt} m_a (\Phi_0) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_a) \left[(1 - 2s_a) + (s_a + 2s'_a - 2s_a^2) \varphi_{(st)}(\vec{x}_a) + O(\varphi_{(st)}^2) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Les expressions

$$\frac{d\tau_a}{dt} = 1 + \left((1 - \xi s) \frac{V}{c^2} \right)_{|\vec{x}_a} - \frac{v_a^2}{2c^2}, \quad (\text{A.11})$$

et

$$\varphi_{(st)}(\vec{x}_a) = \left(-\xi (1 - 2s) \frac{V}{c^2} \right)_{|\vec{x}_a}, \quad (\text{A.12})$$

sont données par les solutions statiques dominantes pour la métrique (voir (1.142)) et le champ scalaire (voir (1.141)), respectivement. A l'ordre $\mathcal{O}(\xi/c^4)$, nous tenons donc explicitement compte de la non-linéarité des équations de champs ; la masse elle-même n'est pas seule source des perturbations scalaires. L'équation d'onde se réécrit encore

$$\square \varphi = \xi \frac{4\pi G}{c^2} S(\vec{x}, t), \quad (\text{A.13})$$

où le terme de source est défini à l'ordre $\mathcal{O}(1/c^2)$ par

$$S(\vec{x}, t) = \sum_a m_a (\Phi_0) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_a) \left[(1 - 2s_a) \left(1 - \sum_b (1 - \xi s_b) \frac{Gm_b}{r_{ab}c^2} - \frac{v_a^2}{2c^2} \right) + \xi (s_a + 2s'_a - 2s_a^2) \sum_b (1 - 2s_b) \frac{Gm_b}{r_{ab}c^2} \right], \quad (\text{A.14})$$

r_{ab} définissant la distance entre les sources m_a et m_b . Dans la zone d'onde et dans la limite de mouvements lents, le développement multipolaire des solutions radiatives est donné par

$$\varphi(t - R/c) = \xi \frac{G}{Rc^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d^3\vec{x}' \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c} \right)^m \cdot \frac{\partial^m}{\partial t^m} S(\vec{x}', t - R/c). \quad (\text{A.15})$$

Radiations scalaires dans un système binaire

Dans un système binaire, la solution radiative scalaire complète se réduit à la somme de termes monopolaires ($\mathcal{O}_{(mo)}^\varphi(\xi/c^4)$), dipolaires ($\mathcal{O}_{(di)}^\varphi(\xi/c^3)$) et quadrupolaires ($\mathcal{O}_{(qua)}^\varphi(\xi/c^4)$) :

$$\varphi(t - R/c) = \xi \frac{G\mu}{R} \left[-\frac{1}{c^3} 2(s_2 - s_1) (\vec{n} \cdot \vec{v}) - \frac{1}{c^4} \frac{GM}{r} \left(\frac{G_{12}}{G} \Gamma + 2\Lambda \right) + \frac{1}{c^4} \Gamma \left((\vec{n} \cdot \vec{v})^2 - \frac{G_{12}M}{r^3} (\vec{n} \cdot \vec{x})^2 \right) \right], \quad (\text{A.16})$$

où les constantes Γ et Λ , égales à l'unité pour un système de sources non compactes, sont définies par les relations

$$\Gamma = 1 - \frac{2(m_1 s_2 + m_2 s_1)}{M} \quad (\text{A.17})$$

$$\Lambda = \frac{G_{12}}{G} (1 - s_1 - s_2) - \xi \left((1 - 2s_1) s_2' + (1 - 2s_2) s_1' \right). \quad (\text{A.18})$$

La partie cinétique de la densité lagrangienne scalaire étant donnée par

$$\mathcal{L}_{cin.}^\varphi = \left(\frac{1}{\alpha^2 2c\kappa'} \right) \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi, \quad (\text{A.19})$$

le tenseur énergie-moment associé s'écrit

$$t_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{cin.}^\varphi}{\partial g^{\mu\nu}} \Big|_{\eta_{\mu\nu}} \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{1}{\xi} \frac{c^4}{8\pi G} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi. \quad (\text{A.21})$$

La perte d'énergie par unité de temps dans la direction n^i s'écrit

$$\frac{dI^\varphi}{d\Omega} = cR^2 n_i t^{(\varphi)i0} \quad (\text{A.22})$$

$$= \frac{1}{\xi} \frac{c^3}{8\pi G} R^2 \dot{\varphi}^2, \quad (\text{A.23})$$

où $\varphi(t - R/c)$ est donné par la solution (A.16). L'intégration sur les angles solides donne par conséquent,

$$-\frac{dE_{(mo,qua)}^\varphi}{dt} = \frac{8}{15} \frac{G^3}{c^5} \frac{\mu^2 M^2}{r^4} [12\kappa_1^\varphi v^2 - 11\kappa_2^\varphi \dot{r}^2], \quad (\text{A.24})$$

pour les contributions monopolaires et quadrupolaires scalaires ($\mathcal{O}_{(mo,qua)}^\varphi(\xi/c^5)$) et

$$-\frac{dE_{(di)}^\varphi}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\xi G G_{12}^2}{c^3} \frac{\mu^2 M^2}{r^4} (s_1 - s_2)^2, \quad (\text{A.25})$$

pour les contributions dipolaires ($\mathcal{O}_{(di)}^\varphi(\xi/c^3)$), proportionnelles à la différence des sensibilités des deux corps. Les constantes κ_1^φ et κ_2^φ sont définies par le couplage scalaire et les sensibilités de chacun des corps :

$$12\kappa_1^\varphi = \xi \Gamma^2 \frac{G_{12}^2}{G^2} \quad (\text{A.26})$$

$$11\kappa_2^\varphi = \frac{1}{2} \xi \left[\Gamma^2 - 5 \frac{G}{G_{12}} \Lambda \Gamma - \frac{15}{2} \left(\frac{G}{G_{12}} \Lambda \right)^2 \right] \frac{G_{12}^2}{G^2}. \quad (\text{A.27})$$

A.3 Décroissance orbitale

La perte d'énergie totale instantanée sous forme de radiations gravitationnelles est donnée par la somme des contributions tensorielles et scalaires. Dans un système binaire, nous obtenons donc l'expression

$$-\frac{dE}{dt}|_{(bd)} = \frac{G^3 \mu^2 M^2}{c^5 r^4} \left[\frac{8}{15} \left(12\kappa_1^{(\theta,\varphi)} v^2 - 11\kappa_2^{(\theta,\varphi)} r^2 \right) + \frac{2}{3} \frac{G_{12}^2}{G^2} \xi c^2 (s_1 - s_2)^2 \right], \quad (\text{A.28})$$

où les constantes $\kappa_1^{(\theta,\varphi)}$ et $\kappa_2^{(\theta,\varphi)}$, de valeur unité en Relativité Générale, intègrent maintenant l'ensemble des contributions monopolaires et quadrupolaires :

$$\kappa_1^{(\theta,\varphi)} = \kappa^\theta + \kappa_1^\varphi \quad (\text{A.29})$$

$$\kappa_2^{(\theta,\varphi)} = \kappa^\theta + \kappa_2^\varphi. \quad (\text{A.30})$$

La moyenne sur une période du mouvement képlérien considéré donne alors

$$\left\langle -\frac{dE}{dt}|_{(bd)} \right\rangle_K = \frac{2}{3} \frac{G^3 \mu^2 M^2}{c^3 a^4} \left[\frac{4}{5} \frac{G_{12} M}{ac^2} \left(12\kappa_1^{(\theta,\varphi)} f_1(e) - 11\kappa_2^{(\theta,\varphi)} f_2(e) \right) + \xi \frac{G_{12}^2}{G^2} (s_1 - s_2)^2 g(e) \right], \quad (\text{A.31})$$

où les fonctions de l'excentricité orbitale $f_1(e) = (1 + 7/2e^2 + 1/2e^4)/(1 - e^2)^{7/2}$, $f_2(e) = ((e^2/2)(1 + e^2/4))/(1 - e^2)^{7/2}$ et $g(e) = (1 + e^2/2)/(1 - e^2)^{5/2}$ sont des facteurs de majoration par rapport au cas d'une orbite circulaire. Notons, pour être précis, que des contributions dipolaires scalaires $\mathcal{O}_{(di)}^\varphi(\xi/c^5)$, dont nous devrions *a priori* tenir compte, naissent sans aucun doute des premières corrections relativistes au mouvement orbital. Mais nous négligeons ces contributions au même titre que les termes monopolaires et quadrupolaires scalaires dans nos analyses aux chapitres 2 et 5.

Enfin, nous calculons la décroissance orbitale associée à la perte d'énergie établie dans l'approximation képlérienne du mouvement. Les expressions de l'énergie totale du système, $E = -G_{12}\mu M/2a$, et de la troisième loi de Kepler, $T^2 = 4\pi^2 a^3/G_{12}M$, montrent en effet que la perte d'énergie dans le système est liée à un rétrécissement de l'orbite, ainsi qu'à une diminution de la période orbitale. La valeur relative de cette décroissance orbitale est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{E} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_K. \quad (\text{A.32})$$

Conclusion

En conclusion, le mouvement képlérien de systèmes binaires induit effectivement l'émission de radiations gravitationnelles. Cette émission implique une décroissance de la période orbitale de ces systèmes. Dans le cadre des théories de Brans-Dicke, différentes contributions scalaires se superposent, à l'ordre dominant, aux radiations tensorielles quadrupolaires déjà présentes en Relativité Générale. Pour des systèmes compacts, les contributions dipolaires dominent *a priori* toute la structure radiative.

Annexe B

Alternative à la compactification

¹Considérant des dimensions supplémentaires plates (modèles *ADD*) en produit direct avec l'espace-temps habituel, les échelles de gravitation dans la théorie originale et dans la théorie effective en quatre dimensions sont reliées par le volume de l'espace des dimensions supplémentaires, à travers la relation

$$M_{(4)}^2 = M_{(4+\delta)}^{2+\delta} V_\delta. \quad (\text{B.1})$$

La vérification de la loi de Newton jusqu'à des échelles de distances inférieures au millimètre impose effectivement la compactification de ces dimensions à des rayons suffisamment petits. Mais, au-delà même de ces considérations expérimentales, cette relation établit une échelle d'interaction d'autant plus faible dans la théorie effective que le volume des dimensions supplémentaires est important. Dans la limite d'un volume infini, la gravitation est purement $4 + \delta$ -dimensionnelle et la théorie effective n'est plus définie ($M_{(4)} \rightarrow \infty$). Aussi, outre le fait qu'elle n'est pas envisageable pour des raisons expérimentales, cette limite est peu naturelle en soi. Par contre, dans le cadre des modèles *RS*, la relation correspondante est donnée par

$$M_{(4)}^2 = \frac{M_{(5)}^3}{k} \left(1 - e^{-2ky_c}\right). \quad (\text{B.2})$$

La grandeur de la dimension supplémentaire est sans impact particulier sur la relation entre les échelles de masses fondamentale et effective, et la théorie effective reste parfaitement définie dans la limite d'une dimension supplémentaire infinie ($y_c \rightarrow \infty$). Cette annexe établit la théorie effective associée aux modèles *RS* dans cette limite particulière [RS99b, LR00].

B.1 Modèle à une membrane (*RS'*)

Nous reprenons le cadre théorique défini par l'action (4.2) pour le modèle *RS* original. Considérant la dimension supplémentaire infinie (dans les coordonnées conformes, $z_c \rightarrow \infty$), la membrane localisée en $z = z_c$ disparaît de l'espace physique. Sans autre extension, les champs de matière sont naturellement localisés sur la membrane centrale, en $z = 0$ ($S_{mat}^+ = S_{(vis)}$ et $S_{mat}^- = S_{(hid)}$). Evidemment, nous devons nous affranchir de nos préoccupations concernant le problème hiérarchique : la métrique induite sur la membrane visible en $z = 0$ est exactement la métrique de Minkowski, et la transformation d'échelle définie par le facteur

¹ $\hbar = c = 1$.

exponentiel est triviale (voir (4.7)). Cette membrane en $z = 0$ est appelée “membrane de Planck” par opposition à la membrane en $z = z_c$ dans le modèle original, “membrane du TeV ”. L’introduction d’une dimension infinie modifie les masses et couplages de la théorie effective. La seconde membrane étant rejetée à l’infini, la condition de saut associée disparaît, et le spectre de masse est identifié par le continuum ($m \geq 0$). Les couplages sont définis par la valeur des fonctions d’onde établies dans le modèle original, mais sur la membrane de Planck cette fois.

Couplages non massifs

La structure de masse nulle compte toujours un graviton et un mode scalaire. La géométrie de l’espace est telle que la fonction d’onde constante associée au graviton reste normalisable dans une dimension infinie ($\chi_{(0)} = 2(k/M_{(5)}^3)^{1/2}$, voir (4.27)). La relation entre les échelles de masse fondamentale et effective est donc simplement la limite (lorsque $z_c \rightarrow \infty$) de la relation correspondante pour une dimension compacte :

$$M_{(4)}^2 = \frac{M_{(5)}^3}{k}. \quad (\text{B.3})$$

Par contre, le couplage scalaire donné à partir des équations (4.25) et (4.29) se trouvant défini en $z = 0$, il est réduit d’un facteur $e^{2\tilde{\sigma}(z_c)}$. Aussi, la constante de couplage scalaire s’annule dans la limite où la dimension supplémentaire est infinie :

$$\alpha_{(rs')} = \frac{e^{-\tilde{\sigma}(z_c)}}{\sqrt{3}} \rightarrow 0. \quad (\text{B.4})$$

Ce résultat trouve une explication naturelle dans le fait que le mode scalaire étudié définit une perturbation de la mesure de la dimension supplémentaire. Cette dimension étant infinie, le couplage scalaire perd son sens. Techniquement, la fonction d’onde associée à ce mode scalaire croît de manière exponentielle (voir (4.29)). Elle est par conséquent non normalisable sur une dimension infinie ($C = 0$).

Couplages massifs

Il reste à étudier le couplage à la matière des modes massifs sur le continuum $m > 0$. Ce couplage est donné par la valeur $\chi_{(m)}(0)$. Dans la coordonnée x , la membrane de Planck est située en $x = m/k \ll 1$. Nous avons donc besoin du développement des fonctions de Bessel d’ordre 2 pour les petites valeurs de leur argument ($x < 1$) :

$$J_2(x) \simeq \frac{x^2}{8} \quad (\text{B.5})$$

$$Y_2(x) \simeq -\frac{4}{\pi x^2} - \frac{1}{\pi}. \quad (\text{B.6})$$

Les fonctions d’onde exactes (voir (4.42)) se réduisent donc à

$$\tilde{\psi}_{(m)}(x) \simeq \frac{(2\pi)^{1/2}}{M_{(5)}^{3/2}} \left[\frac{x^{5/2}}{8} - \left(\frac{m}{k}\right)^2 \left(\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{x^{1/2}}{4} \right) \right], \quad (\text{B.7})$$

où la normalisation est propre au spectre continu². La composante $Y_2(x)$ suit la même évolution que le mode nul, alors que la composante $J_2(x)$ croît rapidement. Sur la membrane de Planck, c'est $Y_2(x)$ qui domine, et la valeur de la fonction d'onde est par conséquent extrêmement supprimée par rapport au mode nul :

$$\psi_{(m)}(0) = \chi_{(m)}(0) \simeq \frac{m^{1/2}}{k} \chi_{(0)}. \quad (\text{B.8})$$

Leur contribution à la phénoménologie aux énergies accessibles expérimentalement est tout à fait négligeable. Le potentiel complet pour l'interaction statique entre deux corps sur la membrane en $z = 0$ est donné par l'intégration des potentiels de Yukawa développés par chaque masse du continuum. La contribution globale donne un terme anomal en $1/r^3$, largement supprimé par un facteur $1/k^2$, jusqu'à des distances de l'ordre de l'échelle de Planck :

$$V(r) \simeq V_0(r) \left(1 + \int_0^\infty dm \left(\frac{m}{k^2} \right) e^{-mr} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\simeq V_0(r) \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right). \quad (\text{B.10})$$

Dans le même ordre d'idées, la section efficace de production de ces excitations est largement supprimée par rapport à la production du graviton habituel $d\sigma_m \sim (m/k^2)/\bar{M}_{Pl}^2 dm$. Le couplage scalaire étant naturellement nul et les contributions des modes massifs tout à fait négligeables, la théorie s'identifie donc presque exactement à la Relativité Générale à haute et basse énergies.

La compactification des dimensions supplémentaires n'est donc pas indispensable. Une géométrie non triviale de l'espace-temps permet d'introduire des dimensions supplémentaires non compactes, définissant une théorie effective cohérente en quatre dimensions, et en accord avec toutes les contraintes expérimentales. Dans la section suivante, afin de réintroduire une solution au problème hiérarchique, nous étendons ces derniers modèles, en localisant simplement la matière à une coordonnée non nulle dans la dimension supplémentaire infinie. La phénoménologie associée est beaucoup plus complexe et s'identifie, jusqu'à l'échelle électrofaible, aux modèles *ADD* proposant l'existence de six dimensions supplémentaires larges, mais compactes ($\delta = 6$).

B.2 Combinaison

Le cadre théorique reste donc exactement celui que nous venons de définir (RS'), mais les champs de matière sont localisés sur une nouvelle "membrane du TeV " en $z = z_0 \simeq 1 TeV^{-1}$. Afin que la présence de cette membrane ne modifie pas la structure de l'espace AdS_5 , nous considérons sa tension négligeable. Il apparaît de façon évidente que la transformation

²Pour une dimension finie z_c , nous pouvons factoriser la dépendance en z_c du coefficient de normalisation N_m (voir (4.47)) comme $N_m = (1/z_c)^{1/2} \tilde{N}_m$. Pour z_c suffisamment grand, le spectre des modes massifs peut être considéré comme continu, et la sommation des contributions des états massifs peut être écrite sous forme intégrale :

$$\sum_m |\psi(z)|^2 \simeq \int \frac{dm}{(1/z_c)} |\psi(z)|^2.$$

Dans la limite $z_c \rightarrow \infty$, nous travaillons avec une mesure dm et la normalisation \tilde{N}_m explicitement indépendante de la valeur z_c .

d'échelle définie par le facteur exponentiel e^{-kz_0} définit, comme dans le modèle RS original où la dimension supplémentaire est finie, une solution au problème hiérarchique. Les fonctions d'ondes sont normalisées comme dans le modèle RS' . Le spectre de masse est toujours donné par le continuum $m \geq 0$, mais les couplages sont donnés par la valeur de la fonction d'onde associée en $z = z_0$. La phénoménologie est donc encore modifiée.

$m = 0$. A basse énergie, la fonction d'onde du graviton, constante sur toute la dimension supplémentaire, donne la relation (B.3) entre les échelles de masse de la théorie, alors que le couplage scalaire s'annule.

$m > (1/z_0) \simeq 1 TeV$. Dans cette partie du spectre, la fonction d'onde $\chi_{(m)}(z)$ peut être considérée dans son régime asymptotique en $z = z_0$ puisque $x_0 \simeq mz_0 > 1$. Pour la normalisation canonique dans le continuum (\tilde{N}_m), nous obtenons un couplage fort pour ces modes, analogue au couplage obtenu dans le modèle RS original pour les masses du spectre discret (voir (4.50)) :

$$\chi(z_0)|_{(m>1TeV)} \simeq \frac{e^{3/2\sigma(z_0)}}{k^{1/2}} \chi_{(0)}. \quad (\text{B.11})$$

La contribution de cette partie du spectre au potentiel gravitationnel est tout à fait négligeable à cause de la suppression exponentielle importante des termes de Yukawa :

$$\delta V(r)|_{(m>1TeV)} \simeq V_0(r) \frac{e^{3\sigma(z_0)}}{k} \int_{TeV}^{\infty} e^{-mr} dm. \quad (\text{B.12})$$

La production directe de ces modes en laboratoire devrait être accessible dans un futur proche. Dans ce régime ($E > TeV$), la section efficace pour la production combinée de ces modes évolue comme

$$\sigma|_{(m>1TeV)} \sim \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{TeV}^E \frac{e^{3\sigma(z_0)}}{k} dm \sim \frac{E}{TeV^3}. \quad (\text{B.13})$$

$m < (1/z_0) \simeq 1 TeV$. Si tous les modes de masse inférieure au TeV avaient atteint ce régime asymptotique, leur contribution au potentiel aux échelles de distance accessibles à l'expérience et leur section efficace de production seraient similaires aux prédictions correspondantes dans les modèles ADD incluant une dimension supplémentaire unique ($\delta = 1$). Ces prédictions seraient en contradiction profonde aussi bien avec les tests de la loi en $1/r$, qu'avec la phénoménologie des particules élémentaires à l'échelle électrofaible (voir (3.73)) et il faudrait exclure le modèle. Mais les fonctions d'onde pour cette partie du spectre sont loin d'être dans leur régime asymptotique, et les couplages associés sont fortement supprimés. Leur comportement est donné par l'expression (B.7) évaluée en $x_0 \simeq mz_0 < 1$. Pour les masses les plus faibles, $m < (8/kz_0^2) \simeq 10^{-4} eV$, c'est la composante $Y_2(x)$ qui domine, et la suppression des couplages est identique au cas où les champs de matière sont localisés sur la membrane de Planck (voir (B.8)), ne laissant place à aucune signature expérimentale. Dans le régime intermédiaire, $10^{-4} eV < m < 1 TeV$, la composante $J_2(x)$ est la plus importante, et le couplage est donné comme

$$\chi(z_0)|_{(10^{-4}eV < m < 1TeV)} \simeq \frac{kz_0^4 m^{5/2}}{M_{Pl}} \left(\simeq \frac{1}{2} kz_0^4 m^{5/2} \chi_{(0)} \right). \quad (\text{B.14})$$

La contribution au potentiel gravitationnel est à nouveau parfaitement négligeable à des distances supérieures au millimètre ($r > kz_0^2$). La phénoménologie aux échelles d'énergies électrofaibles est modifiée par des sections efficaces de production équivalentes aux prédictions

des modèles *ADD* comptant six dimensions supplémentaires plates ($\delta = 6$). Nous avons en effet, ($E < TeV$)

$$\sigma_{|(10^{-4} eV < m < 1 TeV)} \sim \frac{1}{2\bar{M}_{Pl}^2} k^2 z_0^8 \int_0^E m^5 dm \sim \frac{E^6}{TeV^8}. \quad (\text{B.15})$$

Ces prédictions sont par conséquent en accord avec les données expérimentales.

Conclusion

En conclusion, nous pouvons considérer une dimension supplémentaire infinie au sein d'une géométrie du type *AdS*₅. Si la matière est localisée à l'origine ($z = 0$), la gravitation en cinq dimensions s'identifie à la Relativité Générale. Un modèle hybride peut encore être défini, où la matière est localisée en $z = z_0 \simeq 1 TeV^{-1}$ sur la dimension infinie. Dans ce contexte, le potentiel d'interaction et la production de gravitons aux énergies électrofaibles restent en accord avec les contraintes expérimentales. D'une part, la force gravitationnelle entre deux corps est purement quadridimensionnelle à des distances supérieures au millimètre ($r > kz_0^2$). La contribution des modes massifs au potentiel d'interaction est en effet tout à fait négligeable dans ce régime. D'autre part, les modes massifs ne sont couplés fortement à la matière que pour des masses supérieures au *TeV*. Ceci définit une signature expérimentale essentiellement analogue au modèle *RS* original. La production de modes plus légers ($E < 1/z_0$) est supprimée comme dans les modèles *ADD* comptant six dimensions supplémentaires larges ($\sigma \sim E^6/TeV^8$).

Au-delà même de ces deux images extrêmes, nous pouvons imaginer un univers comptant une dimension supérieure infinie, et où la matière serait distribuée sur des membranes dans la cinquième dimension, entre l'origine $z = 0$ et la coordonnée $z = z_0$. Pour un observateur situé à une position $z < z_0$ quelconque, la physique semblerait purement quadridimensionnelle au-delà même des échelles de distance et d'énergie accessibles ($r > kz^2$ et $E < 1/z$). Peut-être notre espace-temps compte-t-il plus de quatre dimensions infinies.

Bibliographie

- [ADD98] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et G. Dvali, Phys. Lett. B **429** (1998) 263.
- [ADD99] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et G. Dvali, Phys. Rev. D **59** (1999) 086004.
- [Ade02] E. G. Adelberger, Preprint hep-ex/0202008 (2002).
- [ADM01] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos et J. March-Russell, Phys. Rev. D **63** (2001) 064020.
- [Bae99] S. Baeßler et al., Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3585.
- [Bal93] F. Balibar, *Œuvres choisies : Relativités I* (Seuil, 1993).
- [Bar99] V. Barger et al., Phys. Lett. B **461** (1999) 34.
- [BD61] C. Brans et R. H. Dicke, Phys. Rev. **124** (1961) 925.
- [Bia98] M. Bianchi et al., Phys. Rev. D **57** (1998) 4525.
- [Boo02] E. E. Boos et al., Preprint hep-th/0202009 (2002).
- [Cam01] F. Camilo et al., Astrophys. J. Lett. **548** (2001) L187.
- [CGR00] C. Charmousis, R. Gregory et V. A. Rubakov, Phys. Rev. D **62** (2000) 067505.
- [Cho85] A. Chodos, *Kaluza-Klein Theories*, Second Annual Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (Yale University, Connecticut, 1985), non publié.
- [Csá00] C. Csáki et al., Phys. Rev. D **62** (2000) 045015.
- [CZ92] Y. M. Cho et S. W. Zoh, Phys. Rev. D **46** (1992) R2290.
- [Dam00] T. Damour, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **80** (2000) 41.
- [Dam01] T. Damour, Preprint gr-qc/0109063 (2001).
- [DEF92] T. Damour et G. Esposito-Farèse, Class. Quant. Grav. **9** (1992) 2093.
- [DEF96a] T. Damour et G. Esposito-Farèse, Phys. Rev. D **53** (1996) 5541.

- [DEF96b] T. Damour et G. Esposito-Farèse, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 1474.
- [Dic65] R. H. Dicke, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity* (Gordon and Breach, 1965).
- [Dic94] J. O. Dickey et al., *Science* **265** (1994) 482.
- [Dir75] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity* (Wiley, 1975).
- [DKS00] G. Dvali, I. I. Kogan et M. Shifman, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 106001.
- [Don00] J. van Dongen, Preprint gr-qc/0009087 (2000).
- [DS91] T. Damour et G. Schäfer, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2549.
- [DT91] T. Damour et J. H. Taylor, *Astrophys. J.* **366** (1991) 501.
- [Ear75] D. M. Eardley, *Astrophys. J.* **196** (1975) L59.
- [EB01] R. T. Edwards et M. Bailes, *Astrophys. J. Lett.* **547** (2001) L37.
- [Ein16] A. Einstein, *Ann. Phys.* **49** (1916) 769.
- [Eub99] T. M. Eubanks et al., Preprint ftp://casa.usno.navy.mil/navnet/postscript/prd_15.ps (1999).
- [Fuc00] F. Fucito, *Detection of Scalar Gravitational Waves*, Second SIGRAV Graduate School in Contemporary Relativity and Gravitational Physics (Como, Italie, 1999), Preprint gr-qc/0005089 (2000).
- [Gal32] Galilée, *Dialogo*, Ed. Naz. **7** (1632) 212.
- [GKR00] S. B. Giddings, E. Katz et L. Randall, *JHEP* **0003** (2000) 023.
- [GRW99] G. F. Giudice, R. Rattazzi et J. D. Wells, *Nucl. Phys. B* **544** (1999) 3.
- [GT00] J. Garriga et T. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2778.
- [GW99a] W. D. Goldberger et M. B. Wise, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 107505.
- [GW99b] W. D. Goldberger et M. B. Wise, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4922.
- [GW00] W. D. Goldberger et M. B. Wise, *Phys. Lett. B* **475** (2000) 275.
- [GW02] J.-M. Gérard et Y. Wiaux, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 024040.
- [HLZ99] T. Han, J. D. Lykken et R. J. Zhang, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 105006.
- [Hoy01] C. D. Hoyle et al., *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 1418.
- [Hul94] R. A. Hulse, *Rev. Mod. Phys.* **66** (1994) 699.

- [Jac75] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Seconde Edition (Wiley, 1975).
- [Kal21] T. Kaluza, Sitzungsber, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. **K1** (1921) 966.
- [Kas00] V. M. Kaspi et al., *Astrophys. J.* **543** (2000) 321.
- [KKR01] A. Karch, E. Katz et L. Randall, Preprint hep-th/0106261 (2001).
- [Kle26] O. Klein, *Zeit. Phys.* **37** (1926) 895.
- [KR01a] A. Karch et L. Randall, *JHEP* **0105** (2001) 008.
- [KR01b] A. Karch et L. Randall, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 061601.
- [KS00] A. Kehagias et K. Sfetsos, *Phys. Lett. B* **472** (2000) 39.
- [LCP99] J. C. Long, H. W. Chan et J. C. Price, *Nucl. Phys. B* **539** (1999) 23.
- [Lee84] *Proceedings of the Workshop on Kaluza-Klein Theories* (Chalk River, Canada, 1983),
Ed. H. C. Lee (World Scientific, 1984).
- [LL66a] L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Mécanique*, Seconde Edition (Mir, 1966).
- [LL66b] L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Théorie du champ*, Seconde Edition (Mir, 1966).
- [LR00] J. Lykken et L. Randall, *JHEP* **0006** (2000) 014.
- [Mac83] E. Mach, *The Science of Mechanics* (1883).
- [Mül99] J. Müller et al., in *Proceedings of the 8th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* (Jerusalem, Israël, 1997), Eds. T. Piran et R. Ruffini (World Scientific, 1999) 1151.
- [MTW73] C. W. Misner, K. S. Thorne et J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, 1973).
- [New87] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Londini, 1687).
- [Nor68a] K. Nordtvedt, *Phys. Rev.* **169** (1968) 1014.
- [Nor68b] K. Nordtvedt, *Phys. Rev.* **169** (1968) 1017.
- [Pau58] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Pergamon Press, 1958).
- [PM63] P. C. Peters and J. Mathews, *Phys. Rev.* **131** (1963) 435.
- [PRZ00] L. Pilo, R. Rattazzi et A. Zaffaroni, *JHEP* **0007** (2000) 056.
- [PS95] M. E. Peskin et D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995).
- [PW02] M. E. Pati et C. M. Will, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 104008.

- [Rad99] P. Radelet-De Grave, *Revue des Questions Scientifiques* **170** (1999) 209.
- [Rea79] R. D. Reasenberg et al., *Astrophys. J. Lett.* **234** (1979) L219.
- [RS99a] L. Randall et R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3370.
- [RS99b] L. Randall et R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4690.
- [Sch99a] B. F. Schutz, *Gravitational Wave Sources and Detectors*, Second SIGRAV Graduate School in Contemporary Relativity and Gravitational Physics (Como, Italie, 1999), non publié.
- [Sch99b] B. F. Schutz, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) A131.
- [Sci53] D. W. Sciama, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **113** (1953) 34.
- [Sha90] I. I. Shapiro, in *Proceedings of the 12th International Conference on General Relativity and Gravitation* (University of Colorado at Boulder, Colorado, 1989), Eds. N. Ashby, D. F. Bartlett et W. Wyss (Cambridge University Press, 1990) 313.
- [Sta98] I. H. Stairs et al., *Astrophys. J.* **505** (1998) 352.
- [Str01] W. van Straten et al., *Nature* **412** (2001) 158.
- [Su94] Y. Su et al., *Phys. Rev. D* **50** (1994) 3614.
- [Tay93] J. H. Taylor, *Class. Quant. Grav.* **10** (1993) S167.
- [TFC79] J. H. Taylor, L. A. Fowler et P. M. McCulloch, *Nature* **277** (1979) 437.
- [Tho95] K. S. Thorne, in *Proceedings of the Snowmass 95 Summer Study on Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology* (Aspen, Colorado, 1995), Eds. E. W. Kolb et R. Peccei (World Scientific, 1995) 398.
- [Ves80] R. F. C. Vessot et al., *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 2081.
- [Wei72] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972).
- [Wia99] Y. Wiaux, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3771.
- [Wil93a] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Seconde Edition (Cambridge University Press, 1993).
- [Wil93b] C. M. Will, *Was Einstein Right ?*, Seconde Edition (Oxford University Press, 1993).
- [Wil94] C. M. Will, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 6058.
- [Wil00] J. G. Williams et al., in *Proceedings of the 9th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* (Rome, Italie, 2000), World Scientific, à paraître.

- [Wil01] C. M. Will, *Living Rev. Rel.* **4** (2001) 4.
- [WND96] J. G. Williams, X. X. Newhall et J. O. Dickey, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 6730.
- [WTF81] J. M. Weisberg, J. H. Taylor et L. A. Fowler, *Scientific American* **245** Oct. (1981) 66.
- [WZ89] C. M. Will et H. W. Zaglauer, *Astrophys. J.* **346** (1989) 366.