



Université catholique de Louvain
Faculté des sciences
Département de physique

Vers une réduction
du nombre de paramètres libres
dans le Modèle Standard

Dissertation présentée par
Martin Buysse
en vue de l'obtention du grade de docteur en sciences

2002

Table des matières

Introduction	3
1 Brisure spontanée	7
1.1 Symétries globales	7
1.2 Symétries locales	11
2 Systèmes scalaires	15
2.1 Le modèle sigma linéaire	16
2.2 Le Modèle Standard	18
2.3 Le secteur de Higgs	23
3 Relations naturelles	29
3.1 Le secteur de Yukawa	30
3.2 Symétries horizontales	37
3.3 Théorème de blocage	40
4 L'ordre dominant	43
4.1 L'angle faible	44
4.2 Les rapports de masse	50
5 Mélanges finis	55
5.1 L'angle de Cabibbo	56
5.2 La matrice de Kobayashi-Maskawa	58
6 Relations finies	63
6.1 Méthode différentielle	64
6.2 Méthode matricielle	67
6.3 Les leptons de Dirac	70
6.4 Universalité	73
Conclusion	87

A Le modèle de Wylér	91
B Le modèle de Yukawa	97
C Les couplages de Yukawa	99
D Le modèle sigma linéaire	111
E Théorèmes	113

Introduction

“Tous les hommes ont, par nature, le désir de connaître” prétend Aristote lorsqu’il introduit sa Métaphysique [1]. Aussi loin que remonte la tradition écrite, la connaissance du monde qui l’entoure a toujours constitué l’une des préoccupations majeures de l’être humain. Essentiellement descriptives, les théories de la nature développées par les Anciens n’en avaient pas moins la prétention d’universalité des sciences d’aujourd’hui. Tout y était décrit et expliqué. Rien n’échappait à la loi du mouvement d’Aristote (le mouvement est l’actualisation de ce qui est en puissance). Et s’il advenait qu’un phénomène lui échappe, une version de la loi du mouvement appropriée au phénomène rebelle le faisait aussitôt rentrer dans les rangs. C’est-à-dire qu’une loi générale, lorsqu’elle n’est pas assortie d’un puissant support mathématique, peut être particularisée à souhait et fournir une explication *ad hoc* au plus étrange phénomène naturel. Le domaine de validité des théories de la nature des Anciens était immense, mais leur pouvoir de prédiction pratiquement nul.

La mathématisation des sciences et plus singulièrement de la physique, que l’on attribue généralement à Kepler, Galilée, Descartes et incontestablement Newton, a doté les théories de la nature d’un remarquable pouvoir de prédiction. En physique, la qualité du pouvoir de prédiction d’une théorie qui se veut fondamentale se mesure à la taille de l’ensemble des nombres qu’elle permet *en principe* de calculer ; les nombres calculés sont ensuite confrontés au donné empirique, c’est à dire aux nombres “prélevés” dans la nature ; à l’issue de la confrontation on juge alors de la qualité de la théorie. A titre d’exemple, la mécanique de Newton permet *en principe* de calculer la position et la vitesse de tous les corps d’un système isolé à tout moment, pour autant que l’état du système soit parfaitement connu à un instant donné. On sait aujourd’hui les limites de la mécanique de Newton : on sait que vitesse et position ne revêtent plus la même signification ; on sait que la connaissance parfaite d’un système au sens classique du terme n’est que pure illusion ; on sait que la précision des calculs classiques s’effondre pour les systèmes denses ; on sait enfin que le vaste monde microscopique et submicroscopique échappe complètement aux lois énoncées par Newton. En d’autres termes, la taille de l’ensemble des nombres *en principe* calculables à l’aide de la mécanique de Newton est grande, mais ces nombres ne correspondent aux nombres “prélevés” dans la nature qu’avec une précision limitée et dans des circonstances significativement particulières (i.e. système macroscopique, de faible densité, etc...).

Les physiciens du siècle dernier ont étendu le domaine de validité de leurs théories bien au-delà du monde macroscopique de Newton, et inventant à cet effet de nouveaux outils mathématiques, ils en ont augmenté le pouvoir de prédiction. Les progrès des théories physiques ont été à ce point fulgurants qu’on mesure aujourd’hui la qualité de leur pouvoir de prédiction à la taille de l’ensemble des nombres qui ne sont *en principe* pas calculables ! C’est-à-dire qu’une théorie physique est avant tout une formidable machine à calculer qu’il s’agit d’alimenter

avec les conditions initiales du système étudié et les quelques nombres qu'elle est incapable de calculer. Les nombres qui ne sont *en principe* pas calculables (au sens large) sont appelés paramètres libres de la théorie¹.

On peut ramener l'essentiel de l'héritage de la physique fondamentale du vingtième siècle à l'assertion suivante : une théorie des particules doit être relativiste et quantique. Les théories quantiques des champs sont relativistes au sens restreint du terme. Avec le Modèle Standard des particules élémentaires et des interactions fondamentales, on dispose aujourd'hui d'une théorie quantique des champs permettant de rendre compte de la totalité des phénomènes naturels à l'échelle subnucléaire (cette théorie n'est cependant pas relativiste au sens général du terme ; il s'agit là du problème théorique majeur en physique des particules à l'aube du vingt-et-unième siècle). L'ensemble des paramètres libres du Modèle Standard ne compte qu'une vingtaine d'éléments (voire une trentaine si l'on considère les neutrinos massifs). La taille remarquablement petite de cet ensemble est un des plus grands succès théoriques du Modèle Standard². D'aucuns la jugent pourtant trop grande, et bon nombre de physiciens consacrent leur énergie à tenter de développer des modèles qui permettraient de la réduire encore.

En général on caractérise une théorie quantique des champs par un ensemble de symétries et un ensemble de champs dont on définit le comportement sous les transformations associées à ces symétries. La plupart des tentatives destinées à réduire la taille de l'ensemble des paramètres libres du Modèle Standard consistent à agrandir l'ensemble de ses symétries et souvent, par conséquent, l'ensemble de ses champs. Un ensemble de symétrie plus grand est par définition plus contraignant, et le nombre de paramètres libres peut s'en trouver réduit. Néanmoins, l'augmentation du nombre de champs vient généralement contrarier cette diminution potentielle. Par conséquent les théories ainsi définies impliquent un nombre de paramètres libres plus grand que celui du Modèle Standard (on songe aux théories de grande unification, à la supersymétrie, aux théories impliquant des symétries horizontales ; précisons tout de même que ces théories apportent à d'autres problèmes fondamentaux – quantification de la charge, unification des couplage de jauge, hiérarchie des échelles d'énergie et des couplages de Yukawa – des solutions élégantes et superbement inexistantes au sein du Modèle Standard). A ce jour, aucune de ces tentatives ne semble cependant concluante.

C'est dans ce contexte de "quête de calculabilité" que s'inscrit le travail de recherche présenté dans les pages qui suivent. D'un point de vue terminologique, un paramètre est dit calculable au sens large s'il est déterminé par la symétrie de la théorie ; on dit qu'il est *cal-*

¹Lorsqu'on prétend qu'un nombre est *en principe* calculable, il s'agit de remarquer que derrière ces quelques mots se cache la plus grande partie de l'activité quotidienne des physiciens, ingénieurs, chimistes, biologistes, psychologues, sociologues, etc, d'aujourd'hui. Car ce qui est calculable *en principe* ne l'est pas nécessairement en réalité. Il serait illusoire – et strictement impossible – de chercher à expliquer le fonctionnement d'un avion à réaction à partir du comportement des quarks et des électrons qui le constituent. Il en va de même pour un organisme vivant, pour l'homme, et pour la société tout entière. En effet, dès que le système étudié fait intervenir un nombre suffisamment élevé de degrés de liberté, les équations fondamentales qui le gouvernent sont trop complexes pour être résolues. Il est alors nécessaire de faire appel à toute une série de stratagèmes (théories effectives, simulations numériques, etc...) pour aboutir vaille que vaille à la connaissance du système étudié.

²Pour comparaison, il suffit de considérer le tableau périodique de Mendeleev et le nombre pléthorique de paramètres, apparemment tous indépendants l'un de l'autre, qu'il contient. Au début du vingtième siècle, aucun de ces paramètres n'était calculable. En outre, une importante partie de la matière était laissée dans l'ombre (mésons, baryons instables, neutrinos, etc...).

calculable au sens restreint lorsque la symétrie qui le détermine lui associe un nombre pur (cette acception sera désormais retenue par défaut) ; lorsque la symétrie qui le détermine lui associe une fonction prenant valeur dans l'ensemble des autres paramètres de la théorie, on parle de fonction ou de relation *naturelle*. Il est donc question de définir un outil permettant d'établir les conditions nécessaires de calculabilité de certains paramètres apparemment libres du Modèle Standard ; ou d'établir les conditions de naturalité d'une relation entre certains paramètres apparemment libres du Modèle Standard. Cet outil repose sur la propriété de renormalisabilité d'une théorie quantique des champs³ .

Les corrections radiatives affectant un paramètre calculable sont finies (on parle de paramètre *fini*). Dès lors, au premier ordre en théorie de la perturbation, l'annulation de la contribution divergente des corrections radiatives affectant un paramètre libre est une condition nécessaire à la calculabilité de celui-ci. En général cette condition détermine la seule valeur éventuellement calculable du paramètre en question. Les corrections radiatives finies qui affectent la valeur obtenue sont calculables et généralement petites. La comparaison de cette valeur à la valeur expérimentale du paramètre conditionne l'éventuel succès de la démarche. Il s'agit alors de chercher à identifier la symétrie à l'origine de l'éventuelle calculabilité du paramètre.

De même, les corrections radiatives affectant une relation naturelle sont finies (on parle de relation *finie*). Dès lors, au premier ordre en théorie de la perturbation, l'annulation de la contribution divergente des corrections radiatives affectant une relation arbitraire est une condition nécessaire à la naturalité de celle-ci. En général cette condition détermine l'ensemble des relations finies entre les paramètres dont il est question. Les corrections radiatives finies qui affectent les relations obtenues sont calculables et généralement petites. L'introduction dans ces relations des valeurs expérimentales des paramètres impliqués permet de sélectionner l'éventuelle relation qui correspondrait à la réalité. Il s'agit alors de chercher à identifier la symétrie à l'origine de l'éventuelle naturalité de cette relation.

L'objectif de ce travail consiste à étudier la finitude et donc l'éventuelle calculabilité des paramètres de *mélange* du Modèle Standard, ainsi que la finitude et donc l'éventuelle naturalité des *relations* entre les paramètres de mélange et les rapports de masse des particules du Modèle Standard. On tente ensuite de situer l'origine des résultats obtenus.

La notion de *brisure spontanée* de la symétrie en théorie des champs est introduite au **chapitre 1**. Les conséquences théoriques et phénoménologiques de la brisure spontanée y sont ensuite étudiées. En particulier, le mécanisme de Higgs, essentiel à la construction du Modèle

³Lorsqu'une particule physique se propage, elle peut émettre une deuxième particule et la réabsorber aussitôt. Ce processus d'émission et d'absorption d'une particule vient corriger la propagation de la particule initiale. On parle de *corrections radiatives*. Les corrections radiatives affectent les quantités physiques mesurables associées à tous les phénomènes physiques fondamentaux. Ces corrections radiatives peuvent se révéler divergentes. La contribution divergente de ces corrections radiatives est alors absorbée dans les paramètres libres de la théorie. On dit que les paramètres sont renormalisés. Une théorie est dite *renormalisable* si elle implique un ensemble fini de paramètres libres capables d'absorber les contributions divergentes de toutes les corrections radiatives imaginables. Une théorie des champs qui n'est pas renormalisable ne peut être qualifiée de fondamentale dans la mesure où les nombres (i.e. les quantités physiques) qu'elle permet de calculer sont infinis et ne correspondent dès lors pas aux nombres finis "prélevés" dans la nature.

D'un point de vue plus formel, en théorie des champs, les corrections radiatives correspondent aux termes d'un développement perturbatif des solutions des équations du mouvement (on parle de *théorie de la perturbation*).

Standard, y est présenté. On consacre le **chapitre 2** à la construction du Modèle Standard à partir du *système scalaire* du modèle sigma linéaire. Introduite par Veltman, cette approche démontre l'efficacité de ce système scalaire (dit minimal), lequel reproduit naturellement la théorie de l'électrodynamique quantique après brisure spontanée de la symétrie. Elle permet en outre de souligner les traits de ressemblance entre le modèle sigma linéaire et le Modèle Standard. Les extensions du système scalaire minimal sont ensuite présentées et analysées. Au **chapitre 3** on définit la notion de *relations naturelles* dans le Modèle Standard. Après avoir présenté le secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard à deux et trois générations de fermions, on introduit les symétries horizontales. A travers l'étude d'un modèle particulier, on montre comment ces symétries peuvent susciter l'apparition de relations naturelles entre les paramètres de mélange et les rapports de masse des quarks. On démontre ensuite un théorème de blocage qui précise les conditions dans lesquelles une relation naturelle peut dériver de l'invariance du lagrangien sous les transformations d'un groupe de symétrie horizontal. Le **chapitre 4** est destiné à la présentation de l'outil perturbatif permettant d'établir les conditions de calculabilité d'un paramètre ou les conditions de naturalité d'une relation. Un calcul à l'ordre d'une boucle aboutit à la détermination de la seule valeur éventuellement calculable de l'angle faible (on redécouvre les théories de grande unification). Un autre calcul à l'ordre d'une boucle conduit à la mise en évidence d'une relation du type Goldberger-Treiman dans un modèle simplifié (on redécouvre la brisure spontanée de la symétrie). Ces deux calculs serviront de modèles et d'incitants pour les développements à venir. C'est à partir de ce chapitre que débute à proprement parler la partie originale du travail de recherche. On consacre le **chapitre 5** à l'étude de calculabilité de l'angle de Cabibbo dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et deux générations de fermions, ainsi qu'à l'étude de calculabilité des paramètres de mélange dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et trois générations de fermions. On identifie la symétrie responsable des *mélanges finis* obtenus. On analyse enfin les conditions de possibilité d'un mélange partiellement (et naturellement) généré par corrections radiatives. Le **chapitre 6** est consacré à l'étude de naturalité des relations entre les paramètres de mélange et les rapports de masse des quarks dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et à n générations de fermions. Les calculs conduisent à la mise en évidence de $n - 1$ paramètres finis à l'ordre d'une boucle. L'extension minimale du Modèle Standard permettant de rendre compte de l'oscillation des neutrinos est alors introduite, et les calculs précédents sont généralisés au secteur des leptons. Enfin, par analogie avec l'électrodynamique quantique et par rapprochement avec le modèle sigma linéaire, le concept d'universalité de la charge est exporté dans le secteur de Yukawa du Modèle Standard. L'universalité postulée permet de combiner les paramètres finis à l'ordre d'une boucle et donne lieu à la formulation de plusieurs *relations finies* à l'ordre d'une boucle. L'une d'entre elle entraîne la prédiction numérique du rapport de la masse du quark *up* et de celle du quark *down*. Dans le cadre de l'extension leptonique minimale, on utilise les résultats récents de la collaboration SNO (*Sudbury Neutrino Observatory*) afin d'établir grossièrement le spectre de masse des neutrinos.

Chapitre 1

Brisure spontanée

Une théorie des champs est décrite par une densité de Lagrange, ou encore un lagrangien¹. Les champs sont rangés dans les représentations irréductibles d'un groupe de symétrie, c'est-à-dire qu'ils sont définis par leur loi de transformation sous les opérations du groupe de symétrie. Le lagrangien est une fonctionnelle scalaire des champs de la théorie et de leurs dérivées. Sa loi de transformation triviale (i.e. son invariance) sous les opérations du groupe de symétrie et la renormalisabilité de la théorie le déterminent complètement. On peut donc dire qu'une théorie des champs est caractérisée par un groupe de symétrie et un contenu en représentations. On associe en outre à ces symétries des lois de conservation.

Il arrive cependant que l'état du vide (i.e. l'état d'énergie minimale) de la théorie ne soit pas invariant sous certaines transformations du groupe de symétrie. Si l'état du vide varie sous ces transformations, c'est qu'il y a plusieurs vides possibles pour la théorie. Il est alors nécessaire d'en sélectionner un, et de redéfinir les champs autour de cet état du vide physique. Une fois les champs redéfinis, le lagrangien ne présente plus la propriété d'invariance sous les transformations incriminées. On dit que la symétrie associée à ces transformations est *dissimulée* ou *brisée spontanément*. A la différence de la brisure explicite de la symétrie, la brisure spontanée implique le respect des lois de conservation correspondantes.

Ce premier chapitre est consacré à l'étude de la brisure spontanée de la symétrie. On traite successivement le cas des symétries globales discrètes et continues, et des symétries locales abéliennes et non abéliennes. On montre que dans la plupart de ces cas, la signature de la brisure spontanée se révèle d'une importance phénoménologique fondamentale. En particulier, on énonce et démontre le théorème de Goldstone [2, 3, 4, 5], et on introduit le mécanisme de Higgs qui permet de douer les bosons de jauge du Modèle Standard d'une masse réaliste [6, 7, 8, 9, 10].

1.1 Symétries globales

Une symétrie est dite *globale* lorsque les lois de transformation qui lui sont associées ne dépendent pas de l'espace-temps. Les symétries globales sont discrètes ou continues, abéliennes ou non abéliennes. On examine le cas d'une symétrie discrète brisée spontanément. On généralise la démarche aux symétries continues. Enfin, on énonce et démontre le théorème de Goldstone.

¹Dans la suite du texte on utilise le terme lagrangien pour désigner une densité de Lagrange.

1.1.1 Symétries discrètes

On considère le lagrangien associé au champ scalaire réel ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad (1.1)$$

avec $\mu^2 > 0$ et $\lambda > 0$. Ce lagrangien est invariant sous les transformations du groupe symétrique S_2 qui envoient ϕ sur $\pm\phi$. La configuration classique d'énergie minimale est un champ $\phi(x) = \phi_0$ choisi pour minimiser le potentiel

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (1.2)$$

L'équation $\partial V/\partial\phi = 0$ admet les solutions $\phi_0 = 0$ et

$$\phi_0^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (1.3)$$

c'est-à-dire $\phi_0 = \pm\sqrt{\mu^2/\lambda}$. Parmi celles-ci, seules les deux dernières sont des minima du potentiel. La première aurait été le seul minimum du potentiel si l'on avait choisi un terme de masse de signe opposé dans le lagrangien (1.1). En théorie quantique des champs, le minimum du potentiel correspond à la valeur moyenne dans le vide – état d'énergie minimale ou état fondamental – du champ (ou des champs) concerné(s), i.e. $\phi_0 \equiv \langle\phi\rangle_0 = \pm\sqrt{\mu^2/\lambda}$. La condition (1.3) est invariante sous les transformations de S_2 . Choisir un état fondamental revient à privilégier l'un des deux minima, c'est à dire briser l'invariance du vide sous les transformations de S_2 . On choisit

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv v$$

et on redéfinit le champ $\phi \rightarrow \phi + v$ de telle sorte que $\langle(\phi + v)\rangle_0 = v$ et que dès lors $\langle\phi\rangle_0 = 0$. A un terme constant près, le lagrangien (1.1) s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}(\sqrt{2}\mu)^2\phi^2 - \sqrt{\lambda}\mu\phi^3 - \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (1.4)$$

On note l'absence de terme linéaire (à laquelle on pouvait s'attendre dans la mesure où l'on a translaté l'origine des axes jusqu'à l'un des minima du potentiel, i.e. V est minimal en $\phi = 0$; l'équation $\partial V/\partial\phi = 0|_{\phi=0}$ implique alors l'absence de terme linéaire), c'est-à-dire l'absence de diagrammes "têtard" à l'ordre zéro.

On dit que la symétrie S_2 est brisée spontanément. On dirait mieux qu'elle est dissimulée, qu'elle n'est plus apparente; elle se manifeste à travers les relations entre les trois coefficients du lagrangien (1.4) qui ne dépendent effectivement que de deux paramètres.

1.1.2 Symétries continues

Pour généraliser les considérations précédentes aux symétries continues, on examine le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i + \frac{1}{2}\mu^2\phi_i\phi_i - \frac{\lambda}{4}(\phi_i\phi_i)^2, \quad (1.5)$$

lequel implique une série de champs scalaires réels ϕ_i , i variant de 1 à N . On a l'invariance sous les transformations

$$\phi_i \longmapsto R_{ij}\phi_j$$

pour autant que la matrice R soit orthogonale, i.e. $R \in O(N)$ (il s'agit donc du groupe des rotations en N dimensions). On minimise le potentiel

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi_i\phi_i + \frac{\lambda}{4}(\phi_i\phi_i)^2$$

en exigeant que $\partial V/\partial\phi_j = 0 \forall j$. On observe que l'ensemble des minima est caractérisé par la condition

$$\phi_{0i}\phi_{0i} = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (1.6)$$

Seule la norme du vecteur ϕ_{0i} est déterminée; sa direction est arbitraire. On la choisit telle que le vecteur pointe le long de l'axe $i = N$, i.e.

$$\phi_{0i} = (0, 0, \dots, 0, v) \quad \text{avec} \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}.$$

On remarque qu'une transformation du groupe $O(N)$ de symétrie du lagrangien (1.5) permet de relier le vide choisi à toute autre configuration possible; en d'autres termes, le groupe de symétrie connecte entre eux tous les états du vide possible. On redéfinit alors le champ $\phi_N \rightarrow \phi_N + v$ et le lagrangien (1.5) s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \dots + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_{N-1}\partial^\mu\phi_{N-1} \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_N\partial^\mu\phi_N - \frac{1}{2}(\sqrt{2}\mu)^2\phi_N\phi_N \\ & + \text{termes d'interaction } (\phi\phi\phi \text{ et } \phi\phi\phi\phi). \end{aligned}$$

On note l'apparition de $N - 1$ champs ϕ_i ($i = 1, \dots, N - 1$) non massifs et d'un champ ϕ_N de masse $\sqrt{2}\mu$. Les $N - 1$ champs non massifs sont appelés bosons de Goldstone.

La symétrie $O(N)$ est dissimulée. Seule, la symétrie $O(N - 1)$ ($\subset O(N)$) qui mélange les $N - 1$ champs ϕ_i ($i = 1, \dots, N - 1$) entre eux demeure apparente. Si l'on représente le potentiel sur un graphe, on remarque que le champ massif ϕ_N décrit de petites oscillations dans la direction radiale, direction dans laquelle la dérivée seconde du potentiel ne disparaît pas (masse du champ ϕ_N non nulle); tandis que les $N - 1$ champs ϕ_i ($i = 1, \dots, N - 1$) décrivent de petites oscillations dans les directions tangentiellles, le long du "creux" du potentiel, directions selon lesquelles les dérivées secondes s'annulent. Le "creux" est une surface à $N - 1$ dimensions sur laquelle les $N - 1$ directions sont équivalentes (manifestation de la symétrie $O(N - 1)$ non brisée).

1.1.3 Théorème de Goldstone

On démontre le théorème de Goldstone, qui établit que la brisure spontanée d'une symétrie continue entraîne l'apparition d'une particule scalaire non massive, i.e. un boson de Goldstone, pour chaque générateur (de la symétrie originale) brisé² [2, 3, 4, 5].

On considère un lagrangien impliquant N champs scalaires réels ϕ_i appartenant à un vecteur Φ à N composantes :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - V(\Phi). \quad (1.7)$$

²Par générateur brisé on entend générateur modifiant l'état fondamental de la théorie, ou encore générateur infinitésimal du groupe G de symétrie du Lagrangien, qui ne soit pas générateur infinitésimal du groupe g ($\subset G$) de symétrie de l'état fondamental.

On suppose l'invariance de ce lagrangien sous les transformations d'un groupe continu G . Les lois de transformation globales des champs scalaires s'écrivent (sous leur forme infinitésimale) :

$$\Phi \longmapsto \Phi - i\alpha^a T^a \Phi,$$

où T^a ($a \in \{1, \dots, d_G\}$, avec d_G la dimension du groupe G , i.e. le nombre de générateurs indépendants) sont les générateurs infinitésimaux du groupe G et où α^a sont des paramètres réels et petits. Or le potentiel $V(\Phi)$ est invariant sous les transformations de G . Donc

$$\delta V(\Phi) = \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_i} \delta \phi_i = -i \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_i} \alpha^a (T^a)_{ij} \phi_j = 0$$

ou encore, puisque les paramètres de jauge α^a sont arbitraires,

$$\frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_i} (T^a)_{ij} \phi_j = 0$$

$\forall a \in \{1, \dots, d_G\}$. On dérive ces équations pour obtenir

$$\frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \phi_k \partial \phi_i} (T^a)_{ij} \phi_j + \frac{\partial V(\Phi)}{\partial \phi_i} (T^a)_{ik} = 0,$$

que l'on évalue en $\Phi = \Phi_0$ où Φ_0 minimise le potentiel $V(\Phi)$. Alors on a

$$\left. \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \phi_k \partial \phi_i} \right|_{\Phi=\Phi_0} (T^a)_{ij} \phi_{0j} = 0$$

ou encore

$$M_{ki}^2 (T^a)_{ij} \phi_{0j} = 0, \tag{1.8}$$

où $M_{ki}^2 \equiv (\partial^2 V(\Phi)) / (\partial \phi_k \partial \phi_i) |_{\Phi=\Phi_0}$ est la matrice de masse des champs scalaires redéfinis autour du vide réel³. Si le vide choisi demeure invariant sous les transformations d'un sous-groupe g de G , alors

$$(T^a)_{ij} \phi_{0j} = 0$$

pour les d_g générateurs non brisés, d_g étant la dimension du sous-groupe g de G . Par contre, pour les $d_G - d_g$ générateurs brisés, on a

$$(T^a)_{ij} \phi_{0j} \neq 0.$$

Alors la relation (1.8) permet de conclure que la matrice de masse M_{ij}^2 a $d_G - d_g$ valeurs propres nulles. En d'autres termes, parmi les N champs scalaires de la théorie, $d_G - d_g$ sont non massifs et sont appelés bosons de Goldstone.

Afin d'illustrer les conclusions de cette démonstration, reprenons le modèle examiné dans la section précédente. La symétrie $G = O(N)$ est brisée spontanément par le choix d'un état fondamental. L'état fondamental Φ_0 est invariant sous les transformations du sous-groupe $g = O(N-1)$ de G . On a $d_G = N(N-1)/2$ et $d_g = (N-1)(N-2)/2$. Le nombre de générateurs brisés est alors de $d_G - d_g = N-1$. Il y a donc $N-1$ bosons de Goldstone. Considérant $O(N)$ comme le groupe de symétrie le plus contraignant pour un lagrangien du type (1.7), on note que toujours

$$d_G - d_g < N.$$

³La chose est évidente si l'on développe le potentiel autour du minimum Φ_0 :

$$V(\Phi) = V(\Phi_0) + \frac{1}{2} (\phi - \phi_0)_i (\phi - \phi_0)_j \left. \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\Phi=\Phi_0} + \dots$$

et que l'on observe le terme de masse des nouveaux champs $\Phi - \Phi_0$.

1.2 Symétries locales

Une symétrie est dite *locale* lorsque les lois de transformation qui lui sont associées dépendent de l'espace-temps. L'invariance d'un lagrangien sous les transformations locales d'un groupe de symétrie (i.e. "sous une symétrie locale") de dimension d_G entraîne l'apparition de d_G bosons vectoriels non massifs. Ces bosons sont dits *bosons de jauge*. Ils véhiculent l'interaction associée à la symétrie. Une symétrie locale est également dite *symétrie de jauge*. On montre comment la brisure spontanée d'une symétrie de jauge permet de fournir une masse aux bosons de jauge [6, 7, 8, 9, 10].

1.2.1 Symétries abéliennes

Soit le lagrangien (1.5) avec $N = 2$, invariant sous les transformations globales du groupe $SO(2)$ (ainsi que sous l'échange $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (1.9)$$

que l'on exprime en redéfinissant les champs ϕ_1 et ϕ_2 à l'aide d'un seul champ scalaire complexe⁴

$$\phi \equiv \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$$

et dont on étend l'invariance sous les transformations locales du groupe $SO(2) \sim U(1)$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (1.10)$$

avec $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ et $D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu$, où A^μ est un champ vectoriel non massif (par exemple celui du photon). Le lagrangien (1.10) est celui de l'électrodynamique quantique scalaire. On montre qu'il est effectivement invariant sous les transformations du groupe $U(1)$ appliquées aux champs scalaire et vectoriel :

$$\phi \longmapsto e^{-i\Lambda}\phi, \quad (1.11)$$

$$A^\mu \longmapsto A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu\Lambda, \quad (1.12)$$

où $\Lambda = \Lambda(x)$ est une fonction réelle de l'espace-temps. Le potentiel $V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$ est minimal en $\phi^*\phi = v^2/2$ avec⁵ $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$, et on peut choisir pour ϕ la valeur moyenne dans le vide $\phi_0 = v e^{i\alpha}/\sqrt{2}$ où α est un paramètre réel arbitraire. A nouveau, on note que les transformations du groupe de symétrie du lagrangien, qui permettent de modifier la phase $e^{i\alpha}$ d'un facteur $e^{-i\Lambda}$, relient entre elles les différentes configurations du vide. En choisissant (ou en laissant la nature choisir) une phase particulière, on brise l'invariance de jauge du vide du modèle - et non pas celle du lagrangien du modèle. C'est-à-dire qu'une transformation de jauge modifie la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire. Cependant les lois physiques associées au lagrangien ne s'en trouvent pas affectées. Autrement dit : la physique ne dépend pas du choix du vide parmi les vides possibles de la théorie. En outre, puisqu'il s'agit ici d'une

⁴L'objectif de cette redéfinition est de ranger les champs dans les représentations irréductibles du groupe abélien $SO(2)$, lesquelles sont toutes de dimension 1. On reviendra aux champs réels dans la suite du raisonnement.

⁵Le facteur 1/2 provient d'un choix de conventions.

symétrie de jauge, les conséquences de la brisure spontanée s'étendent au secteur de jauge du modèle. Pour s'en rendre compte on redéfinit les champs autour de la valeur moyenne dans le vide $\phi_0 = v/\sqrt{2}$ (i.e. $\alpha = 0$), c'est-à-dire qu'on effectue la translation $\phi \rightarrow \phi + v/\sqrt{2}$, et on réécrit le lagrangien (1.10), ne retenant que les termes quadratiques en les champs et en leurs dérivées :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi \\ & + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}evA_\mu\partial^\mu(\phi - \phi^*) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mu^2(\phi + \phi^*)^2 \\ & + \text{termes d'interaction} \end{aligned}$$

et on le réexprime enfin en fonction des champs réels ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - evA_\mu\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\mu\right)^2\phi_1^2 + \text{t.i.}$$

L'intérêt de ce lagrangien réside dans la présence du terme $A_\mu\partial^\mu\phi_2$ qui mélange les particules A_μ et ϕ_2 . On peut combiner les trois termes centraux du lagrangien pour obtenir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}e^2v^2\left(A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\phi_2\right)\left(A^\mu - \frac{1}{ev}\partial^\mu\phi_2\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\mu\right)^2\phi_1^2 + \text{t.i.}$$

et l'on observe que le champ ϕ_2 n'intervient plus que dans les parenthèses centrales et peut dès lors être considéré comme un degré de liberté du champ vectoriel A_μ . En effet, après redéfinition du champ vectoriel

$$A^\mu \longmapsto A^\mu + \frac{1}{ev}\partial^\mu\phi_2,$$

on aboutit au lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \text{t.i.},$$

où $M = ev$ est la masse associée au champ vectoriel, tandis que $m = \sqrt{2}\mu$ est la masse associée au champ scalaire. Il s'agit du lagrangien d'un boson vectoriel et d'un scalaire massifs ; le champ scalaire ϕ_2 a quant à lui disparu⁶. En d'autres termes, le mécanisme de Higgs, à travers la

⁶Notons qu'il subsistera une trace du champ scalaire ϕ_2 dans les termes d'interaction. Le traitement approfondi de la brisure spontanée d'une symétrie de jauge et la dérivation des règles de Feynman associées au lagrangien ne peuvent être envisagés sans considérations relatives au choix de la jauge. Nous n'irons pas plus loin dans l'examen du mécanisme de Higgs, notre objectif se limitant à illustrer la génération de la masse des bosons de jauge. Cependant, en reconsidérant le lagrangien (1.10), et en redéfinissant différemment le champ complexe ϕ autour de la valeur moyenne dans le vide $v/\sqrt{2}$ (la paramétrisation est particulière et motivée par le choix de la jauge – jauge unitaire, dont on ne discutera pas plus avant) :

$$\phi \longrightarrow \exp\left(\frac{i\phi_2}{v}\right)\frac{\phi_1 + v}{\sqrt{2}};$$

on observe qu'après la transformation de jauge combinant (1.11) et (1.12) avec $\Lambda(x) = \frac{1}{v}\phi_2(x)$ le champ ϕ_2 disparaît complètement du lagrangien, i.e.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}[D_\mu(\phi_1 + v)]^*[D^\mu(\phi_1 + v)] + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1 + v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1 + v)^4.$$

brisure spontanée de la symétrie, transforme un degré de liberté scalaire en un degré de liberté vectoriel longitudinal. Ou encore : le boson de Goldstone produit par la brisure spontanée de la symétrie est absorbé par le champ vectoriel devenu massif (et comptant dès lors un degré de liberté supplémentaire).

1.2.2 Symétries non abéliennes

On peut généraliser les considérations précédentes aux symétries non abéliennes. On part du lagrangien (1.5) impliquant N champs scalaires ϕ_i rangés cette fois dans les multiplets (i.e. les représentations irréductibles) d'un certain groupe continu non abélien G de dimension d_G , groupe de symétrie du potentiel V . Ces multiplets sont symbolisés par Φ . On écrit

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - V(\Phi),$$

où Φ a été défini tel qu'il puisse absorber le facteur $1/2$ de son terme cinétique. On impose l'invariance du lagrangien sous les transformations locales du groupe G , c'est-à-dire qu'on remplace les dérivées usuelles par des dérivées covariantes :

$$D^\mu = \partial^\mu - igT^a W^{a\mu},$$

où T^a , $a \in \{1, \dots, d_G\}$, sont les représentants des générateurs du groupe G , et $W^{a\mu}$ sont les d_G champs vectoriels non massifs introduits pour garantir l'invariance. Le lagrangien est ensuite complété par les termes cinétiques associés aux champs vectoriels. Après brisure spontanée de la symétrie, i.e. après le choix d'une configuration du vide Φ_0 minimisant le potentiel $V(\Phi)$, imaginons que cette même configuration Φ_0 demeure invariante sous les transformations d'un sous-groupe g de G , de dimension d_g . Cela signifie qu'on a

$$T^a \Phi_0 = 0 \quad \text{pour } a \in \{1, \dots, d_g\},$$

ce qui, si l'on s'en réfère au théorème de Goldstone, devrait donner lieu à l'apparition de $d_G - d_g$ bosons de Goldstone, i.e. $d_G - d_g$ scalaires de masse nulle. On les désigne ϕ_{BG}^a , $a \in \{d_g, \dots, d_G\}$. Cependant, on peut redéfinir les champs scalaires autour de la valeur moyenne dans le vide $v \equiv \Phi_0$ à l'aide d'une paramétrisation particulière évoquée dans la section précédente :

$$\Phi \longrightarrow (\Phi + v) \exp\left(\frac{i\phi_{BG}^a T^a}{v}\right),$$

où T^a sont les $d_G - d_g$ générateurs qui n'annihilent pas le vide, c'est-à-dire pour lequel $T^a \Phi_0 \neq 0$. Un choix de jauge particulier permet ensuite d'éliminer les champs ϕ_{BG}^a du lagrangien⁷. Les $d_G - d_g$ degrés de liberté scalaires se sont transformés en degrés de liberté vectoriels longitudinaux ; autrement dit, parmi les d_G bosons de jauge, $d_G - d_g$ sont devenus massifs en absorbant les bosons de Goldstone produits par la brisure spontanée de la symétrie.

On établit le bilan des degrés de liberté avant et après brisure spontanée de la symétrie. Avant brisure spontanée de la symétrie, on a N degrés de liberté pour les N champs scalaires et $2d_G$ degrés de liberté pour les d_G champs vectoriels non massifs. Après brisure spontanée de la symétrie, on a $N - (d_G - d_g)$ degrés de liberté pour les $N - (d_G - d_g)$ champs scalaires restants, $2d_g$ degrés de liberté pour les d_g champs vectoriels non massifs restants, et $3(d_G - d_g)$ degrés de liberté pour les $d_G - d_g$ champs vectoriels massifs. On vérifie bien que

$$N + 2d_G = N - (d_G - d_g) + 2d_g + 3(d_G - d_g).$$

⁷Il suffit de soumettre tous les champs à la transformation de jauge déterminée par les paramètres de jauge $\theta^a = \phi_{BG}^a/v$ si $a \in \{d_g, \dots, d_G\}$ et $\theta^a = 0$ sinon.

Conclusion

Lorsque l'état du vide d'une théorie n'est pas invariant sous les transformations du groupe de symétrie de cette même théorie, on dit que la symétrie est brisée spontanément. C'est-à-dire que le choix d'un état du vide et la redéfinition des champs autour de cet état du vide physique dissimulent la symétrie originale. Celle-ci se manifeste alors dans les relations entre les paramètres du lagrangien redéfini (i.e. le lagrangien tel qu'il s'exprime en termes des champs redéfinis). Comme on le précisera aux chapitres 3 et 4, ces relations sont dites naturelles.

On a montré que la brisure spontanée d'une symétrie globale continue entraîne l'apparition d'un boson de masse nulle pour chaque générateur brisé. L'existence de ces bosons de masse nulle, dits bosons de Goldstone, peut être considérée comme la signature de la brisure spontanée de la symétrie. Lorsque la symétrie brisée spontanément est une symétrie de jauge, i.e. une symétrie locale, alors les bosons de Goldstone sont absorbés par les bosons de jauge et leur confèrent une masse. Ce mécanisme de génération de masse, dit mécanisme de Higgs, respecte l'invariance de jauge de la théorie. Le sort des fermions dans une théorie dont la symétrie est brisée spontanément est étudié au chapitre suivant (sous-section 2.1.2).

Chapitre 2

Systèmes scalaires

Le Modèle Standard des particules élémentaires et des interactions fondamentales est une théorie des champs. Son lagrangien est invariant sous les transformations locales du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Le groupe de jauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ des interactions électrofaibles [11, 12, 13] du Modèle Standard¹ possède quatre générateurs. Il entraîne donc l'existence de quatre bosons de jauge non massifs. La brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ engendre un terme de masse pour trois des quatre bosons de jauge. Mais la symétrie ne peut être brisée spontanément sans l'introduction d'un *système scalaire*² dans le modèle, c'est-à-dire un ensemble de champs scalaires rangés dans les représentations irréductibles du groupe de jauge. L'existence d'un potentiel scalaire *ad hoc* peut alors précipiter l'état fondamental du modèle dans une direction particulière et la redéfinition des champs autour de cet état dissimule la symétrie originale. Lorsqu'il donne effectivement lieu à la brisure spontanée de la symétrie, le système scalaire ou secteur scalaire du modèle est appelé *secteur de Higgs*.

On détermine généralement le système scalaire d'un modèle *a posteriori*, en fonction du type de brisure spontanée que l'on souhaite provoquer. En quelque sorte, le système scalaire vient s'ajouter "en dessous" du modèle initial pour lui permettre de reproduire un spectre de masse non trivial. La démarche adoptée dans ce chapitre est différente. Introduite par Veltman [14], elle consiste à construire le Modèle Standard à partir du modèle sigma linéaire [15, 16]. C'est-à-dire que l'on démarre d'un système scalaire minimal (i.e. celui du modèle sigma linéaire), et que l'on définit tour à tour les interactions de Yukawa, les interactions de jauge et la brisure spontanée de la symétrie. En d'autres termes, le Modèle Standard est perçu comme un espèce de "prolongement" de son propre secteur scalaire minimal. Les avantages de cette approche sont multiples. Dans un premier temps, elle privilégie le système scalaire du modèle sigma linéaire, lequel est le seul à même de reproduire naturellement l'électrodynamique quantique telle qu'on la connaît. En outre, elle jette un éclairage nouveau sur la présence de la *symétrie custodiale* au sein du Modèle Standard. Enfin, on verra par la suite (chapitre 6) qu'elle permet d'établir un parallèle entre les constantes de renormalisation du Modèle Standard et du modèle sigma linéaire.

Ce chapitre est donc consacré à la présentation du modèle sigma linéaire sous sa forme originale, et à la construction, à partir de celui-ci, du secteur électrofaible du Modèle Standard des particules élémentaires et des interactions fondamentales [14]. On s'attarde ensuite sur les extensions possibles du secteur de Higgs du Modèle Standard.

¹Au cours de ce chapitre on écrit Modèle Standard pour Modèle Standard des interactions électrofaibles.

²Dans la suite du texte on utilise indistinctement système scalaire et secteur scalaire.

2.1 Le modèle sigma linéaire

A l'origine, le modèle sigma linéaire [15, 16] a été introduit pour décrire les interactions fortes entre les pions et les nucléons à basse énergie. Il s'est ensuite révélé être un modèle de choix pour l'illustration de certaines caractéristiques fondamentales de la théorie des champs telle la renormalisation [17, 18]. Enfin, et c'est la raison pour laquelle on a choisi de lui consacrer cette section, il offre une série de ressemblances avec le secteur scalaire du Modèle Standard.

Dans un premier temps on définit le lagrangien et les lois d'invariance du modèle sigma linéaire. On étudie ensuite les conséquences de la brisure spontanée de la symétrie sur les fermions du modèle.

2.1.1 Lagrangien et symétries

On considère l'expression originale du lagrangien du modèle sigma linéaire³ [19] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \\ & + \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - g_y \bar{\Psi} (\sigma + i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5) \Psi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où σ et $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ sont des champs réels de spin 0, et où $\Psi = (u \ d)^T$ est un doublet de fermions. Le lagrangien (2.1) est invariant sous les transformations globales du groupe $SU(2)_V$:

$$\begin{aligned} \sigma & \longmapsto \sigma, \\ \boldsymbol{\pi} & \longmapsto \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}, \\ \Psi & \longmapsto \Psi - i \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \Psi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont des paramètres quelconques, réels et petits. Ces transformations sont présentées sous leur forme infinitésimale. Elles sont dites vectorielles (V) parce que les courants conservés qui leur correspondent sont de nature vectorielle. C'est à ce groupe de symétrie que l'on associe la notion d'isospin : σ est un isoscalaire ; Ψ , un isodoublet ; et $\boldsymbol{\pi}$, un isotriplet. En outre, le lagrangien (2.1) est invariant sous les transformations globales du groupe $SU(2)_A$:

$$\begin{aligned} \sigma & \longmapsto \sigma + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi}, \\ \boldsymbol{\pi} & \longmapsto \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\beta} \sigma, \\ \Psi & \longmapsto \Psi + i \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \gamma_5 \Psi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont des paramètres quelconques, réels et petits. A nouveau ces transformations sont présentées sous leur forme infinitésimale. Elles sont dites axiales (A) parce que les courants conservés qui leur correspondent sont de nature axiale. On remarque enfin l'invariance du lagrangien (2.1) sous les transformations globales du groupe $U(1)_B$:

$$\begin{aligned} \sigma & \longmapsto \sigma, \\ \boldsymbol{\pi} & \longmapsto \boldsymbol{\pi}, \\ \Psi & \longmapsto e^{-i\kappa} \Psi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

³On a remplacé les champs des nucléons P et N (proton et neutron) de charge respective +1 et 0, par les champs des quarks u et d (*up* et *down*) de charge respective +2/3 et -1/3, la charge unité étant donnée par la valeur absolue de la charge électrique de l'électron.

avec $\kappa \in \mathbb{R}$. On a répertorié l'ensemble des symétries que présente le lagrangien (2.1) : $SU(2)_V$, $SU(2)_A$ et $U(1)_B$. On ne peut cependant pas parler du produit direct de ces groupes parce que les transformations (2.2) et (2.3) ne commutent pas.

Il est toutefois possible de réarranger le lagrangien du modèle sigma linéaire et d'en montrer l'invariance sous une série de transformations qui commutent mutuellement. On observe que les fermions du lagrangien (2.1) sont non massifs, ce qui entraîne l'existence d'une symétrie chirale. A partir des champs chiraux $\Psi_R = (1 + \gamma_5)/2 \Psi$ et $\Psi_L = (1 - \gamma_5)/2 \Psi$, le terme d'interaction de (2.1) s'écrit $-g_y \bar{\Psi}_L \Sigma \Psi_R - g_y \bar{\Psi}_R \Sigma^\dagger \Psi_L$ avec $\Sigma = \sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}$. On note l'invariance de cette expression sous les transformations $\Psi_L \mapsto U_L \Psi_L$, $\Psi_R \mapsto U_R \Psi_R$, et $\Sigma \mapsto U_L \Sigma U_R^\dagger$, où U_L et U_R sont les représentations bidimensionnelles des groupes $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$, respectivement. Vérifiant⁴ que les expressions $\text{tr}(\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma)$ et $\text{tr}(\Sigma^\dagger \Sigma)$ ne varient pas, non plus, sous ces transformations, on peut finalement réécrire le lagrangien (2.1) du modèle sigma linéaire en terme des champs Ψ_L , Ψ_R et Σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \text{tr} \left(\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma \right) + \frac{\mu^2}{4} \text{tr} \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right) - \frac{\lambda}{16} \text{tr}^2 \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right) \\ & + \bar{\Psi}_L i \not{\partial} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \not{\partial} \Psi_R - g_y \left(\bar{\Psi}_L \Sigma \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Sigma^\dagger \Psi_L \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les transformations globales peuvent s'écrire sous leur forme infinitésimale ; pour $SU(2)_L$, on a

$$\begin{aligned} \Psi_L & \mapsto \Psi_L - i\theta_i^L \frac{T_i}{2} \Psi_L, \\ \Sigma & \mapsto \Sigma - i\theta_i^L \frac{T_i}{2} \Sigma, \end{aligned} \quad (2.6)$$

et pour $SU(2)_R$

$$\begin{aligned} \Psi_R & \mapsto \Psi_R - i\theta_i^R \frac{T_i}{2} \Psi_R, \\ \Sigma & \mapsto \Sigma + i\theta_i^R \frac{T_i}{2} \Sigma, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où θ_i^L et θ_i^R ($i = 1, 2, 3$) sont des paramètres quelconques, réels et petits. Enfin, à ces transformations il faut ajouter les transformations globales du groupe de symétrie $U(1)_B$:

$$\begin{aligned} \Psi_L & \mapsto e^{-i\kappa} \Psi_L, \\ \Psi_R & \mapsto e^{-i\kappa} \Psi_R, \\ \Sigma & \mapsto \Sigma, \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec $\kappa \in \mathbb{R}$, sous lesquelles le lagrangien (2.5) demeure également invariant.

On remarque que les transformations (2.6), (2.7) et (2.8) commutent mutuellement⁵. On a dès lors déterminé le groupe des symétries continues du modèle sigma linéaire, à savoir le groupe produit $G = SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_B$.

⁴Sous forme matricielle, on a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma + i\pi_3 & i\pi_1 + \pi_2 \\ i\pi_1 - \pi_2 & \sigma - i\pi_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \sigma - i\pi_3 & -i\pi_1 - \pi_2 \\ -i\pi_1 + \pi_2 & \sigma + i\pi_3 \end{pmatrix}.$$

⁵On peut en outre établir des relations entre les paramètres de transformation des groupes $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$ d'une part, et $SU(2)_V$ et $SU(2)_A$ de l'autre. En comparant les lois de transformation (2.2) et (2.3) aux lois de transformation (2.6) et (2.7), on montre que $\alpha_i = 1/2(\theta_i^L - \theta_i^R)$ et $\beta_i = 1/2(\theta_i^L + \theta_i^R)$.

2.1.2 Brisure spontanée de la symétrie

Puisque le terme de masse des champs scalaires du lagrangien (2.1) est positif, la symétrie du modèle sigma linéaire est brisée spontanément. Pour le secteur scalaire le lagrangien (2.1) correspond point par point au lagrangien (1.5) avec $N = 4$ pour autant que l'on procède à l'identification $(\boldsymbol{\pi}, \sigma) \equiv \phi_i$, i variant de 1 à 4. On profite de ce rapprochement pour constater l'isomorphisme existant entre les algèbres de Lie de $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ et de $O(4)$. Le potentiel peut être minimisé, et le choix d'une configuration du vide ϕ_0 , par exemple

$$(\boldsymbol{\pi}, \sigma)_0 = (0, 0, 0, v) \quad \text{avec} \quad v = \sqrt{\mu^2/\lambda}, \quad (2.9)$$

brise spontanément la symétrie $O(4)$, le lagrangien n'étant plus explicitement invariant que sous les transformations du groupe $O(3)$. Ou encore : la symétrie $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ est brisée spontanément, et seul subsiste le groupe d'invariance $SU(2)_V$, sous-groupe diagonal de $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, qui mélange les pseudoscalaires $\boldsymbol{\pi}$, lesquels ne sont pas affectés par la brisure spontanée en vertu du choix du vide (2.9). Après brisure spontanée de la symétrie, ces bosons se trouvent privés de masse, et correspondent dès lors aux bosons de Goldstone associés aux trois générateurs brisés du groupe $O(4)$ (ou du groupe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$).

En outre, la présence de fermions dans le lagrangien (2.1) du modèle sigma linéaire permet d'illustrer l'une des dernières conséquences de la brisure spontanée de la symétrie. Les fermions ne sont au départ pas doués de masse, mais après brisure spontanée de la symétrie, lorsque le champ σ développe une valeur moyenne dans le vide non nulle, le terme d'interaction fermions-scalaires donne naissance à un terme de masse pour le doublet de fermions. En effet, lorsque $\sigma \rightarrow \sigma + v$, on a $-g_y \bar{\Psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5) \Psi \rightarrow -g_y \bar{\Psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5) \Psi - g_y v \bar{\Psi} \Psi$, et les fermions se trouvent doués d'une masse⁶ :

$$m = g_y v. \quad (2.10)$$

2.2 Le Modèle Standard

Afin de préparer le rapprochement entre le modèle sigma linéaire et le Modèle Standard, tâchons de présenter en quelques lignes les caractéristiques fondamentales du lagrangien du secteur vectoriel associé à l'invariance sous les transformations locales du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Avant brisure spontanée de la symétrie, ce lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu},$$

avec $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{W}^\nu - \partial^\nu \mathcal{W}^\mu - ig[\mathcal{W}^\mu, \mathcal{W}^\nu]$ où $\mathcal{W}^\mu = W_i^\mu \tau_i/2$ est un triplet d'isospin, tandis que $G^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$ où B^μ est un singulet d'isospin. Les lois⁷ de transformation de ces isomultiplets sont données par

$$\mathcal{W}^\mu \longmapsto U \mathcal{W}^\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial^\mu U^\dagger, \quad (2.11)$$

$$B^\mu \longmapsto B^\mu - \frac{1}{g'} \partial^\mu \Lambda, \quad (2.12)$$

⁶Dans le modèle sigma linéaire original, cette expression est appelée relation de Goldberger-Treiman (à l'ordre zéro) [20] et se réécrit $m_N = g_{\pi NN} f_\pi$, où m_N est la masse des nucléons, $g_{\pi NN}$ la constante de couplage pion-nucléons et f_π la constante de désintégration du pion. Cette relation est en accord approximatif avec l'expérience puisque $g_{\pi NN} = 13,6$ et $m_N/f_\pi \simeq 10$. A l'ordre suivant en théorie de la perturbation, l'erreur est ramenée à 10% [21].

⁷Pour le tenseur $\mathcal{F}^{\mu\nu}$, la loi de transformation s'écrit $\mathcal{F}^{\mu\nu} \mapsto U \mathcal{F}^{\mu\nu} U^\dagger$.

où $U \in SU(2)_T$ et $e^{i\Lambda} \in U(1)_Y$; g et g' sont les constantes de couplage associées aux groupes $SU(2)_T$ et $U(1)_Y$. On a donc construit un lagrangien invariant sous les transformations locales du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Il s'agit maintenant de revenir au modèle sigma linéaire, d'en jauger la symétrie (i.e. de la rendre locale), de la briser spontanément, et d'identifier le spectre de masse obtenu à celui du Modèle Standard. On étudie ensuite les secteurs vectoriel, fermionique et scalaire du Modèle Standard à partir du modèle sigma linéaire.

2.2.1 Le modèle sigma linéaire jaugé

Si l'on considère lagrangien (2.5) du modèle sigma linéaire, et que l'on souhaite rendre la symétrie $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ locale, il s'agit d'introduire deux triplets de bosons de jauge W_{Li}^μ et W_{Ri}^μ correspondant respectivement aux groupes $SU(2)_L$ et $SU(2)_R$. Le couplage de ces champs vectoriels aux champs scalaires s'obtient en remplaçant dans (2.5) les dérivées $\partial^\mu \Sigma$ par les dérivées covariantes

$$D^\mu \Sigma = \partial^\mu \Sigma - ig_L \mathcal{W}_L^\mu \Sigma + ig_R \Sigma \mathcal{W}_R^\mu,$$

où $W_L^\mu = W_{Li}^\mu \tau_i / 2$ et $W_R^\mu = W_{Ri}^\mu \tau_i / 2$, avec les lois de transformation

$$\mathcal{W}_L^\mu \mapsto U_L \mathcal{W}_L^\mu U_L^\dagger + \frac{i}{g_L} U_L \partial^\mu U_L^\dagger, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{W}_R^\mu \mapsto U_R \mathcal{W}_R^\mu U_R^\dagger + \frac{i}{g_R} U_R \partial^\mu U_R^\dagger, \quad (2.14)$$

où $U_L \in SU(2)_L$ et $U_R \in SU(2)_R$ sont des fonctions de l'espace-temps. Or sous les transformations de ces mêmes groupes, on avait $\Sigma \mapsto U_L \Sigma U_R^\dagger$. Il s'ensuit que $D^\mu \Sigma \mapsto U_L (D^\mu \Sigma) U_R^\dagger$. On conclut que le terme $\text{tr} [(D_\mu \Sigma)^\dagger D^\mu \Sigma]$ est bien invariant sous les transformations locales du groupe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. On examinera le sort des fermions du modèle sigma linéaire en fin de section.

Imaginons maintenant que le champ scalaire (neutre) σ développe une valeur moyenne dans le vide non nulle : $\langle \sigma \rangle_0 = v$. La translation $\sigma \rightarrow \sigma + v$ se répercute sur le champ matriciel $\Sigma \rightarrow \Sigma + \Sigma_0$ avec $\Sigma_0 = v \cdot \mathbb{I}$. On s'attarde alors sur l'élément $D^\mu \Sigma_0$, présent dans le lagrangien du modèle sigma linéaire jaugé après brisure spontanée de la symétrie. On remarque que $D^\mu \Sigma_0 = -iv(g_L W_{Li}^\mu - g_R W_{Ri}^\mu) \tau_i / 2$. A partir de cette expression, on obtient le terme de masse des bosons de jauge :

$$\mathcal{L}_{MV} = \frac{1}{4} \text{tr} \left[(D_\mu \Sigma_0)^\dagger D^\mu \Sigma_0 \right] = \frac{v^2}{8} (g_L W_{Li}^\mu - g_R W_{Ri}^\mu)^2.$$

Ceci nous permet de conclure que parmi les six degrés de liberté vectoriels que représentent les six bosons de jauge W_{Li}^μ et W_{Ri}^μ , les trois combinaisons $g_L W_{Li}^\mu - g_R W_{Ri}^\mu$ sont massives, tandis que les trois degrés de liberté restants ne le sont pas. Ces derniers correspondent aux trois combinaisons $g_R W_{Li}^\mu + g_L W_{Ri}^\mu$, orthogonales aux trois premières. On peut paramétrer ces combinaisons à l'aide d'un angle de mélange, θ_W , défini par la relation

$$\text{tg } \theta_W = \frac{g_R}{g_L}. \quad (2.15)$$

Les termes de masse des trois combinaisons $\cos \theta_W W_{Li}^\mu - \sin \theta_W W_{Ri}^\mu$ s'écrivent alors

$$\mathcal{L}_{MV} = \frac{v^2}{8} \frac{g_L^2}{\cos^2 \theta_W} (\cos \theta_W W_{Li}^\mu - \sin \theta_W W_{Ri}^\mu)^2, \quad (2.16)$$

les trois combinaisons $\sin \theta_W W_{Li}^\mu + \cos \theta_W W_{Ri}^\mu$ demeurant non massives.

2.2.2 Le secteur vectoriel du Modèle Standard

L'objectif étant de construire le Modèle Standard à partir du modèle sigma linéaire, on cherche à identifier les bosons de jauge de celui-ci aux bosons de jauge des interactions faibles. On note que les trois combinaisons massives $\cos \theta_W W_{Li}^\mu - \sin \theta_W W_{Ri}^\mu$ correspondent aux trois bosons de jauge massifs du Modèle Standard, et que parmi les trois combinaisons non massives $\sin \theta_W W_{Li}^\mu + \cos \theta_W W_{Ri}^\mu$, il convient d'en choisir une, et une seule (on prendra la troisième), et de l'assimiler au champ du photon. Les deux autres combinaisons non massives ne sont pas observées et doivent être abandonnées. On parle de la brisure explicite (locale) de $SU(2)_R$. On a donc $W_{Li}^\mu = W_i^\mu$ et $W_{R3}^\mu = B^\mu$, tandis que $W_{R1}^\mu = W_{R2}^\mu = 0$. En outre on écrira $g_L = g$ et $g_R = g'$. Tenant compte de ces identifications, on réécrit le terme de masse (2.16) :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{MV} &= \frac{v^2 g^2}{8} \left[(W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta_W} (\cos \theta_W W_3^\mu - \sin \theta_W B^\mu)^2 \right] \\ &= M_W^2 W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^{0\mu} Z_\mu^0,\end{aligned}$$

où $W^{\pm\mu} = 1/\sqrt{2}(W_1^\mu \mp iW_2^\mu)$ et $Z^{0\mu} = \cos \theta_W W_3^\mu - \sin \theta_W B^\mu$ sont les bosons de jauge, respectivement chargés et neutre, de masses $M_W = gv/2$ et $M_Z = gv/(2 \cos \theta_W)$, tandis que le photon $A^\mu = \sin \theta_W W_3^\mu + \cos \theta_W B^\mu$ demeure le seul boson de jauge non massif. A l'ordre le plus bas, on a la relation

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1. \quad (2.17)$$

La différence de masse entre les bosons W^\pm et Z^0 provient essentiellement de la brisure explicite de $SU(2)_R$ (c'est à dire du fait que l'on ne retienne que W_{R3}^μ parmi les trois champs W_{Ri}^μ). La manifestation de la brisure explicite de $SU(2)_R$ dans le secteur des fermions (voir sous-section suivante et discussion en bas de la page 27) et l'électromagnétisme viennent accentuer cette différence en corrigeant le paramètre ρ aux ordres supérieurs en théorie de la perturbation.

On a montré qu'on peut considérer le Modèle Standard des interactions électrofaibles comme un modèle sigma linéaire jaugé, brisé spontanément, mais dont la symétrie $SU(2)_R$ est explicitement réduite à l'invariance sous rotation autour du troisième axe dans l'espace d'isospin droit. On constate effectivement que les lois (2.13) et (2.14) de transformation des bosons de jauge du modèle sigma linéaire peuvent s'appliquer aux bosons de jauge du Modèle Standard pour autant que l'on ne considère parmi les matrices U_R que les éléments du sous-groupe $U(1)_{[3]} \subset SU(2)_R$ engendré par le troisième générateur $\tau_3/2$. On peut ainsi réécrire les lois (2.11) et (2.12) de transformation des bosons de jauge du Modèle Standard :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^\mu &\longmapsto U_L \mathcal{W}^\mu U_L^\dagger + \frac{i}{g} U_L \partial^\mu U_L^\dagger, \\ \mathcal{B}^\mu &\longmapsto \tilde{U}_R \mathcal{B}^\mu \tilde{U}_R^\dagger + \frac{i}{g'} \tilde{U}_R \partial^\mu \tilde{U}_R^\dagger,\end{aligned}$$

où⁸ $U_L = \exp(-i\theta_i^L \tau_i/2) \in SU(2)_L$ et $\tilde{U}_R = \exp(-i\theta_3^R \tau_3/2) \in U(1)_{[3]} \subset SU(2)_R$ sont des fonctions réelles de l'espace-temps; et où $\mathcal{B}^\mu = B^\mu \tau_3/2$. Avec ces notations et définissant $\mathcal{G}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{B}^\nu - \partial^\nu \mathcal{B}^\mu$, le lagrangien du secteur vectoriel du Modèle Standard s'écrit

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2} Tr(\mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} Tr(\mathcal{G}^{\mu\nu} \mathcal{G}_{\mu\nu}).$$

⁸On note l'identification de ces fonctions aux paramètres de jauge intervenant dans (2.11) et (2.12) : $\theta_i^L = \theta_i$ et $\theta_3^R = \Lambda$.

2.2.3 Le secteur fermionique du Modèle Standard

Le terme cinétique des fermions est défini univoquement dans tous les modèles. Le terme d'interaction fermions-scalaires du lagrangien du modèle sigma linéaire, invariant sous les transformations du groupe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, nous est donné par

$$\mathcal{L}_Y = -g_y \bar{\Psi}_L \Sigma \Psi_R + \text{h.c.}$$

où l'abréviation "h.c." désigne l'hermitien conjugué de la première partie du lagrangien. Cependant, si l'on s'en tient aux conclusions de l'analyse du secteur vectoriel du Modèle Standard, on sait ne devoir conserver l'invariance du lagrangien que sous les transformations de $SU(2)_L$ et sous les transformations de $U(1)_{[3]} \subset SU(2)_R$. Or l'élément $\tilde{U}_R = \exp(-i\theta_3^R \tau_3/2)$ du groupe $U(1)_{[3]}$ commute avec le seul générateur $\tau_3/2$. Dès lors, si l'on se remémore les lois de transformation des champs Ψ_L , Ψ_R et Σ (page 17), la forme la plus générale du terme d'interaction fermions-scalaires invariante sous les transformations du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_{[3]}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_Y = -g_y \bar{\Psi}_L \Sigma (1 + \eta \tau_3) \Psi_R + \text{h.c.} = -g_d \bar{\Psi}_L \Phi d_R - g_u \bar{\Psi}_L \tilde{\Phi} d_R + \text{h.c.}, \quad (2.18)$$

avec η un paramètre réel quelconque, $g_d = (1 - \eta g_y)$, $g_u = (1 + \eta g_y)$, et où $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$ et Φ représentent respectivement la première et la deuxième colonne de la matrice Σ . Cette expression correspond au terme de Yukawa du lagrangien du Modèle Standard pour le secteur des quarks. On vérifie en outre que Φ et $\tilde{\Phi}$ se transforment comme des doublets sous $SU(2)_L$, i.e.

$$\begin{aligned} \Phi &\longmapsto U_L \Phi, \\ \tilde{\Phi} &\longmapsto U_L \tilde{\Phi}. \end{aligned}$$

Avant de poursuivre et d'identifier (par isomorphisme) les groupes $U(1)_{[3]}$ et $U(1)_Y$ il convient de rappeler l'existence d'une autre symétrie abélienne $U(1)_B$ (2.8) n'agissant que sur les fermions, et agissant de la même manière sur les fermions droits et les fermions gauches. On peut dès lors identifier les transformations du groupe de symétrie $U(1)_Y$ du Modèle Standard à n'importe quelle combinaison des transformations de $U(1)_B$ et de $U(1)_{[3]}$; il suffit ensuite de rendre ces transformations locales.

2.2.4 Le secteur scalaire du Modèle Standard

On vient de diminuer explicitement la symétrie du secteur vectoriel et du secteur de Yukawa du modèle sigma linéaire : on est passé du groupe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ au groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_{[3]} \sim SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, groupe de symétrie du Modèle Standard. On tâche d'en faire de même pour le secteur purement scalaire du modèle sigma linéaire. Considérons à cet égard le lagrangien (2.5), dont on élimine les fermions :

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{4} \text{tr} \left(\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma \right) + \frac{\mu^2}{4} \text{tr} \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right) - \frac{\lambda}{16} \text{tr}^2 \left(\Sigma^\dagger \Sigma \right). \quad (2.19)$$

On peut comme précédemment reprendre les lois de transformation des champs sous $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, les adapter au groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_{[3]}$, et finalement modifier le lagrangien afin d'obtenir les couplages les plus généraux. Précisément, sous $SU(2)_L \otimes U(1)_{[3]}$, la loi de transformation du champ matriciel Σ devient $\Sigma \mapsto U_L \Sigma \tilde{U}_R^\dagger$ où $U_L \in SU(2)_L$ et $\tilde{U}_R \in U(1)_{[3]}$. A nouveau,

puisque $\tilde{U}_R = \exp(-i\theta_3^R \tau_3/2)$ commute avec le seul générateur $\tau_3/2$, il est permis d'introduire un facteur $(1 + \eta' \tau_3)$ devant les expressions $\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma$ et $\Sigma^\dagger \Sigma$ sans compromettre l'invariance⁹ sous les transformations du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_{[3]}$. Cependant, il est aisé de s'apercevoir que $\text{tr}[(1 + \eta' \tau_3) \partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma] = \text{tr}[\partial_\mu \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma]$ et $\text{tr}[(1 + \eta' \tau_3) \Sigma^\dagger \Sigma] = \text{tr}[\Sigma^\dagger \Sigma]$, $\forall \eta' \in \mathbb{R}$. Autrement dit, on ne peut préserver la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_{[3]}$ du lagrangien (2.19) sans préserver du même coup la symétrie complète $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Ceci signifie que dans le Modèle Standard, après brisure spontanée de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$, le lagrangien du secteur scalaire demeure explicitement invariant sous les transformations d'un groupe de symétrie de type $SU(2)$, qu'on tente d'identifier ci-dessous. Cette symétrie est dite custodiale. Elle ne concerne que le secteur scalaire du Modèle Standard. Elle disparaît lorsqu'on considère des secteurs scalaires plus complexes, ne s'inspirant pas du modèle sigma linéaire.

Reconsidérons le secteur scalaire du lagrangien (2.1), équivalent à (2.19) :

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2. \quad (2.20)$$

Si l'on compte $\boldsymbol{\pi}$ pour les trois premières composantes ϕ et σ pour la quatrième composante ϕ_4 d'un quadruplet (ϕ, ϕ_4) , on retombe sur le lagrangien (1.5). On note alors l'invariance sous les transformations

$$\phi_a \longmapsto O_{ab} \phi_b \quad (a \text{ et } b \text{ variant de } 1 \text{ à } 4)$$

du groupe $O(4)$ des matrices orthogonales, dont l'algèbre de Lie est isomorphe à celle de $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Après brisure spontanée de la symétrie, lorsque le champ $\sigma = \phi_4$ développe une valeur moyenne dans le vide non nulle, il ne reste de cette symétrie que le sous-groupe $O(3)$ des transformations

$$\phi_i \longmapsto O_{ij} \phi_j \quad (i \text{ et } j \text{ variant de } 1 \text{ à } 3)$$

manifestement équivalentes aux transformations (2.2), qui ne concernent pas le champ σ . En d'autres termes, la symétrie custodiale peut être identifiée à la symétrie $O(3)$ ou $SU(2)_V$ (dont les algèbres de Lie sont isomorphes) du lagrangien (2.20), c'est-à-dire le lagrangien du secteur scalaire du modèle sigma linéaire, ou encore le lagrangien du secteur scalaire du Modèle Standard¹⁰. Pour clôturer la discussion, on montre qu'il est possible de réécrire les lagrangiens (2.19) et (2.20) sous une troisième forme, à l'aide du doublet scalaire $\Phi = (i\pi_1 + \pi_2 \sigma - i\pi_3)^T$ introduit ci-dessus lors de l'analyse des interactions fermions-scalaires. On a

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + \frac{\mu^2}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (2.21)$$

L'intérêt de ce lagrangien réside dans le fait qu'il présente une symétrie manifeste identique à celle du Modèle Standard avant brisure spontanée de la symétrie, à savoir $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. On a effectivement l'invariance sous les transformations¹¹

$$\Phi \longmapsto U_L \Phi \quad \text{et} \quad \Phi \longmapsto e^{-i\frac{1}{2}\Lambda} \Phi,$$

⁹L'assertion est valable quel que soit le type de symétrie envisagée : globale ou locale ; dans ce dernier cas, il faut bien entendu substituer des dérivées covariantes aux dérivées usuelles.

¹⁰Remarquons que le nombre de générateurs brisés dans le groupe de symétrie $SU(2) \otimes U(1)$ du Modèle Standard est identique au nombre de générateurs brisés dans le groupe de symétrie $O(4)$ du secteur scalaire. Il n'y a donc pas apparition de pseudobosons de Goldstone (bosons de masse nulle au *tree-level*, acquérant de la masse aux ordres supérieurs en théorie de la perturbation) [22, 23].

¹¹Le facteur 1/2 dans l'exponentielle provient du choix de normalisation de l'hypercharge, i.e. la charge associée au groupe $U(1)_Y$. L'hypercharge attribuée au champ scalaire Φ vaut 1.

avec $U_L \in SU(2)_L$ et $\exp(-i\frac{1}{2}\Lambda) \in U(1)_Y$. La part résiduelle de la symétrie du lagrangien n'est pas manifeste ; il s'agit de la symétrie custodiale¹². Il suffit ensuite de rendre la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ locale en remplaçant les dérivées usuelles par des dérivées covariantes¹³. Le doublet Φ est appelé doublet de Higgs.

2.3 Le secteur de Higgs

On a construit le Modèle Standard à partir du modèle sigma linéaire jaugé, brisé spontanément, et explicitement privé d'une partie de sa symétrie. C'est-à-dire qu'on a fondé le Modèle Standard sur le secteur scalaire du modèle sigma linéaire.

La démarche traditionnelle consiste à construire le Modèle Standard à partir des champs fermioniques et vectoriels (non massifs), et de définir ensuite un système scalaire à même de douer ces particules d'une masse vraisemblable après brisure spontanée de la symétrie. Dans cette optique, on peut considérer le lagrangien (2.21) du modèle sigma linéaire comme lagrangien de base (ou lagrangien minimal) du secteur scalaire du Modèle Standard. Il est effectivement indispensable, ne fût-ce que pour produire la masse des fermions, d'introduire des représentations de $SU(2)_L$ de dimension supérieure ou égale à 2, c'est-à-dire un ou plusieurs multiplets de Higgs. Mais le lagrangien (2.21) est loin d'être le seul à convenir.

On examine dans les paragraphes suivants les extensions possibles du secteur scalaire du Modèle Standard, c'est-à-dire les systèmes à deux doublets, à un multiplet quelconque, et à deux multiplets. Les conclusions de l'analyse de ces systèmes sont valables en toute généralité.

2.3.1 Modèle à deux doublets de Higgs

On considère le lagrangien d'un secteur scalaire impliquant deux doublets de Higgs, Φ_1 et Φ_2 . On a

$$\mathcal{L}_{SV} = \frac{1}{2}(D_\mu \Phi_i)^\dagger (D^\mu \Phi_i) - V, \quad (2.23)$$

où $V = -\mu_{ij}^2 \Phi_i^\dagger \Phi_j + \lambda_{ijkl} \Phi_i^\dagger \Phi_j \Phi_k^\dagger \Phi_l$ avec $\mu_{ij}^2 = \mu_{ji}^{2*}$ et $\lambda_{ijkl} = \lambda_{lkji}^*$. (cette condition garantit l'hermiticité du lagrangien). On ne s'appesantira pas sur l'expression de ce potentiel, dont la forme générale peut être sévèrement contrainte à l'aide de symétries supplémentaires, discrètes ou continues. Supposons toutefois qu'il soit tel que les doublets Φ_1 et Φ_2 développent une valeur moyenne dans le vide non nulle. La brisure spontanée de la symétrie se manifeste à travers le choix d'un vide physique particulier, c'est à dire en redéfinissant les champs autour d'une valeur moyenne dans le vide particulière. En général, on écrit $\Phi_i \rightarrow \Phi_i + \Phi_{i0}$ avec

¹²Notons qu'il est abusif de prétendre que la part non manifeste de la symétrie se ramène identiquement à la symétrie custodiale ($SU(2)_V$ ou $O(3)$) ; en effet, une partie de la symétrie custodiale se trouve prise en considération dans le groupe produit $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, symétrie manifeste du lagrangien (2.21).

¹³En vertu du choix de normalisation de l'hypercharge, en général la dérivée covariante associée au Modèle Standard s'écrit

$$D^\mu = \partial^\mu - ig\mathcal{W}_i^\mu T_i - ig' \frac{Y}{2} B^\mu, \quad (2.22)$$

où T_i sont les représentants des générateurs infinitésimaux de $SU(2)_L$ et $Y/2$ le représentant du générateur infinitésimal de $U(1)_Y$, tandis que W_i^μ et B^μ sont les champs des quatre bosons de jauge du Modèle Standard, dont les lois de transformation sont données respectivement par (2.11) et (2.12). On remarque en outre qu'en isolant la contribution du champ du photon dans la dérivée covariante (2.22) : $-i(g \sin \theta_W T_3 - ig' \cos \theta_W Y/2)A^\mu = -ig \sin \theta_W (T_3 + Y/2)A^\mu$; on peut définir la charge électrique e et l'opérateur Q (générateur infinitésimal du groupe $U(1)_{em}$) : $e = g \sin \theta_W$ et $Q = T_3 + Y/2$. Ces relations caractérisent l'ancrage de l'électromagnétisme ($U(1)_{em}$) dans le Modèle Standard ($SU(2)_L \otimes U(1)_Y$).

$\Phi_{i0} = (a_i \ b_i)^T$ où $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, 2$. En soumettant le doublet Φ_1 à une transformation de $SU(2)_L$, on peut éliminer la première composante a_1 ; une transformation $U(1)_Y$ permet ensuite d'éliminer la partie imaginaire de la deuxième composante b_1 . En d'autres termes, sous une transformation convenable de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, on a $(a_1 \ b_1) \mapsto (0 \ v)$ et $(a_2 \ b_2) \mapsto (a \ b)$ où $v \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Il n'est évidemment plus possible d'agir sur le doublet Φ_2 , afin d'éliminer a et la partie imaginaire de b , sans modifier la forme du premier doublet. Introduisant les doublets redéfinis dans le lagrangien (2.23), on isole le terme de masse des bosons de jauge :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(D_\mu \Phi_{i0})^\dagger (D^\mu \Phi_{i0}) &= \frac{v^2 + |a|^2 + |b|^2}{8} \left[g^2 (W_1^\mu)^2 + g^2 (W_2^\mu)^2 + g^2 (W_3^\mu)^2 + g'^2 (B^\mu)^2 \right] \\ &+ 2gg' \frac{a^*b + b^*a}{8} W_1^\mu B_\mu \\ &+ 2gg' \frac{-ia^*b + ib^*a}{8} W_2^\mu B_\mu \\ &+ 2gg' \frac{-v^2 + |a|^2 - |b|^2}{8} W_3^\mu B_\mu . \end{aligned}$$

La matrice de masse des bosons de jauge s'écrit alors

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M^2 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & M^2 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & M^2 & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & M'^2 \end{pmatrix} ,$$

où

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{4}g^2(v^2 + |a|^2 + |b|^2) \\ M'^2 &= \frac{g'^2}{g^2}M^2 \\ d_1 &= \frac{1}{4}gg'(a^*b + b^*a) \\ d_2 &= \frac{1}{4}gg'i(-a^*b + b^*a) \\ d_3 &= \frac{1}{4}gg'(-v^2 + |a|^2 - |b|^2) . \end{aligned}$$

On peut diagonaliser cette matrice symétrique à l'aide d'une transformation orthogonale. On a le polynôme caractéristique

$$(M^2 - \lambda)^2 \left[\lambda^2 - \lambda \left(1 + g'^2/g^2 \right) M^2 + 1/4 g^2 g'^2 a^2 v^2 \right] = 0 ,$$

qui accepte la solution double $\lambda = M^2$ et deux solutions généralement non triviales. En d'autres termes, les valeurs propres de la matrice \mathcal{M} sont généralement non nulles. Ceci signifie que dans un modèle à deux doublets de Higgs la brisure spontanée de la symétrie génère un terme de masse pour les quatre bosons de jauge, le photon y compris. Le modèle à deux doublets ne rend compte des phénomènes électromagnétiques tels que nous les observons que dans le cas singulier $a = 0$ (ou bien $v = 0$). Autrement dit, à la différence du modèle à un doublet de Higgs, le modèle à deux doublets ne reproduit pas la théorie de l'électromagnétisme, à moins que l'on ne contraigne le potentiel en exigeant la positivité de la matrice de masse des champs scalaires pour la configuration du vide choisie. La conclusion est manifestement valable pour les modèles à n doublets de Higgs, avec $n \geq 2$.

2.3.2 Modèle à un multiplet de Higgs

Tâchons de répartir les champs scalaires dans des représentations de $SU(2)_L$ de dimension supérieure à 2. On peut identifier¹⁴ les représentations irréductibles de $SU(2)$ de dimension $p+1$ aux tenseurs complètement symétriques de rang p définis par loi de transformation $T^{abc\dots} \mapsto U_i^a U_j^b U_k^c T^{ijk\dots}$ où les matrices U sont les matrices 2×2 unitaires de déterminant unité, c'est-à-dire les éléments de $SU(2)$ dans la représentation fondamentale : $U = \exp(-i\theta_i \tau_i/2)$, $\theta_i \in \mathbb{R}$ pour i variant de 1 à 3.

Il s'agit donc d'examiner les multiplets de Higgs $\Phi^{abc\dots}$ à p indices [24]. Le cas $p = 1$ correspond au doublet (on a la loi familière $\Phi^a = U_i^a \Phi^i$) et a déjà été envisagé. Pour le cas $p > 1$, on se contentera de considérer la symétrie de jauge $SU(2)_L$. L'invariance sous les transformations locales du groupe $U(1)_Y$ ne sera requise que dans un deuxième temps. En général, si l'on se remémore la loi (2.11) de transformation $(\mathcal{W}^\mu)_b^a \mapsto U_i^a [(\mathcal{W}^\mu)_j^i + i/g \delta_j^i \partial^\mu] U^{\dagger j}_b$ des bosons de jauge $SU(2)_L$, on montre que si $\Phi^{abc\dots} \mapsto U_i^a U_j^b U_k^c \Phi^{ijk\dots}$, alors $(D^\mu \Phi)^{abc\dots} \mapsto U_i^a U_j^b U_k^c (D^\mu \Phi)^{ijk\dots}$ pour autant que

$$(D^\mu \Phi)^{abc\dots} = \partial^\mu \Phi^{abc\dots} - ig \left((\mathcal{W}^\mu)_i^a \Phi^{ibc\dots} + (\mathcal{W}^\mu)_j^b \Phi^{ajc\dots} + (\mathcal{W}^\mu)_k^c \Phi^{abk\dots} + \dots \right). \quad (2.24)$$

On peut alors construire le lagrangien invariant sous les transformations locales du groupe $SU(2)_L$:

$$\mathcal{L}_{SV} = \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^\dagger_{abc\dots} (D^\mu \Phi)^{abc\dots} + \frac{\mu^2}{2} \Phi^\dagger_{abc\dots} \Phi^{abc\dots} - \frac{\lambda}{4} \left(\Phi^\dagger_{abc\dots} \Phi^{abc\dots} \right)^2. \quad (2.25)$$

Imaginons que le multiplet Φ développe une valeur moyenne dans le vide non nulle Φ_0 telle que seule la composante $\Phi_0^{222\dots} = v$ diffère de 0. Alors on a $(D^\mu \Phi_0)^{222\dots} = -ipg1/2(-W_3^\mu)v$, et les autres composantes de $D^\mu \Phi_0$ ne diffèrent de 0 que lorsqu'un seul de leurs indices vaut 1, i.e. $(D^\mu \Phi_0)^{122\dots} = (D^\mu \Phi_0)^{212\dots} = (D^\mu \Phi_0)^{221\dots} = -ig1/2(W_1^\mu - iW_2^\mu)v$. Après la translation $\Phi \rightarrow \Phi + \Phi_0$, les bosons de jauge acquièrent une masse. Dans le lagrangien, l'apparition de ces masses se manifeste dans le terme

$$\frac{1}{2} (D_\mu \Phi_0)^\dagger_{abc\dots} (D^\mu \Phi_0)^{abc\dots} = \frac{1}{8} p^2 g^2 v^2 (W_3^\mu)^2 + \frac{1}{8} p g^2 v^2 [(W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2].$$

On observe donc qu'avant l'introduction du groupe de symétrie $U(1)_Y$, les masses des trois bosons de jauge W_i^μ ne sont égales que lorsque $p = 1$, c'est-à-dire dans le cas du doublet. Lorsque $p > 1$, ces masses diffèrent par un facteur \sqrt{p} . Si l'on impose l'invariance du lagrangien sous les transformations locales du groupe $U(1)_Y$, alors il faut compléter l'expression de la dérivée covariante, ce qui revient à introduire dans l'expression de $(D^\mu \Phi_0)^{222\dots}$ le terme supplémentaire $-ipg'1/2B^\mu v$, et le terme de masse des bosons de jauge devient

$$\frac{1}{8 \cos^2 \theta_W} p^2 g^2 v^2 (\cos \theta_W W_3^\mu - \sin \theta_W B^\mu)^2 + \frac{1}{8} p g^2 v^2 [(W_1^\mu)^2 + (W_2^\mu)^2],$$

avec $\text{tg} \theta_W = g'/g$ où g' est la constante de couplage associée à $U(1)_Y$. On peut enfin définir les champs des bosons chargés W^\pm et des bosons neutres Z^0 et γ , avec pour les masses

¹⁴ On démontre cette identification en remarquant que si la contraction des objets transformés (les tenseurs) avec le seul tenseur numérique invariant sous $SU(2)$, à savoir le tenseur antisymétrique à deux indices ϵ_{ab} , s'annule, alors il n'existe pas de sous-espace invariant sous la transformation. Il s'ensuit que les objets transformés sont les tenseurs complètement symétriques.

$M_W = gv\sqrt{p}/2$, $M_Z = gvp/(2\cos\theta_W)$ et $M_\gamma = 0$. La relation (2.17) s'en trouve modifiée :

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = \frac{1}{p}. \quad (2.26)$$

Ceci signifie que l'on aboutit bien au résultat escompté, à savoir trois bosons massifs et un photon non massif, mais la relation fondamentale (2.17) est considérablement perturbée et ne correspond pas à la réalité expérimentale. En outre, la configuration du vide choisi ($\Phi_0^{abc\dots} = v$ si $a = b = c = \dots = 2$ et $\Phi_0^{abc\dots} = 0$ sinon) est tout à fait particulière. Il est effectivement impossible, en général, de ramener un tenseur symétrique quelconque à la configuration adoptée à l'aide d'une transformation du groupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Montrons-le explicitement dans le cas $p = 2$.

On peut écrire tout tenseur symétrique de rang deux comme le produit d'un tenseur de trace nulle et du tenseur antisymétrique¹⁵. Or les matrices de Pauli forment une base pour les tenseurs de trace nulle sur le corps des complexes. On a donc, en toute généralité $\Phi_0^{ab} = (\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\tau})_i^a \epsilon^{ib}$, où $\mathbf{z} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ est un vecteur complexe quelconque à trois composantes. Une transformation du groupe $U(1)$ appliquée à la matrice Φ_0^{ab} correspond à la multiplication par une phase $\exp(-i\Lambda) = \cos\Lambda - i\sin\Lambda$ du vecteur \mathbf{z} , c'est-à-dire à la transformation orthogonale $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\cos\Lambda\mathbf{u} + \sin\Lambda\mathbf{v}, -\sin\Lambda\mathbf{u} + \cos\Lambda\mathbf{v})$, laquelle peut être choisie¹⁶ telle que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, i.e. telle que \mathbf{u} et \mathbf{v} deviennent orthogonaux. Il suffit ensuite de remarquer¹⁷ qu'une transformation du groupe $SU(2)$ appliquée à la matrice Φ_0^{ab} se ramène à une transformation du groupe $SO(3)$ appliquée aux vecteurs à trois composantes \mathbf{u} et \mathbf{v} . A l'aide d'une telle transformation, i.e. une rotation appliquée simultanément aux deux vecteurs orthogonaux \mathbf{u} et \mathbf{v} , on aboutit au mieux à la configuration $\mathbf{u} = (a, 0, 0)$ et $\mathbf{v} = (0, b, 0)$ ou encore $\Phi_0 = \text{diag}\{a+b, -a+b\}$ en général différente de celle dont on avait postulé l'existence ci-dessus, à savoir $\Phi = \text{diag}\{0, v\}$.

On peut enfin calculer le terme de masse des bosons de jauge en reprenant l'expression (2.24) de la dérivée covariante limitée à deux indices ($p = 2$) et complétée par le terme $-i2g'\frac{1}{2}B^\mu\Phi^{ab}$ provenant de l'invariance sous les transformations locales de $U(1)_Y$. On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(D_\mu\Phi_0)^\dagger_{ab}(D^\mu\Phi_0)^{ab} \\ & = g^2b^2(W_1^\mu)^2 + g^2a^2(W_2^\mu)^2 + g^2(a^2 + b^2)(W_3^\mu)^2 + g'^2(a^2 + b^2)(B^\mu)^2 + 4gg'abW_3^\mu B_\mu. \end{aligned}$$

La matrice de masse des bosons de jauge s'écrit alors

$$\mathcal{M} = 2 \begin{pmatrix} g^2b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2(a^2 + b^2) & 2gg'ab \\ 0 & 0 & 2gg'ab & g'^2(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

¹⁵Le tenseur T de rang 2 est symétrique si et seulement si $\text{tr}(T\epsilon) = T^{ab}\epsilon_{ab} = 0$, i.e. si et seulement si le tenseur $S = T\epsilon$ est de trace nulle. Inversement, le tenseur S de rang 2 est de trace nulle si et seulement si le tenseur $S = -S\epsilon\epsilon$ est de trace nulle, i.e. si et seulement si le tenseur $T = -S\epsilon$ est symétrique (on écrit ϵ pour ϵ_{ab} et $\epsilon^{-1} = -\epsilon$ pour ϵ^{ab}).

¹⁶La condition $\text{tg}2\Lambda = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/(\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2)$ est nécessaire et suffisante.

¹⁷Sous une transformation de $SU(2)$, on a $\Phi_0^{ab} \mapsto U_i^a U_j^b \Phi_0^{ij} = U_i^a U_j^b (\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\tau})^i_k \epsilon^{kj} = U_i^a (\mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\tau})^i_k U^{\dagger k}_j \epsilon^{jb}$, ou encore, en termes des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} : $(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mapsto U(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})U^\dagger$ et $(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \mapsto U(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})U^\dagger$, ce qui entraîne que les normes $\mathbf{u}^2 = -\det(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})$ et $\mathbf{v}^2 = -\det(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})$ sont invariantes. Et l'on peut manifestement assimiler les transformations de $SU(2)$ à des rotations appliquées aux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} . On obtient en outre la matrice de rotation R_{st} définie par la loi de transformation d'un vecteur \mathbf{u} quelconque : $u_s = 1/2 \text{tr}[\tau_s(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})] \mapsto 1/2 \text{tr}[\tau_s U(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})U^\dagger] = 1/2 \text{tr}[\tau_s U \tau_t U^\dagger] u_t = R_{st} u_t$.

et son déterminant $\det \mathcal{M} \sim g^6 g'^2 a^2 b^2 (a^2 - b^2)^2$ ne s'annule que dans les cas particuliers $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = \pm b$ (ou encore lorsque $g' = 0$, c'est-à-dire lorsque le boson de jauge $U(1)_Y$ n'est pas couplé au système de Higgs, et demeure non massif même après brisure spontanée de la symétrie). Autrement dit, en général, les valeurs propres de la matrice de masse \mathcal{M} sont toutes non nulles et les bosons de jauge tous massifs, le photon y compris.

Le tenseur Φ^{ab} ($p = 2$) correspond à un triplet de Higgs ($p + 1 = 3$), mais les conclusions obtenues peuvent être généralisées au cas $p > 2$: si l'on construit le secteur scalaire du Modèle Standard à partir d'une représentation irréductible de $SU(2)_L$ de dimension supérieure à 2, alors l'absence d'un terme de masse pour le photon, après brisure spontanée de la symétrie, n'est pas assurée. En d'autres mots, seul un doublet de Higgs, lorsqu'il développe une valeur moyenne dans le vide non nulle, permet d'obtenir *automatiquement* le spectre de masse des bosons de jauge tel qu'il est observé. L'usage d'un multiplet de dimension $p + 1 > 2$ ne garantit le caractère non massif du photon que lorsque la configuration du vide entraînant la brisure spontanée de la symétrie est drastiquement contrainte *à la main*. Ou encore, l'électromagnétisme tel que nous le connaissons n'est fidèlement et naturellement reproduit qu'à travers l'usage, dans le secteur scalaire du Modèle Standard, d'un doublet de Higgs.

2.3.3 Modèle à deux multiplets de Higgs

Il est également permis de combiner les deux extensions examinées (c'est-à-dire construire le lagrangien du secteur scalaire à partir de plusieurs multiplets de dimension quelconque), et d'arranger les valeurs moyennes dans le vide des différents multiplets de telle sorte que le photon ne se trouve pas doué d'une masse et que la relation (2.17) demeure approximativement valable. Mais les limites expérimentales sur la valeur de ρ sont tellement contraignantes que les rapports de valeurs moyennes dans le vide permis seraient inexplicablement petits. A titre d'exemple, considérons un secteur scalaire construit à partir d'un doublet ($p = 1$) et d'un triplet ($p = 2$) de Higgs, auquel on attribuerait respectivement les valeurs moyennes dans le vide v_D et v_T . Si l'on reprend l'expression des masses des bosons de jauge (page 26) en sommant les contributions dues aux deux multiplets, on a $M_W^2 = g^2(v_D^2 + 2v_T^2)/4$ et $M_Z^2 = g^2(v_D^2 + 4v_T^2)/(4 \cos^2 \theta_W)$, et le paramètre ρ , au *tree-level*, s'écrit [25]

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = \frac{v_D^2 + 2v_T^2}{v_D^2 + 4v_T^2} \simeq 1 - 2 \frac{v_T^2}{v_D^2}.$$

L'erreur sur la valeur expérimentale¹⁸ de ρ , qui est de l'ordre de un pour mille, peut fournir une estimation de la valeur maximale du rapport v_T/v_D , qui doit dès lors être de l'ordre de un pour cent.

¹⁸On a précisé page 20 que la relation $\rho = 1$ (que l'on qualifera plus loin de *relation naturelle*) est affectée par des corrections radiatives (finies). Le terme dominant de ces corrections est dû à la brisure explicite de $SU(2)_R$ dans le secteur des fermions ($g_u \neq g_d \Rightarrow m_u \neq m_d$). Dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs on peut calculer l'expression du paramètre ρ corrigé par ce terme dominant [26, 27, 28] :

$$\rho = 1 + \frac{g^2}{64\pi^2 M_W^2} \left[m_t^2 + m_b^2 - \frac{2m_t^2 m_b^2}{m_t^2 - m_b^2} \ln \left(\frac{m_t^2}{m_b^2} \right) \right] \simeq 1 + \frac{g^2}{64\pi^2} \frac{m_t^2}{M_W^2}, \quad (2.27)$$

où l'on a ignoré les deux premières générations de quarks et les éléments de la matrice de Kobayashi-Maskawa (introduite au chapitre suivant). Ces corrections sont petites (de l'ordre de un pour cent). Les contraintes expérimentales sur la valeur de ρ sont généralement formulées en termes du paramètre $\rho_0 \equiv M_W^2/(\rho M_Z^2 \cos^2 \theta_W)$ qui cette fois n'implique plus que des quantités renormalisées [29, 30, 31]. Dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs, on a $\rho_0 = 1$. Expérimentalement, on a $\rho_0 = 1,0012_{-0,0014}^{+0,0023}$ [32]. Cet accord remarquable laisse donc peu de place aux multiplets de Higgs de dimension supérieure à deux.

Conclusion

On a montré qu'en partant du modèle sigma linéaire, c'est-à-dire du lagrangien (2.5), invariant sous les transformations du groupe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_B$; en brisant ensuite explicitement une partie de $SU(2)_R$, n'en conservant que son sous-groupe $U(1)_{[3]}$ (i.e. en ne conservant de $SU(2)_R$ que les rotations autour du troisième axe); en jaugeant enfin la symétrie résiduelle $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, où $U(1)_Y$ est une combinaison de $U(1)_B$ et de $U(1)_{[3]}$; alors on aboutit explicitement au lagrangien du Modèle Standard¹⁹ que l'on brise spontanément de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ à $U(1)_{em}$. On parle d'un modèle à un doublet de Higgs.

On a étudié les extensions possibles du secteur scalaire du Modèle Standard. On a montré que le recours à deux doublets de Higgs entraîne généralement l'apparition d'un terme de masse pour le photon; l'apparition de ce terme peut être évitée si l'on assortit le mécanisme de Higgs d'une condition réduisant la taille de l'ensemble des vides possibles. Il en va de même pour l'utilisation d'un multiplet de Higgs de dimension supérieure à 2 : la brisure spontanée de la symétrie fournit en général une masse au photon. Il convient à nouveau, si l'on souhaite conserver un photon non massif, de restreindre le choix du vide à une classe particulière²⁰. En outre, l'introduction dans le secteur scalaire d'un multiplet de dimension $p+1 > 2$ modifie d'un facteur p , à l'ordre le plus bas, l'expression pourtant vérifiée reliant la masse du W à la masse du Z , comme le montre l'équation (2.26). Ces deux extensions ne paraissent pas satisfaisantes. Seul le Modèle Standard à un doublet de Higgs reproduit fidèlement et naturellement la théorie de l'électrodynamique quantique [14].

¹⁹On remarque que le modèle est incomplet dans la mesure où l'on n'y a pas introduit les leptons. On y reviendra plus tard (chapitre 6, section 6.3). La question des différentes générations de fermions sera traitée au chapitre 3. Pour ce qui est de la chromodynamique quantique, il suffit de compléter le groupe de jauge du modèle avec le facteur fort $SU(3)_c$.

²⁰Ce choix demeure naturel dans la mesure où il est rendu possible pour un domaine continu des paramètres du potentiel scalaire.

Chapitre 3

Relations naturelles

Les fermions du Modèle Standard sont classés en trois groupes. Ces groupes sont appelés *générations* ou *familles*¹. Dans chacune de ces générations, il y a deux quarks (à multiplier par le nombre de couleurs) et deux leptons. On s'intéresse au cas des leptons au dernier chapitre, section 6.3. Pour les quarks, on a les trois générations :

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

où les quarks dits de type *up* (u , c et t) possèdent une charge électrique de $+2/3$ et les quarks dits de type *down* (d , s et b) une charge électrique de $-1/3$. Les symétries du Modèle Standard, pour la plupart décrites au chapitre précédent, sont des symétries dites *verticales*², parce qu'elles agissent sur des multiplets qui appartiennent à une génération donnée. En d'autres termes, elles agissent à l'intérieur d'une génération donnée, et elles agissent de la même manière à l'intérieur de chacune des générations. Ces symétries contraignent l'expression des couplages du lagrangien. Les contraintes sont parfois représentées sous la forme d'une relation entre différents paramètres du modèle. Ces relations sont dites *naturelles* parce qu'elles proviennent *naturellement*, à l'ordre le plus bas (*tree-level*), de la présence d'une symétrie [33, 34, 35]. La symétrie responsable de l'existence au *tree-level* d'une relation naturelle garantit sa survie à tous les ordres en théories de la perturbation. C'est-à-dire que la relation peut être radiativement corrigée, mais ces corrections sont finies, et généralement petites. La relation $\rho = 1$, définie par l'expression (2.17), est une relation naturelle. Le groupe de symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, brisé spontanément en $U(1)_{em}$, est à l'origine de son existence, et la protège contre les corrections radiatives divergentes à tous les ordres en théorie de la perturbation.

On définit les symétries *horizontales* comme les symétries agissant non plus à l'intérieur d'une génération donnée, mais sur les générations. Si l'on considère le Modèle Standard à trois générations, les multiplets de fermions associés à une éventuelle symétrie horizontale compteront un, deux ou trois éléments. A l'exception du secteur de Yukawa (et du secteur scalaire), le lagrangien du Modèle Standard est *a priori* invariant sous les transformations de tous les groupes de symétrie horizontaux imaginables. En effet, avant l'introduction du secteur de Yukawa, il est toujours possible de définir les champs de matière de telle sorte que les générations "ne se parlent pas", c'est-à-dire de telle sorte qu'elles soient complètement

¹Jusqu'ici, seule la première famille de fermions a été prise en considération.

²Le terme *vertical* provient de l'habitude prise de représenter les différentes générations comme des colonnes de particules.

découplées. Quant au secteur de Yukawa, il introduit généralement et “inexorablement” les mélanges entre les générations. Dès lors, si l’on impose l’invariance du lagrangien du secteur de Yukawa sous les transformations d’un groupe de symétrie horizontale [36, 37, 38, 39, 40], on aboutit à l’expression d’une série de contraintes. Après brisure spontanée de la symétrie, les matrices de masse héritent de ces contraintes. Celles-ci s’écrivent sous la forme de relations entre les rapports de masse des fermions et les angles de mélange. A nouveau, ces relations sont dites naturelles.

Ce chapitre est consacré à l’étude des relations naturelles dans le secteur de Yukawa du Modèle Standard et de ses extensions, et plus particulièrement, des relations naturelles entre les angles de mélange et les rapports de masse des fermions. Dans un premier temps, on introduit le secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard. On présente ensuite les symétries horizontales en toute généralité et on illustre leur utilisation dans un modèle particulier. Enfin, on énonce et démontre un théorème de blocage qui précise les conditions de succès de l’utilisation des symétries horizontales [41, 42, 43, 40].

3.1 Le secteur de Yukawa

On décrit le secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard à un doublet de Higgs et à plusieurs doublets de Higgs. On s’attarde ensuite sur le modèle à deux générations de quarks, dont on présente explicitement les paramètres. On généralise enfin l’étude au modèle à trois générations de quarks.

3.1.1 Considérations générales

On souhaite décrire le secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard en général. On sait que le modèle à un doublet de Higgs reproduit naturellement la théorie de l’électrodynamique quantique. On montre en outre qu’il entraîne naturellement la conservation de la saveur dans les courants neutres. Dans les modèles à plusieurs doublets de Higgs, la conservation de la saveur dans les courants neutres doit être imposée à l’aide d’une symétrie supplémentaire.

Modèle à un doublet de Higgs

On considère le lagrangien de Yukawa du secteur des quarks du Modèle Standard donné par l’expression (2.18). On le généralise à n familles de fermions. Au signe près, on a

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\Psi}_L \Gamma_d d_R \Phi + \bar{\Psi}_L \Gamma_u u_R \tilde{\Phi} + \text{h.c.}, \quad (3.1)$$

où les couplages de Yukawa Γ_d et Γ_u sont des matrices $n \times n$ arbitraires dans l’espace des saveurs³. On rappelle⁴ que Ψ_L , Φ et $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$ se transforment comme des doublets sous $SU(2)_L$. En outre, Ψ_L , u_R et d_R sont des vecteurs colonne à trois composantes dans l’espace

³L’espace des saveurs est l’espace dans lequel vivent les différentes générations de fermions.

⁴On utilise les notations suivantes :

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix},$$

où ϕ^+ est un champ scalaire complexe chargé et ϕ^0 un champ scalaire complexe neutre.

des saveurs. On réécrit le lagrangien (3.1) en termes des composantes de ces doublets :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \bar{u}_L \Gamma_d d_R \phi^+ + \bar{d}_L \Gamma_d d_R \phi^0 + \bar{d}_R \Gamma_d^\dagger u_L \phi^- + \bar{d}_R \Gamma_d^\dagger d_L \phi^{0*} \\ & + \bar{u}_L \Gamma_u u_R \phi^{0*} - \bar{d}_L \Gamma_u u_R \phi^- + \bar{u}_R \Gamma_d^\dagger u_L \phi^0 - \bar{u}_R \Gamma_u^\dagger d_L \phi^+ . \end{aligned}$$

Le potentiel du lagrangien (2.21) du secteur scalaire du Modèle Standard est tel qu'il provoque la brisure spontanée de la symétrie. Le champ ϕ^0 développe une valeur moyenne dans le vide $\langle \phi^0 \rangle_0 = v$ non nulle. La translation $\phi^0 \rightarrow \phi^0 + v$ génère un terme de masse pour les fermions :

$$\mathcal{L}_M = \bar{d}_L M_d d_R + \bar{u}_L M_u u_R + \bar{d}_R M_d^\dagger d_L + \bar{u}_R M_u^\dagger u_L ,$$

où $M_{u,d} = v\Gamma_{u,d}$ sont les matrices de masse des quarks⁵. Ces matrices sont arbitraires. On peut toutefois les bidiagonaliser⁶ : $U_L^\dagger M_u U_R = D_u$ et $V_L^\dagger M_d V_R = D_d$, où U_L , U_R , V_L et V_R sont des matrices unitaires et $D_{u,d}$ sont les matrices diagonales associées à la partie hermitienne des matrices $M_{u,d}$. On a jusqu'ici travaillé dans la *base faible*. Il s'agit de la base dans laquelle le lagrangien est manifestement invariant sous les transformations du groupe de la symétrie électrofaible. Afin de faire apparaître les termes de masse sous leur forme diagonale, il est nécessaire de procéder à un changement de base : on redéfinit les champs fermioniques de telle sorte que $u_{L,R} \mapsto U_{L,R} u_{L,R}$ et $d_{L,R} \mapsto V_{L,R} d_{L,R}$. On parle de *base physique*. Après cette transformation, on a pour $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_M$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{u}_L K D_d d_R \phi^+ + \bar{d}_L D_d d_R \phi^0 + \bar{d}_R D_d K^\dagger u_L \phi^- + \bar{d}_R D_d d_L \phi^{0*} \\ & + \bar{u}_L D_u u_R \phi^{0*} - \bar{d}_L K^\dagger D_u u_R \phi^- + \bar{u}_R D_d u_L \phi^0 - \bar{u}_R D_u K d_L \phi^+ \\ & + \bar{d}_L D_d d_R + \bar{u}_L D_u u_R + \bar{d}_R D_d^\dagger d_L + \bar{u}_R D_u^\dagger u_L , \end{aligned} \quad (3.2)$$

où la matrice unitaire $K = U_L^\dagger V_L$ est la matrice de mélange. Elle est responsable de la violation de la saveur dans les courants chargés. On remarque en effet dans l'expression de $\mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_M$ que les couplages des termes où interviennent les champs scalaires chargés ϕ^\pm ne sont pas diagonaux dans l'espace des saveurs. La matrice de mélange K intervient également dans l'expression du couplage des bosons de jauge W^\pm aux quarks u_L et d_L : après redéfinition des champs de quarks, le terme d'interaction $\bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+$ devient $\bar{u}_L K \gamma^\mu d_L W_\mu^+$. On note par contre l'absence de termes non diagonaux dans les couplages au champ scalaire neutre ϕ^0 . On la doit à la relation $M_{u,d} = v\Gamma_{u,d}$ qui garantit que $M_{u,d}$ et $\Gamma_{u,d}$ sont simultanément diagonalisables. On parle de la conservation naturelle de la saveur dans les courants neutres.

Les quantités physiques (c'est-à-dire les quantités "mesurables") du secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard sont réunies dans les trois matrices D_u , D_d et K . Il s'agit, respectivement, des masses des quarks de type *up*, des masses des quarks de type *down*, et des paramètres de mélange. Ces quantités sont celles qui apparaissent dans le lagrangien lorsqu'il est exprimé dans la base physique.

⁵Cette identité correspond à la relation (2.10) de Goldberger-Treiman pour le Modèle Standard.

⁶On utilise la décomposition polaire : soit M une matrice quelconque, alors il existe H hermitienne et W unitaire telles que $M = HW$. Cette décomposition est toujours possible : MM^\dagger est hermitienne et définie positive ; elle est donc diagonalisable : $U^\dagger(MM^\dagger)U = D^2$. On définit $H \equiv UDU^\dagger$ hermitienne où D est une racine carrée de D^2 . On définit $W \equiv H^{-1}M$ et on montre qu'elle est unitaire : $WW^\dagger = H^{-1}MM^\dagger H^{-1} = H^{-1}UD^2U^\dagger H^{-1} = H^{-1}UDU^\dagger UDU^\dagger H^{-1} = H^{-1}HHH^{-1} = \mathbb{1}$. H peut être diagonalisée : $U^\dagger H U = D$. Et M est bidiagonalisée : $U^\dagger H W W^\dagger U = U_L^\dagger M U_R = D$, où $U_L \equiv U$ et $U_R \equiv W^\dagger U$ sont deux matrices unitaires. On dit que H est la partie hermitienne de M .

Modèle à plusieurs doublets de Higgs

Si l'on introduit plusieurs doublets de Higgs Φ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ dans le contenu en particules, alors le lagrangien de Yukawa du secteur des quarks du Modèle Standard à n générations de fermions s'écrit :

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\Psi}_L \Phi_i \Gamma_d^i d_R + \bar{\Psi}_L \tilde{\Phi}_i \Gamma_u^i u_R + \text{h.c.}, \quad (3.3)$$

avec $\Phi_i^T = (\phi_i^+ \phi_i^0)$ et où $\Gamma_{u,d}^i$ (i variant de 1 à N) sont des matrices arbitraires. A nouveau, si le potentiel scalaire est tel qu'il provoque la brisure spontanée de la symétrie et si l'on suppose que chacune des composantes ϕ_i^0 développe une valeur moyenne dans le vide $\langle \phi_i^0 \rangle_0 = v_i$ non nulle et réelle, les translations $\phi_i^0 \rightarrow \phi_i^0 + v_i$ génèrent un terme de masse pour les fermions. Le lagrangien \mathcal{L}_M est identique, mais les matrices de masse sont cette fois définies par la relation $M_{u,d} = v_i \Gamma_{u,d}^i$. Dès lors, en général, les matrices $M_{u,d}$ et $\Gamma_{u,d}^i$ ne sont pas simultanément diagonalisables. Et la diagonalisation des matrices de masse n'entraîne plus la diagonalisation des couplages aux champs scalaires neutres ϕ_i^0 . On parle de violation de la loi de la conservation de la saveur dans les courants neutres, ou encore de non conservation de la saveur dans les courants neutres (*Flavour Changing Neutral Currents*).

La conservation de la saveur généralement observée dans les courants neutres plaide en faveur de l'introduction d'une symétrie supplémentaire qui rétablirait le caractère simultanément diagonalisable des matrices de masse et des couplages aux champs scalaires neutres. On peut par exemple, dans le cas du Modèle Standard à deux doublets de Higgs, interdire à l'aide d'une symétrie discrète le couplage du premier doublet au champ d_R et le couplage du second au champ u_R . On aurait $M_u = v_1 \Gamma_u^1$ et $M_d = v_2 \Gamma_d^2$. Naturellement, M_u et Γ_u^1 sont alors simultanément diagonalisables, ainsi que M_d et Γ_d^2 .

Dans le modèle à plusieurs doublets de Higgs, la matrice de mélange reste définie par la relation $K = U_L^\dagger V_L$ où, comme dans le modèle à un doublet, U_L et V_L sont les matrices unitaires qui diagonalisent les parties hermitiennes de M_u et M_d , respectivement. Et de même que dans le modèle à un doublet, la matrice K apparaît dans le terme d'interaction entre les bosons de jauge W^\pm et les quarks u_L et d_L : $\bar{u}_L K \gamma^\mu d_L W_\mu^+$.

3.1.2 Modèle à deux générations

On a montré que les quantités physiques du secteur de Yukawa sont les masses des quarks et les paramètres de mélange. Dans le modèle à deux générations de quarks, on a $D_u = \text{diag}\{m_u, m_c\}$ et $D_d = \text{diag}\{m_d, m_s\}$. Pour ce qui est du mélange, on sait qu'une matrice $n \times n$ unitaire arbitraire peut être paramétrée à l'aide de $n(n-1)/2$ angles et $n(n+1)/2$ phases indépendants. Dès lors, la matrice K , 2×2 et unitaire, compte 1 angle et 3 phases indépendants. On l'écrit [44] :

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{i\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & \\ & e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

Or, si l'on ne tient pas compte de la chiralité, on constate que la matrice de mélange K n'intervient dans le lagrangien du Modèle Standard que "coincée" entre les champs de quark de type *up* et les champs de quark de type *down*. En outre, les termes du lagrangien où la matrice de mélange K n'intervient pas sont insensibles aux modifications de la phase relative des champs de quarks. On peut dès lors définir la phase relative de ces champs de telle sorte que la matrice de mélange K soit réelle et symétrique, c'est-à-dire que l'on peut absorber dans

les champs des quarks d , s et c les phases $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ et $e^{-i\rho}$, respectivement. On a :

$$K = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix},$$

où θ_C est appelé angle de Cabibbo [45]. Les quantités physiques du secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard à deux générations de quarks sont donc m_u , m_c , m_d , m_s et θ_C .

Expérimentalement, la valeur de l'angle de Cabibbo peut être obtenue à partir de la désintégration faible des quarks d , s et c (c'est à dire la désintégration faible des états liés dont le quark le plus lourd est l'un de ces trois quarks). On a $\sin \theta_C \simeq \theta_C \simeq 0,22$ (rad), c'est-à-dire $\theta_C \simeq 13^\circ$ [32]. La question de la masse des quarks est abordée dans la sous-section suivante.

3.1.3 Modèle à trois générations

Dans le modèle à trois générations de quarks, on a $D_u = \text{diag}\{m_u, m_c, m_t\}$ et $D_d = \text{diag}\{m_d, m_s, m_b\}$. Pour la matrice de mélange K , il suffit à nouveau de considérer une matrice 3×3 unitaire quelconque, laquelle compte $3(3-1)/2 = 3$ angles et $3(3+1)/2 = 6$ phases indépendants. On écrit [44] :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\rho} & \\ & & e^{i\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 c_3 & & c_2 s_3 & s_2 e^{-i\delta} \\ -c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta} & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta} & s_1 c_2 & \\ s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta} & -s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & & \\ & e^{i\beta} & \\ & & e^{i\gamma} \end{pmatrix},$$

où $s_i \equiv \sin \theta_i$ et $c_i \equiv \cos \theta_i$ pour i variant de 1 à 3. A nouveau, on peut absorber les phases $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{-i\rho}$ et $e^{-i\sigma}$, dans les champs des quarks, et obtenir l'expression matrice de mélange, dite matrice de Kobayashi-Maskawa⁷ [46] :

$$K = \begin{pmatrix} c_2 c_3 & & c_2 s_3 & s_2 e^{-i\delta} \\ -c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta} & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta} & s_1 c_2 & \\ s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta} & -s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 & \end{pmatrix}.$$

Les paramètres θ_1 , θ_2 , θ_3 et δ décrivent le mélange possible entre les quarks des trois générations. S'ils sont tous nuls, il n'y a pas de mélange. Si, par exemple, les trois derniers d'entre eux sont nuls et le premier non nul, il n'y a de mélange qu'entre la deuxième et la troisième génération. On note en outre que cette matrice n'est ni réelle ni symétrique. La phase $e^{i\delta}$ demeure présente. Contrairement à ce qu'il advient des éléments imaginaires dans le modèle à deux générations de fermions, aucune transformation des champs de quark ne permet de s'en débarrasser. En tant que seul élément complexe de la matrice de Kobayashi-Maskawa, cette phase est responsable de la violation de la symétrie⁸ CP dans les interactions faibles [47]. Les

⁷On retrouve la paramétrisation standard de la matrice de Kobayashi-Maskawa, dont on a choisi de s'écarter par souci de commodité, en procédant aux substitutions suivantes : $\theta_{12} \equiv \theta_3$, $\theta_{23} \equiv \theta_1$ et $\theta_{13} \equiv \theta_2$. La matrice de mélange s'exprime alors [32]

$$K = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} & \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} & \end{pmatrix}.$$

⁸La symétrie CP est définie par la combinaison de la symétrie C (conjugaison de charge) et P (parité). En vertu du théorème CPT qui assure l'invariance du lagrangien du Modèle Standard sous la combinaison des transformations associées aux symétries C , P et T (renversement du temps), la violation de CP implique la violation de T , c'est-à-dire la violation de l'invariance sous renversement du temps.

quantités physiques du secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard à trois générations de quarks sont donc $m_u, m_c, m_t, m_d, m_s, m_b, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ et δ .

La détermination expérimentale de ces quantités constitue aujourd'hui l'une des grandes sources d'activité de la communauté des physiciens des particules. Les quarks étant confinés⁹ à l'intérieur des hadrons et n'étant dès lors pas observables en tant que particules physiques (c'est à dire que seuls les hadrons, états liés de quarks et/ou d'anti-quarks, sont considérés comme particules physiques et observables), leur masse ne peut être mesurée directement. Il s'agit donc d'examiner les propriétés physiques des hadrons, et d'en extraire une estimation de la masse des quarks qui les constituent. La masse des quarks lourds ($m_q > 1$ GeV, échelle d'énergie en dessous de laquelle la constante de couplage des interactions fortes devient trop grande pour permettre l'utilisation d'un développement perturbatif) peut être obtenue en comparant le spectre de masse des mésons (états liés constitués d'un quark et d'un anti-quark) tel qu'il est mesuré et le même spectre calculé en théorie de la perturbation. Les rapports de masse des quarks légers ($m_q < 1$ GeV) sont déterminés à l'aide des techniques développées en théorie chirale, où la masse des quarks, qui brise explicitement la symétrie chirale, est considérée comme une petite perturbation. Les règles de somme de la chromodynamique quantique permettent enfin d'estimer l'échelle globale des quarks légers. A la masse¹⁰ du Z (i.e. à l'échelle d'énergie¹¹ $\mu = M_Z \simeq 91$ GeV), on s'en rapportera aux valeurs suivantes [48] :

$$\begin{aligned} m_u &= 2,33_{-0,45}^{+0,42} \text{ MeV}, & m_c &= 677_{-61}^{+56} \text{ MeV}, & m_t &= 181 \pm 13 \text{ GeV}, \\ m_d &= 4,69_{-0,66}^{+0,60} \text{ MeV}, & m_s &= 93,4_{-13,0}^{+11,8} \text{ MeV}, & m_b &= 3,00 \pm 0,11 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Précisons qu'en raison des détours empruntés pour estimer ces valeurs, les barres d'erreur qui leur correspondent sont importantes, en particulier pour les quarks légers. On note que ce spectre de masse est caractérisé par une hiérarchie intergénérationnelle profondément marquée : $m_u \ll m_c \ll m_t$ et $m_d \ll m_s \ll m_b$. C'est à la recherche de l'origine de cette symétrie que s'emploient aujourd'hui bon nombre de théoriciens des particules. On remarque en outre que $m_u < m_d$, contrairement à ce que l'on observe pour les deux autres générations. Cette relation d'ordre entraîne une seconde, entre la masse m_P du proton (uud) et la masse m_N du neutron (ddu) : $m_P < m_N$; laquelle est à l'origine de la stabilité du proton, c'est-à-dire des conditions d'existence de la matière atomique et moléculaire ! A nouveau, l'origine théorique de cette relation d'ordre demeure à ce jour inconnue.

Quant aux éléments de la matrice de Kobayashi-Maskawa, ils sont déterminés à partir de l'analyse de la désintégration faible des hadrons, et de l'étude des systèmes oscillants $K^0 - \bar{K}^0$, $B^0 - \bar{B}^0$. L'intervention des interactions fortes (hadronisation et corrections radiatives) dans

⁹Le confinement est une caractéristique propre aux particules sensibles aux interactions fortes, lesquelles sont décrites par la chromodynamique quantique, c'est-à-dire par le facteur non abélien $SU(3)_c$ dans le groupe de symétrie du Modèle Standard. On peut montrer que la constante de couplage du groupe $SU(3)_c$ est grande à basse énergie (i.e. à grande distance), et petite à haute énergie (i.e. à courte distance). On parle de liberté asymptotique. Cette propriété de la chromodynamique quantique suggère l'existence d'un phénomène non perturbatif à basse énergie (où la constante de couplage est grande et pourrait "retenir" les quarks à l'intérieur des hadrons), que l'on identifie généralement au confinement.

¹⁰ $M_Z = 91,1876 \pm 0,0021$ GeV [32].

¹¹La valeur d'un paramètre libre dépend de l'échelle d'énergie à laquelle il est considéré. On parle de la course d'un paramètre. Dans le cadre de ce travail, pour pouvoir les comparer, il importe de considérer les masses des différents quarks à la même échelle d'énergie.

ces différents processus limite la précision des évaluations. On a les estimations suivantes [32] :

$$\begin{aligned} s_3 &= 0,2229 \pm 0,0022 (\simeq \sin \theta_C), \\ s_1 &= 0,0412 \pm 0,0020, \\ s_2 &= 0,0036 \pm 0,0007, \\ \delta &= (1,02 \pm 0,22) \text{ radians} = 59^\circ \pm 13^\circ. \end{aligned}$$

3.1.4 Violation forte de CP

En tant que seule contribution imaginaire à la matrice de Kobayashi-Maskawa, la phase $e^{i\delta}$ est apparemment l'unique source de violation de CP dans le secteur électrofaible. Cependant, une analyse approfondie de la structure du vide en chromodynamique quantique indique qu'il existe dans le Modèle Standard une autre source de violation de CP [49]. Elle se manifeste à travers le paramètre θ_S (*strong* θ) qui définit, en chromodynamique quantique, un état du vide invariant de jauge. On peut en outre montrer [50] que le secteur de Yukawa contribue explicitement à la valeur de θ_S , à raison de n_s fois le paramètre α de la transformation axiale $q_R \mapsto e^{\pm i\alpha/2} q_R$ associée aux transformations $u_{L,R} \mapsto U_{L,R} u_{L,R}$ et $d_{L,R} \mapsto V_{L,R} d_{L,R}$ nécessaires à la diagonalisation des matrices de masse, n_s étant le nombre de saveurs impliquées. On a immédiatement que $\alpha = (1/n_s) \arg \det(M_u M_d)$. Dès lors, la contribution du secteur de Yukawa au paramètre θ_S , notée¹² θ_{QFD} , s'écrit $\theta_{QFD} = \arg \det(M_u M_d)$. Si l'on revient à la décomposition polaire (évoquée en bas de la page 31) qui permet d'exprimer une matrice arbitraire M comme le produit d'une matrice hermitienne H et d'une matrice unitaire W :

$$M = HW,$$

on note que les deux paramètres susceptibles de provoquer une violation de CP , c'est-à-dire δ et θ_{QFD} , proviennent de deux secteurs distincts des matrices de masse des quarks. En effet, δ disparaît si H_u et H_d sont réelles (symétriques), tandis que θ_{QFD} disparaît lorsque W_u et W_d sont réelles (orthogonales).

Précisons que l'existence du paramètre θ_S dans le Modèle Standard entraîne pour le neutron l'apparition d'un moment dipolaire électrique important ; or ce moment n'est pas observé ; les contraintes expérimentales sont donc sévères et confinent θ_S aux valeurs inférieures à 10^{-10} [51, 52].

Pour expliquer la petitesse de θ_S , différents mécanismes ont été invoqués. L'un d'entre eux [53, 54] implique l'existence d'une symétrie chirale $U(1)_A$ responsable de l'annulation pure et simple du paramètre θ_S . Or on sait que la symétrie $U(1)_A$ est intrinsèquement brisée par la présence d'instantons [55]. Dès lors, le boson de Goldstone pseudoscalaire, dit *axion* [56, 57], provenant de la brisure spontanée de $U(1)_A$ développe une masse de quelques dizaines de KeV. On parle d'un pseudoboson de Goldstone (voir chapitre précédent, en bas de la page 22). Cette particule n'est pas observée, et le mécanisme est donc exclu, bien qu'en modifiant l'échelle de la brisure spontanée, on puisse éventuellement réduire la masse de l'axion et le rendre pratiquement "invisible" (ces tentatives se heurtent toutefois aux contraintes cosmologiques). Un deuxième mécanisme, développé dans le contexte des théories de grande unification (voir chapitre 4), entraîne également l'annulation de θ_S au *tree-level* [58, 59]. Il s'agit ici de considérer

¹²On a la décomposition $\theta_S = \theta_{QCD} + \theta_{QFD}$; on utilise le sigle QFD (*Quantum Flavor Dynamics*) par analogie avec le sigle QCD (*Quantum ChromoDynamics*). Les deux contributions θ_{QCD} et θ_{QFD} ne sont pas indépendantes ; elles sont reliées entre elles par une transformation de phase.

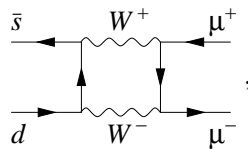
des modèles au sein desquels la symétrie CP , imposée au lagrangien des interactions fortes (i.e. $\theta_{QCD} = 0$ au *tree-level*), est ensuite brisée spontanément. Deux conditions affectant les seuls couplages de Yukawa permettent alors d'assurer l'annulation au *tree-level* de θ_{QFD} , et dès lors de θ_S [59]. Cependant, ces conditions impliquent l'existence de nouveaux fermions. Citons encore un troisième mécanisme, qui s'illustre par son caractère minimal et par le lien qu'il établit entre les violations électrofaible et forte de CP . Il s'agit de considérer le Modèle Standard, augmenté d'un fermion lourd (gauche et droit) de charge $-1/3$ et singulet sous $SU(2)_L$, et d'un scalaire complexe, également singulet sous $SU(2)_L$ [60, 61]. La symétrie CP , imposée à tout le lagrangien ($\theta_S = 0$), est ensuite brisée spontanément, ce qui donne lieu à l'apparition d'une phase $e^{i\delta}$ dans la matrice de Kobayashi-Maskawa. En outre, θ_{QFD} , naturellement nul au *tree-level*, acquiert par corrections radiatives une valeur non nulle et éventuellement compatible avec les données expérimentales. Les paramètres δ et θ_{QFD} proviennent tous deux de la valeur moyenne dans le vide non nulle du singulet scalaire complexe. Notons que bien qu'il soit minimal, ce modèle nécessite l'introduction d'un nouveau fermion.

Il s'agit donc de remarquer que dans le Modèle Standard tel que nous le considérons, c'est-à-dire dans sa version minimale, l'annulation du paramètre θ_S – à tous les ordres en théorie de la perturbation – ne peut provenir que de l'annulation de la masse de l'un des quarks, en l'occurrence le quark up (le plus léger). En effet, l'annulation de l'une des masses des quarks entraîne l'annulation du déterminant du produit $M_u M_d$ et donc du paramètre θ_{QFD} . La liberté de phase qui en résulte implique également l'annulation de θ_S . On évoquera la question de l'annulation de la masse du quark up dans le contexte des relations finies, au chapitre 6.

Terminons en précisant que de nombreuses questions demeurent ouvertes quant à l'existence ou à la nature de ce quatorzième paramètre libre dans le secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard.

3.1.5 Conservation de la saveur dans les courants neutres

On a montré que la conservation de la saveur dans les courants neutres du Modèle Standard à un doublet de Higgs est naturelle. Qu'en est-il de la réalité expérimentale? On peut imposer de sérieuses contraintes sur la violation de la loi de conservation de la saveur dans les courants neutres à partir de l'observation de la désintégration rare des mésons K_L , B_d et B_s . Ces mésons sont respectivement constitués des paires $d\bar{s}$ (et $s\bar{d}$), $d\bar{b}$ (et $b\bar{d}$) et $s\bar{b}$ (et $b\bar{s}$). A l'ordre le plus bas en théorie de la perturbation, seuls les courants neutres permettent la transformation d'un méson neutre en une paire lepton/anti-lepton. Or, si le quark et l'anti-quark du méson neutre appartiennent à deux générations différentes, le courant neutre présidant à sa désintégration viole nécessairement la loi de conservation de la saveur. Dès lors, la forte suppression observée de ce type de désintégration plaide en faveur de l'inexistence de courants neutres violant la loi de conservation de la saveur. Notons que si elles sont fortement supprimées, ces désintégrations n'en sont pas pour autant interdites. En effet, aux ordres plus élevés en théorie de la perturbation, les diagrammes impliquant des courants chargés, tel



contribuent à la largeur de désintégration du méson correspondant. Il est généralement possible d'estimer ces contributions et de comparer les largeurs de désintégrations ainsi calculées aux

largeurs mesurées. A titre d'exemple¹³, pour les transitions de la première à la deuxième génération, de la deuxième à la troisième, et de la première à la troisième génération, on a respectivement les taux de branchement [62, 63, 64] :

Théorie	Expérience
$Br(K_L \longrightarrow \mu^+ \mu^-) = (6, 8 \pm 0, 3) \cdot 10^{-9}$	$Br(K_L \longrightarrow \mu^+ \mu^-) = (7, 2 \pm 0, 5) \cdot 10^{-9}$
$Br(B_s \longrightarrow \mu^+ \mu^-) = (3, 4 \pm 1, 2) \cdot 10^{-9}$	$Br(B_s \longrightarrow \mu^+ \mu^-) < 2, 6 \cdot 10^{-6}$
$Br(B_d \longrightarrow \mu^+ \mu^-) \sim \mathcal{O}(10^{-10})$	$Br(B_d \longrightarrow \mu^+ \mu^-) < 8, 6 \cdot 10^{-7}$

On observe l'accord remarquable entre théorie et expérience pour les transitions de la première à la deuxième génération. Il est dès lors peu probable que ce genre de transition soit suscitée par un courant neutre. Par contre, les limites qu'impose l'expérience sur les largeurs de désintégration des mésons B en une paire muon/anti-muon sont supérieures aux largeurs estimées dans le Modèle Standard (c'est à dire en l'absence de courants neutres violant la loi de conservation de la saveur). On ne peut donc pas rejeter avec certitude l'existence de courants neutres qui susciteraient des transitions entre la troisième génération et les deux autres.

3.2 Symétries horizontales

Par opposition aux symétries verticales, agissant à l'intérieur de la première génération et comptant chaque génération supplémentaire pour une copie de la première, les symétries horizontales agissent sur les différentes générations et les mélangent entre elles. Elles ne concernent que le secteur de Yukawa et le secteur scalaire de la théorie. En effet, le secteur de jauge du Modèle Standard est par construction "vertical" et avant l'introduction du secteur de Yukawa, il peut être étudié séparément pour chaque génération. On montre que lorsqu'elle est imposée au lagrangien du secteur de Yukawa du Modèle Standard, l'invariance sous les transformations d'un groupe de symétrie horizontal entraîne une particularisation de la structure des matrices de masse. Cette particularisation entraîne l'existence d'une (ou de plusieurs) relation(s) naturelle(s) entre les angles de mélange et les rapports de masse des quarks. On illustre les principes généraux par un exemple simple et concluant, le modèle de Wyler [40], dans lequel l'angle de Cabibbo est une fonction naturelle des rapports de masse des quarks.

3.2.1 Généralités

On reprend l'expression (3.3) du lagrangien du secteur de Yukawa du Modèle Standard à N doublets de Higgs Φ_i avant brisure spontanée de la symétrie :

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\Psi}_L \Phi_i \Gamma_d^i d_R + \bar{\Psi}_L \tilde{\Phi}_i \Gamma_u^i u_R + \text{h.c.} \quad (3.4)$$

Outre les symétries de jauge, la symétrie F la plus générale que présente le lagrangien $\mathcal{L}_{MS} - \mathcal{L}_Y$ (i.e. le lagrangien du Modèle Standard privé de son secteur de Yukawa) se manifeste à travers

¹³D'autres désintégrations, telle $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$, peuvent être analysées [32]. Les conclusions sont similaires.

les lois de transformation des champs :

$$\begin{aligned}\Psi_L &\longmapsto F_L \Psi_L, \\ u_R &\longmapsto F_R^u u_R, \\ d_R &\longmapsto F_R^d d_R, \\ \Phi_i &\longmapsto F_{\Phi_i}^j \Phi_j,\end{aligned}$$

où les matrices unitaires F_L , F_R^u et F_R^d agissent dans l'espace des saveurs, tandis que F_{Φ} est une matrice $N \times N$ unitaire. L'invariance de \mathcal{L}_Y sous ces transformations conduit aux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}F_L^\dagger \Gamma_u^i F_R^u F_{\Phi_i}^{*j} &= \Gamma_u^j, \\ F_L^\dagger \Gamma_d^i F_R^d F_{\Phi_i}^j &= \Gamma_d^j.\end{aligned}$$

On constate que l'invariance du lagrangien du secteur de Yukawa sous les transformations d'un groupe F de symétrie particulier, dont F_L , F_R^u , F_R^d et F_{Φ} seraient les matrices de représentation pour les différents champs, conduit à l'existence d'une série de relations propres à contraindre la structure des couplages de Yukawa $\Gamma_{u,d}^i$. Après brisure spontanée de la symétrie, les matrices de masse $M_{u,d} = v_i \Gamma_{u,d}^i$ héritent de ces contraintes. En fonction du choix du groupe F et de la loi de transformation des champs (c'est à dire des représentations irréductibles dans lesquelles les champs sont rangés), ces contraintes influencent l'expression des valeurs propres et des vecteurs propres des matrices de masse et, le cas échéant, se manifestent à travers l'existence de relations entre les angles de mélange et les rapports de masse. Puisqu'elles trouvent leur origine dans la présence d'une symétrie, ces relations sont naturelles.

De nombreux modèles ont été développés. Ils diffèrent par le nombre de doublets de Higgs considérés, le choix du groupe de symétrie, et le choix des représentations irréductibles dans lesquelles sont rangés les doublets de Higgs et les fermions. Le groupe de symétrie horizontal peut en outre être jaugé et brisé spontanément. Dans la sous-section suivante, un modèle particulier est examiné en détail.

3.2.2 Le modèle de Wyler

On considère le Modèle Standard à trois doublets de Higgs et deux générations de fermions. Il est invariant sous les transformations locales du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (brisé spontanément en $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$). On considère en outre le groupe de symétrie horizontal D_3 [40]. Il s'agit du groupe diédral, isomorphe au groupe symétrique S_3 , groupe discret fini. La structure des représentations du groupe est examinée en annexe (page 95). Enfin, on considère le groupe à deux éléments \mathbb{Z}_2 . La structure du contenu en particule du Modèle Standard est connue. Il reste de ranger les champs dans les représentations irréductibles des groupes D_3 et \mathbb{Z}_2 . Sous D_3 , pour les quarks droits et gauches, on a : u_R un singulet de la représentation triviale ; c_R un singulet de la représentation alternée ; $(s_R d_R)^T$ un doublet ; $(\Psi_{L1} \Psi_{L2})^T$ un doublet, où Ψ_{L1} et Ψ_{L2} sont les doublets d'isospin faible de la première et de la deuxième génération, i.e. $\Psi_{L1} = (u_L d_L)^T$ et $\Psi_{L2} = (c_L s_L)^T$. Pour les scalaires, on a : Φ_0 un singulet de la représentation triviale ; $(\Phi_1 \Phi_2)^T$ un doublet, avec Φ_0 , Φ_1 et Φ_2 trois doublets d'isospin faible. Sous \mathbb{Z}_2 , on a : Φ_0 un singulet de la représentation impaire ; et tous les autres champs vivent dans la représentation triviale.

Pour le secteur de Yukawa, à partir de ce contenu en particules, il s'agit maintenant d'écrire le lagrangien général invariant sous les transformations du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes D_3 \otimes \mathbb{Z}_2$. Sous les transformations du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_d^0 \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_0 + (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_d^1 \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_1 + (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_d^2 \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_2 \\ & + (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_u^0 \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 + (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_u^1 \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 + (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_u^2 \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_2 , \end{aligned}$$

où les couplages de Yukawa Γ_{ud}^0 , Γ_{ud}^1 et Γ_{ud}^2 sont des matrices 2×2 . On montre en annexe (pages 91-93) qu'imposer l'invariance sous les transformations du groupe horizontal $D_3 \otimes \mathbb{Z}_2$ revient à considérer les couplages de Yukawa suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_u^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Gamma_u^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -b \end{pmatrix}, & \Gamma_u^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_d^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Gamma_d^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, & \Gamma_d^2 &= \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Le lagrangien du secteur de Yukawa du modèle de Wyler s'exprime alors :

$$\mathcal{L}_Y = a(\bar{\Psi}_{L1} u_R \tilde{\Phi}_2 + \bar{\Psi}_{L2} u_R \tilde{\Phi}_1) + b(\bar{\Psi}_{L1} c_R \tilde{\Phi}_2 - \bar{\Psi}_{L2} c_R \tilde{\Phi}_1) + c(\bar{\Psi}_{L1} d_R \Phi_2 - \bar{\Psi}_{L2} s_R \Phi_1) .$$

Après brisure spontanée de la symétrie, la composante neutre des doublets scalaires Φ_0 , Φ_1 et Φ_2 acquiert une valeur moyenne dans le vide non nulle. On les note v_0 , v_1 et v_2 et on les choisit complexes par souci de généralité. Les matrices de masse

$$M_d = \begin{pmatrix} cv_2 & \\ & cv_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_u = \begin{pmatrix} av_2^* & bv_2^* \\ av_1^* & -bv_1^* \end{pmatrix}$$

sont diagonalisées. A partir des valeurs propres de ces matrices et de la combinaison de leurs vecteurs propres, on obtient alors la relation naturelle [40]

$$\frac{1}{2} \text{tg } 2\theta_C = \frac{m_s m_d}{m_s^2 - m_d^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_u m_c}{m_d m_s} \cdot \frac{m_d^2 + m_s^2}{m_u^2 + m_c^2} \right)^2}, \quad (3.5)$$

qui exprime l'angle de Cabibbo en fonction des rapports de masse des quarks. Si l'on considère la limite $m_u \ll m_c$ et $m_d \ll m_s$, alors on a la relation approximative $\theta_C \simeq m_d/m_s$. La valeur qui découle de cette prédiction, $\theta_C \simeq m_d/m_s \simeq 0,05$, est sensiblement différente de la valeur expérimentale $\theta_C \simeq 0,22$, mais elle n'est toutefois pas exclue dans la mesure où elle sera probablement modifiée par des corrections radiatives finies, et que l'échelle d'énergie à laquelle elle est susceptible d'être valide n'a pas été déterminée.

On a montré que dans le Modèle Standard à deux générations de fermions et trois doublets de Higgs, l'introduction de la symétrie horizontale $D_3 \otimes \mathbb{Z}_2$ permet d'obtenir une relation naturelle entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse des quarks. Le caractère naturel garantit que la contribution divergente des corrections radiatives au membre de gauche de la relation (3.5) est exactement compensée par la contribution divergente des corrections radiatives au membre de droite.

3.3 Théorème de blocage

On a vu que le choix d'un groupe de symétrie horizontal et de la répartition des champs du Modèle Standard dans les représentations irréductibles de ce groupe peut effectivement conduire à l'existence d'une (ou de plusieurs) relation(s) naturelle(s) entre les angles de mélange et les rapports de masse. Cependant, il existe un théorème, dit *théorème de blocage*, qui montre que l'applicabilité d'un tel schéma est limitée aux modèles pour lesquels il n'y a pas conservation naturelle de la saveur dans les courants neutres [41, 42, 43, 40]. On démontre ce théorème dans le cas du Modèle Standard à un doublet de Higgs. On en énonce ensuite une version générale valable pour les modèles à N doublets de Higgs.

3.3.1 Modèle à un doublet de Higgs

On démontre le théorème de blocage qui établit que l'ajout d'une composante horizontale au groupe de symétrie du Modèle Standard à un doublet de Higgs et n générations de fermions donne lieu à des angles de mélanges triviaux ($\in \{0, \pi/2\}$) ou indéterminés [41]. L'existence de ce théorème étaiera l'interprétation des résultats obtenus aux chapitres 5 et 6.

Si l'on reprend les lois de transformation de la page 38 appliquées au Modèle Standard à un doublet de Higgs Φ (il suffit de remplacer la matrice F_Φ par une phase $\exp(i\chi)$ avec $\chi \in \mathbb{R}$), et que l'on impose l'invariance sous ces transformations du lagrangien du secteur de Yukawa correspondant, on a les contraintes

$$F_L^\dagger \Gamma_u F_R^u = e^{i\chi} \Gamma_u, \quad (3.6)$$

$$F_L^\dagger \Gamma_d F_R^d = e^{-i\chi} \Gamma_d, \quad (3.7)$$

ou encore, puisque $M_{u,d} = v\Gamma_{u,d}$,

$$F_L^\dagger M_u F_R^u = e^{i\chi} M_u, \quad (3.8)$$

$$F_L^\dagger M_d F_R^d = e^{-i\chi} M_d, \quad (3.9)$$

Si l'on définit $\mathcal{M}_{u,d} = M_{u,d} M_{u,d}^\dagger$, on obtient, en multipliant (3.8) et (3.9) à droite par leur transposée conjuguée,

$$[F_L, \mathcal{M}_u] = 0, \quad (3.10)$$

$$[F_L, \mathcal{M}_d] = 0. \quad (3.11)$$

Notons que la multiplication à gauche de (3.8) et (3.9) par leur transposée conjuguée entraîne que $\tilde{\mathcal{M}}_{u,d} = M_{u,d}^\dagger M_{u,d}$ et $F_R^{u,d}$ commutent; mais la matrice de mélange est insensible à la diagonalisation de $\tilde{\mathcal{M}}_{u,d}$. Si l'on envisage une rotation du spineur Ψ_L dans l'espace des saveurs, il est toujours possible de compter l'une des deux matrices \mathcal{M}_u ou \mathcal{M}_d pour diagonale. Soit \mathcal{M}_u . Alors, dans cette base, la matrice de mélange se ramène à la matrice des vecteurs propres de \mathcal{M}_d . Il convient maintenant de distinguer deux cas de figure.

\mathcal{M}_u naturellement non dégénérée. \mathcal{M}_u est donc une matrice diagonale dont les éléments sont tous différents. Les seules matrices F_L capables d'imposer une telle non-dégénérescence, ou encore, les seules matrices F_L solutions de l'équation (3.10), sont dès lors également diagonales (F_L est complètement réductible et se décompose en une somme directe de représentations unidimensionnelles; autrement dit, il est interdit de ranger des quarks de saveurs différentes

dans une représentation irréductible de dimension supérieure à un). En effet, (3.10) peut se réécrire

$$F_{Lij}(m_{uj}^2 - m_{ui}^2) = 0,$$

sans somme sur les indices répétés. Or $m_{uj}^2 \neq m_{ui}^2$ pour $i \neq j$. Donc $F_{Lij} = 0$ pour $i \neq j$. Utilisant (3.11), on reprend l'argument précédent pour affirmer que \mathcal{M}_d ne peut être que diagonale par blocs (et non plus seulement diagonale, à cause de la dégénérescence possible des éléments de F_L). On a épuisé l'information disponible dans (3.8) et (3.9); il reste de diagonaliser \mathcal{M}_d , et de remarquer que les éléments de la matrice de mélange (matrice unitaire des vecteurs propres de \mathcal{M}_d), s'ils ne sont pas indéterminés (diagonalisation des blocs arbitraires de \mathcal{M}_d), s'annulent. Les angles de mélange prennent alors 0 ou $\pi/2$ pour valeur, ou sont indéterminés.

\mathcal{M}_u naturellement dégénérée. On s'attardera sur un modèle particulier. Les conclusions seront générales. Imaginons quatre générations de quarks (u, c, t_1 et t_2 pour le secteur up), dont les deux plus lourds sont de masses identiques ($m_{t_1} = m_{t_2}$). La matrice de symétrie F_L à même d'imposer cette structure, ou encore, la matrice F_L solution de l'équation (3.10), peut se réécrire :

$$F_L = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix},$$

avec λ une matrice diagonale 2×2 , et f , une matrice 2×2 , représentation irréductible de dimension 2 du groupe F , et donc telle que

$$[f, A] = 0 \Rightarrow A = \alpha \mathbb{I},$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, et ce pour une matrice A 2×2 arbitraire (lemme de Schur). Si l'on décompose la matrice hermitienne \mathcal{M}_d en blocs 2×2 , i.e.

$$\mathcal{M}_d = \begin{pmatrix} M_1 & M \\ M^\dagger & M_2 \end{pmatrix},$$

avec M_1 et M_2 hermitiennes, on peut décomposer à son tour la contrainte (3.11) :

$$\begin{pmatrix} [\lambda, M_1] & \lambda M - Mf \\ fM^\dagger - M^\dagger f & [f, M_2] \end{pmatrix} = 0.$$

L'équation $[f, M_2] = 0$ implique $M_2 = \beta \mathbb{I}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ (i.e. M_2 est un multiple de l'identité). En outre, en multipliant à gauche la relation $\lambda M = Mf$ par sa transposée conjuguée, et sachant que λ est unitaire, on obtient

$$[f, M^\dagger M] = 0,$$

i.e. $M^\dagger M = \mu^2 \mathbb{I}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$; ou encore $M = U\mu$ où U est une matrice unitaire. Alors, $\lambda M = Mf$ se réécrit

$$(\lambda - UfU^\dagger)\mu = 0,$$

ce qui entraîne $\mu = 0$, puisque $\lambda = UfU^\dagger$ quel que soit l'élément du groupe F représenté par f , contredirait l'irréductibilité de f , elle-même responsable de la dégénérescence naturelle de \mathcal{M}_u . Donc $M = 0$. Et

$$\mathcal{M}_d = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & \beta \mathbb{I} \end{pmatrix},$$

avec, si l'on examine enfin la contrainte $[\lambda, M_1] = 0$, M_1 quelconque ou diagonale, selon que λ est proportionnelle à l'identité ou non (i.e. si la représentation λ , réductible et réduite, est dégénérée ou non dégénérée). Ceci démontre que l'angle de Cabibbo responsable de la diagonalisation du bloc correspondant est soit indéterminé, soit trivial (i.e. $\theta_C \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$).

3.3.2 Modèle à N doublets de Higgs

On généralise le théorème de blocage au Modèle Standard à N doublets de Higgs. Pour $N > 1$, on a montré dans la sous-section 3.1.1 qu'il ne peut y avoir conservation naturelle de la saveur dans les courants neutres que si elle est imposée à l'aide d'une symétrie supplémentaire. A cet effet, la symétrie doit conduire à la simultanéité de la diagonalisabilité des N couplages de Yukawa de chaque secteur (*up* et *down*). Puisqu'elle agit sur la structure des couplages de Yukawa, cette symétrie est de nature horizontale. On en conclut que dans le Modèle Standard à N doublets de Higgs avec $N > 1$, la conservation naturelle de la saveur dans les courants neutres implique la présence d'un groupe de symétrie horizontal, lequel contraint au surplus la matrice de mélange du modèle. On a le théorème suivant : dans le Modèle Standard à N doublets de Higgs avec $N > 1$, s'il y a conservation naturelle de la saveur dans les courants neutres et si les matrices de masse sont non dégénérées, alors la matrice de mélange est diagonale par blocs et dans chaque bloc les éléments non nuls sont de modules identiques [43].

On ne démontre pas ce théorème (il n'y sera pas fait référence par la suite dans la mesure où l'on se limite à l'analyse du Modèle Standard à un doublet de Higgs). On se contente de remarquer que quel que soit le nombre de doublets de Higgs considérés, s'il y a conservation de la saveur dans les courants neutres¹⁴, il est impensable d'espérer obtenir de l'utilisation d'une symétrie horizontale une détermination des angles de mélange tels qu'ils sont observés. En effet, dans le Modèle Standard à deux générations, la matrice de mélange compte deux éléments non nuls de modules différents ($\sin \theta_C^{exp} \neq \cos \theta_C^{exp}$); dans le Modèle Standard à trois générations, elle en compte neuf. On en conclut que l'existence d'une symétrie horizontale de nature à déterminer non trivialement les angles de mélange aurait pour signature une violation de la saveur dans les courants neutres.

Conclusion

On a présenté le secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard. On a montré que dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs, la conservation de la saveur dans les courants neutres est naturelle. Dans le Modèle Standard à N doublets de Higgs avec $N > 1$, la conservation de la saveur dans les courants neutres n'est naturelle que si elle est imposée à l'aide d'une symétrie supplémentaire.

On a défini le concept de relation naturelle entre les angles de mélange et les rapports de masse. On a montré que ce genre de relation peut provenir de l'existence d'une symétrie horizontale. On a illustré cette assertion à l'aide d'un exemple concret – le modèle de Wyler.

Enfin, on a démontré un théorème de blocage qui affirme que dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs, l'utilisation d'une symétrie horizontale ne permet pas de déterminer non trivialement les angles de mélange. De même, dans le Modèle Standard à N doublets de Higgs avec $N > 1$, s'il y a conservation naturelle de la saveur dans les courants neutres, alors il est impossible de déterminer non trivialement les angles de mélange.

¹⁴Notons que s'il y a violation de la saveur dans les courants neutres, mais que cette violation a lieu à l'intérieur des limites expérimentales présentées en début du chapitre, alors il est impossible de conclure.

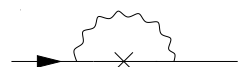
Chapitre 4

L'ordre dominant

Le lagrangien d'une théorie des champs comprend un certain nombre de paramètres libres¹. Ils sont dits *libres* parce qu'ils ne sont pas déterminés par le groupe de symétrie de la théorie. En outre ils sont renormalisés. C'est-à-dire qu'ils sont affectés par des corrections radiatives qui peuvent se révéler divergentes. On les utilise alors pour absorber ces divergences. A l'inverse, un paramètre qui est déterminé par le groupe de symétrie de la théorie n'est pas libre. Il est dit *fixe* ou encore *calculable* [35]. S'il est calculable, il est nécessairement *fini* ou encore *stable*, c'est-à-dire qu'il ne peut être affecté par des corrections radiatives divergentes. Si un paramètre apparemment libre de la théorie s'avère être calculable, alors l'ensemble des paramètres libres de la théorie s'en trouve réduit.

Une autre manière de considérer la réduction du nombre de paramètres libres de la théorie consiste à examiner les éventuelles relations qui les impliqueraient. On a vu au chapitre 3 qu'une relation est dite *naturelle* si elle est déterminée par le groupe de symétrie de la théorie [33, 34, 35]. Une relation naturelle est nécessairement *finie*, c'est-à-dire que les corrections radiatives qui l'affectent sont finies.

En forçant l'annulation de la partie divergente des corrections radiatives affectant un paramètre apparemment libre, on établit une condition nécessaire à la *calculabilité* de ce paramètre. Si l'on se limite au calcul à l'ordre un (c'est-à-dire *l'ordre dominant* ou encore l'ordre d'une boucle), on aboutit à l'expression d'une contrainte qui, en général, détermine la valeur de ce paramètre à l'ordre zéro (c'est-à-dire au *tree-level*). Il s'agit alors de la seule valeur pour laquelle le paramètre en question peut être compté pour calculable. Si la théorie étudiée est supposée décrire une quelconque réalité physique, cette valeur peut être comparée aux données expérimentales. Avec ou sans succès. Quoi qu'il en soit, l'objectif est ensuite de débusquer la symétrie (ou "le principe de nature symétrique") à l'origine de cette éventuelle calculabilité. On illustre ce raisonnement à l'aide d'un exemple simple. En électrodynamique quantique, la masse m de l'électron est un paramètre libre. A l'ordre dominant, la contribution divergente à la renormalisation de la masse s'écrit

$$\delta m \sim \text{diagramme} \sim m e^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}$$


¹Si l'on considère le lagrangien comme une somme de termes invariants sous les transformations du groupe de symétrie de la théorie, alors en général on compte autant de paramètres libres que de termes invariants (à l'exception des termes cinétiques scalaires et fermioniques définis de telle sorte qu'ils n'introduisent pas de paramètre libre dans la théorie).

où Λ est un *cut-off*, μ une échelle d'énergie arbitraire, et où la croix représente une insertion de masse². L'annulation de cette expression entraîne la détermination de la masse de l'électron au *tree-level* : $m = 0$. Du point de vue expérimental, cette valeur n'est évidemment pas admissible. Mais à l'aide de ce simple argument perturbatif, on a montré que la masse de l'électron ne peut être calculable que si elle est nulle. Dans ce cas, la symétrie sous-jacente est bien entendu la symétrie chirale $U(1)_L \otimes U(1)_R$ et la condition $m = 0$ est alors nécessaire et suffisante. La première section de ce chapitre est consacrée à l'étude de calculabilité de l'angle faible dans le Modèle Standard.

En forçant l'annulation de la partie divergente des corrections radiatives affectant une relation arbitraire entre plusieurs paramètres apparemment libres, on établit une condition nécessaire à la *naturalité* de cette relation. Si l'on se limite au calcul à l'ordre d'une boucle, on aboutit à l'expression d'une équation différentielle aux dérivées partielles qui, en général, détermine un ensemble de relations au *tree-level*. Toute relation naturelle entre les paramètres en question appartient nécessairement à cet ensemble. La deuxième section de ce chapitre est consacrée à l'étude de naturalité d'une relation arbitraire entre le rapport de masse et les constantes de couplage dans un modèle de Yukawa à deux fermions.

Les approches développées dans ces deux sections mettent en évidence la puissance d'un calcul à l'ordre d'une boucle³ dans une étude de calculabilité d'un paramètre ou de naturalité d'une relation. Le calcul ne permet pas d'assurer que tel paramètre est calculable ; ou que telle relation est naturelle. Il s'agit seulement d'affirmer que si tel paramètre est calculable, alors sa valeur à l'ordre zéro doit être telle ; de même, si telle relation est naturelle, alors, elle doit appartenir à tel ensemble.

4.1 L'angle faible

On considère le Modèle Standard minimal, à savoir invariant sous les transformations locales du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (brisé spontanément en $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$), et dont les contenus respectivement fermionique et scalaire se limitent à n générations de fermions et un doublet de Higgs. On détermine les conditions de calculabilité de l'angle faible⁴ [67, 68]. On cherche ensuite à identifier la symétrie responsable de cette éventuelle calculabilité. On clôture la section en évoquant la question de la renormalisation des rapports de masse.

4.1.1 L'argument

L'angle faible θ_W , tel qu'il a été introduit par la relation (2.15), mélange entre eux les bosons neutres W_μ^3 et B_μ , états propres d'isospin, pour former les bosons neutres Z_μ^0 et A_μ , états propres de masse [12]. On se pose la question de savoir dans quelle mesure cet angle peut être considéré comme un paramètre fixe (par opposition à libre), c'est-à-dire fini à tous les ordres en théorie de perturbation, et calculable. L'annulation des corrections radiatives divergentes est une condition nécessaire. En particulier, les corrections radiatives à l'angle faible proportionnelles au nombre n de générations de fermions doivent être finies. Enfin, parmi celles-ci, les corrections radiatives à une boucle doivent être finies. Or cet angle est

²On a développé le propagateur fermionique en série autour du propagateur d'un électron de masse nulle.

³Le calcul à l'ordre d'une boucle trouve sa légitimité dans le développement en \hbar des solutions de la théorie.

⁴Les tentatives de détermination de l'angle faible fondées sur l'annulation des corrections radiatives divergentes préexistent à ce travail [65, 66].

corrigé radiativement par le diagramme de polarisation du vide suivant :



$$(4.1)$$

On peut donc annuler les contributions fermioniques divergentes du diagramme (4.1), et obtenir une contrainte sur l'angle faible. A l'ordre d'une boucle, si l'on ne se soucie pas des parties finies, on a



$$n \sum_{\text{fermions}} = n \sum_{\text{fermions}} \frac{Q(\frac{T_3}{2} - Q \sin^2 \theta_W)}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \cdot \Pi_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

$$= n \frac{1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \cdot \Pi_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

où $\Pi_{\mu\nu}$ est la self-énergie du photon en électrodynamique quantique (dont la partie divergente ne dépend pas de la masse du fermion qui court dans la boucle), et où la somme porte sur tous les fermions d'une génération. En reprenant ces résultats, on a donc pour l'angle faible :

$$\delta \theta_W \sim n \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W \right) \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}, \quad (4.4)$$

où Λ est un *cut-off* et μ une échelle d'énergie arbitraire (on a délibérément omis le terme quadratiquement divergent puisqu'il peut être éliminé à l'aide d'un autre schéma de régularisation ; on aurait cependant pu l'inclure dans l'équation (4.4) sans pour autant que le coefficient général s'en trouve affecté). L'annulation de ces contributions divergentes revient à imposer la contrainte [67, 68]

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8}. \quad (4.5)$$

Cette valeur prédite, significativement éloignée de la valeur $\sin^2 \theta_W^{exp} \simeq 0,23$ mesurée à l'échelle du Modèle Standard [32], ne paraît pas satisfaisante. On peut cependant s'interroger sur l'essence même de la démarche. Doit-on réellement s'attendre à obtenir l'angle faible tel qu'il est mesuré à l'échelle d'énergie du Modèle Standard ?

Puisque par définition, l'angle faible θ_W est le paramètre qui relie les constantes de couplage g et g' des groupes $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$, respectivement ($\tan \theta_W = g'/g$), imposer la finitude des corrections radiatives à ce même angle revient à exiger l'existence d'une relation naturelle entre ces constantes de couplage, ou encore, à exiger l'unification des couplages. En termes de symétries, on devrait pouvoir réaliser cette unification en plongeant le groupe de symétrie du Modèle Standard dans un groupe simple, plus vaste, appelé groupe d'unification⁵. On peut alors imaginer que ce groupe unifie les constantes de couplage à une certaine échelle d'énergie, supérieure à celle du Modèle Standard, et qu'il est brisé spontanément pour reproduire, à basse énergie, le groupe de symétrie du Modèle Standard. De quel groupe pourrait-il s'agir ? Parmi ses générateurs infinitésimaux, il devrait compter au moins autant de générateurs diagonaux

⁵La simplicité du groupe d'unification garantit l'unicité de la constante de couplage. Cependant, ce groupe pourrait n'être pas simple, mais il devrait alors s'exprimer comme le produit direct de plusieurs groupes simples, identiques, auxquels seraient associées les mêmes constantes de couplage à l'aide, par exemple, d'une symétrie discrète supplémentaire, telle la parité.

qu'il y en a dans le groupe de symétrie du Modèle Standard. Or $SU(3)$ en compte deux ; $SU(2)$, un ; et $U(1)$, un. On dit que $SU(3)$ est de rang 2 ; $SU(2)$, de rang 1 ; et $U(1)$, de rang 1. En d'autres termes, le groupe d'unification doit être de rang supérieur ou égal à quatre. Le plus petit groupe simple pouvant convenir est $SU(5)$, de rang⁶ 4. Il s'agit du plus petit groupe de *grande unification*⁷.

4.1.2 L'origine

On considère le groupe $SU(5)$ des matrices unitaires 5×5 de déterminant unité [70, 71]. Une matrice $N \times N$ unitaire arbitraire compte N^2 degrés de liberté ; une matrice $N \times N$ unitaire arbitraire de déterminant unité en compte $N^2 - 1$. Dès lors, $SU(5)$ compte $5^2 - 1 = 24$ générateurs infinitésimaux indépendants. Ils sont hermitiens parce que les matrices appartenant à $SU(5)$ sont unitaires. Ils sont de trace nulle parce que les matrices appartenant à $SU(5)$ sont de déterminant unité. On les note

$$T_\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \{0, \dots, 23\} .$$

Les propriétés d'hermiticité et de nullité de la trace des générateurs demeurent valides quelle que soit la représentation considérée. Ces 24 générateurs infinitésimaux forment une base pour l'algèbre de Lie de $SU(5)$. Ils sont (ortho)normés de telle sorte que

$$\text{tr} (T_\alpha T_\beta) = N_R \delta_{\alpha\beta} , \quad (4.6)$$

où N_R est un coefficient qui ne dépend que de la représentation R considérée.

Afin de pouvoir plonger le groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ dans $SU(5)$, il faut veiller à ce que les sous-groupes $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ commutent mutuellement au sein de $SU(5)$. C'est-à-dire, par exemple, que les générateurs de $SU(3)_c$ se comportent comme des matrices unité ou des matrices nulles pour les générateurs de $SU(2)_L$, et inversement. Dans la représentation fondamentale de $SU(5)$, qui est de dimension 5, on choisit donc de réserver à $SU(3)_c$ les éléments appartenant à la fois aux trois premières lignes et aux trois premières colonnes ; et à $SU(2)_L$ les éléments appartenant à la fois aux deux dernières lignes et aux deux dernières colonnes. On peut alors définir parmi les générateurs de $SU(5)$ ceux qui sont associés à $SU(3)_c$, c'est-à-dire 8 matrices 5×5 dont tous les éléments sont nuls sauf le bloc 3×3 situé en haut de la diagonale, lequel correspond aux matrices de Gell-Mann $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ divisées par deux ; et ceux qui sont associés à $SU(2)_L$ c'est-à-dire 3 matrices 5×5 dont tous les éléments sont nuls sauf le bloc 2×2 situé en bas de la diagonale, lequel correspond aux matrices de Pauli τ_1 , τ_2 et τ_3 divisées par deux. On construit ensuite univoquement le générateur associé à $U(1)_Y$: il s'agit d'une matrice diagonale réelle ; les trois premiers éléments de la diagonale sont identiques puisqu'il commute avec les générateurs associés à $SU(3)_c$; les deux derniers éléments de la diagonale sont identiques puisqu'il commute avec les générateurs associés à $SU(2)_L$; l'annulation de la trace et la condition (4.6) déterminent les deux paramètres de la diagonale.

⁶Il est aisé de s'apercevoir que le groupe $U(N)$ compte N générateur diagonaux. Dès lors, le groupe $SU(N)$ en compte $N - 1$.

⁷La démarche engagée dans la sous-section suivante peut être répétée pour le plus petit groupe simple incluant les seuls groupes $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$. On parle de *petite unification*. Ce groupe d'unification doit être de rang 2. Il s'agit donc de $SU(3)$. On peut montrer que l'angle faible associé à $SU(3)$ est tel que $\sin^2 \theta_W = 1/4$ [69]. Cette valeur n'annule l'expression (4.2) que si l'on prend soin de ne pas compter les quarks (particules colorées) dans la boucle, ou bien de les y remplacer par des fermions incolores, c'est-à-dire des leptons.

On appelle T_0 générateur diagonal associé à $U(1)_Y$; T_1, T_2 et T_3 les générateurs associés à $SU(2)_L$; et T_{11}, \dots, T_{18} les générateurs associés à $SU(3)_c$. On ne s'attarde pas sur la construction des 12 générateurs restant. On remarque que par construction les matrices de Pauli (divisées par deux) et les matrices de Gell-Mann (divisées par deux) doivent satisfaire à la condition (4.6). En outre, on note qu'on dispose bien des 4 générateurs diagonaux de $SU(5)$: T_0, T_3, T_{13} et T_{18} .

Le générateur Q associé à la charge électrique est une combinaison linéaire des générateurs diagonaux (parce que la charge électrique est un nombre quantique additif) "non colorés" (parce que la charge électrique et la couleur sont insensibles l'une à l'autre), à savoir T_0 et T_3 . On sait qu'au sein de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, on a $Q = T_3 + Y/2$ (voir note en bas de la page 23). Or T_3 a été choisi tel qu'il ait la même norme au sein de $SU(2)_L$ et de $SU(5)$. Dès lors, au sein de $SU(5)$, on a $Q = T_3 + cT_0$ où $c \in \mathbb{R}$ est tel que

$$Y/2 = cT_0. \quad (4.7)$$

La dérivée covariante correspondant au groupe de jauge $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (pour autant qu'elle soit considérée dans la représentation fondamentale de chacun des sous-groupes de jauge) implique devant les champs de jauge les produits

$$g_s \frac{\lambda_a}{2}, \quad g \frac{\tau_i}{2}, \quad \text{et} \quad g' \frac{Y}{2}, \quad (4.8)$$

pour $a \in \{1, \dots, 8\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$, et où g_s, g et g' sont les constantes de couplages associées aux groupes $SU(3)_c, SU(2)_L$, et $U(1)_Y$, respectivement ; tandis que la dérivée covariante correspondant au groupe de jauge $SU(5)$ implique devant les champs de jauge les produits

$$g_5 T_\alpha, \quad (4.9)$$

pour, entre autres, $\alpha = 0, \alpha \in \{1, 2, 3\}$ et $\alpha \in \{11, \dots, 18\}$, et où g_5 est la constante de couplage associée au groupe $SU(5)$. Identifiant univoquement les produits (4.8) et (4.9) dans la représentation fondamentale de $SU(5)$, et utilisant (4.7), on a

$$g_5 = g_s = g = cg'.$$

Sachant que l'angle faible θ_W est défini tel que $\text{tg}^2 \theta_W = g'/g = 1/c$, i.e. tel que $\sin^2 \theta_W = (1 + c^2)^{-1}$, et remarquant que $\text{tr} Q^2 = \text{tr} (T_3 + cT_0)^2 = \text{tr} T_3^2 (1 + c^2)$, on a [72]

$$\sin^2 \theta_W = \frac{\text{tr} T_3^2}{\text{tr} Q^2}. \quad (4.10)$$

Ce résultat est indépendant de la représentation de $SU(5)$ considérée, qu'elle soit irréductible ou non. Il est donc *a priori* vrai pour la somme directe des représentations irréductibles dans lesquelles vivent les fermions de la théorie. Dès lors, en sommant le carré des isospins de tous les fermions de Weyl dont on dispose, et en rapportant le résultat à la somme des carrés de leur charge, on obtient :

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8}.$$

On a donc montré que la valeur de l'angle faible à l'échelle de grande unification correspond à la valeur obtenue au terme d'un calcul à l'ordre d'une boucle au sein du Modèle Standard⁸. On en conclut que l'étude de calculabilité de l'angle faible a porté ses fruits dans la mesure où, sans hypothèse préalable, elle a permis de déterminer la valeur de cet angle à l'échelle d'une éventuelle grande unification.

⁸Dans $SU(5)$, à l'ordre d'une boucle, en tenant compte de la brisure spontanée de la symétrie (analysée

4.1.3 Remarque : les rapports de masse

Revenons un instant à la première sous-section, et notons que le résultat (4.5) demeure valable, indépendamment, pour deux sous-ensembles de fermions courant dans la boucle du diagramme (4.2), c'est-à-dire (pour ce qui concerne la première génération) l'électron gauche, le neutrino gauche et les trois quarks *down* droit d'une part, et les dix autres fermions du Modèle Standard de l'autre⁹. Ceci nous permet de déterminer la manière "minimale" dont il conviendrait de ranger les fermions du Modèle Standard dans les représentations irréductibles du groupe d'unification (même si l'on ne connaît *a priori* pas la dimension de ses représentations), c'est à dire les cinq champs $\nu_L, e_L, d_R^r, d_R^b, d_R^v$ (où r, b, v sont les trois couleurs associées au groupe de symétrie des interactions fortes) dans une représentation de dimension 5, et les autres dans une représentation de dimension 10.

Une étude plus approfondie de la structure de $SU(5)$ permet de déterminer l'ensemble de ses représentations irréductibles (on les symbolise par leur dimension, en caractères gras, l'étoile désignant la représentation conjuguée) [70, 71] :

$$\mathbf{5}, \mathbf{5}^*, \mathbf{10}^*, \mathbf{15}, \mathbf{15}^*, \mathbf{24}, \dots$$

L'analyse du contenu de ces représentations en termes des représentations irréductibles du groupe de symétrie du Modèle Standard conduit alors à la répartition des fermions (gauches) du Modèle Standard dans deux d'entre elles :

$$\nu_L, e_L, (d_R^r)^c, (d_R^b)^c, (d_R^v)^c \longrightarrow \mathbf{5}^* \quad \text{et} \quad \text{autres} \longrightarrow \mathbf{10}$$

où l'exposant c désigne la conjugaison de charge, laquelle change la chiralité du champ auquel elle est appliquée. Ce résultat correspond précisément à celui que l'on vient de déduire du calcul à l'ordre d'une boucle !

Les théories de grande unification mettent les quarks et les leptons sur pied d'égalité. Il est aisé de remarquer que la dérivée covariante correspondant au groupe de jauge $SU(5)$ fait intervenir, en plus du W , du Z et du photon, des bosons de jauge (appelés leptoquarks et symbolisés par X) qui autorisent les transitions quark-lepton. Or, à l'échelle d'énergie du Modèle Standard, ces transitions sont interdites, et les leptoquarks sont invisibles. Il faut dès lors que ces leptoquarks soient massifs, et lourds (bien plus lourds que les particules visibles du Modèle Standard). C'est-à-dire qu'il faut que la symétrie soit brisée spontanément, et que la valeur moyenne dans le vide associée à cette brisure soit élevée. Enfin, le caractère massif

dans la sous-section suivante) et en négligeant les contributions scalaires, on peut montrer que l'expression de l'angle faible à l'échelle d'énergie μ se ramène à [73]

$$\sin^2 \theta_W = \frac{3}{8} - \frac{55 \alpha(\mu)}{24\pi} \ln \frac{M_X}{\mu} \quad (4.11)$$

où $\alpha(\mu)$ est la constante de structure fine et où $M_X \simeq 4 \cdot 10^{14}$ GeV est l'échelle de grande unification. A la masse du Z ($M_Z \simeq 91$ GeV), l'équation (4.11) entraîne que

$$\sin^2 \theta_W \simeq 0,22.$$

Ce nombre, sensiblement proche de la valeur expérimentale $\sin^2 \theta_W^{exp} \simeq 0,23$, confirme la potentialité de l'unification des constantes de couplages à l'échelle d'énergie M_X , et renforce la pertinence de l'argument à une boucle destiné à étudier la calculabilité de l'angle faible.

⁹Pour effectuer l'évaluation en termes des spineurs de Weyl, il faut remplacer $T_3/2$ par T_3 dans l'expression (4.2).

mais visible des bosons de jauge du Modèle Standard requiert une deuxième brisure spontanée de la symétrie, avec une deuxième échelle d'énergie (i.e. celle du Modèle Standard) :

$$SU(5) \xrightarrow{M_X} SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{M_W} SU(3)_c \otimes U(1)_{em} .$$

On peut montrer que le potentiel associé aux champs scalaires H_{ij} de la représentation adjointe (**24**) présente un minimum $H_0 \equiv \langle H \rangle_0 \sim Y$, où Y est le générateur de l'hypercharge. Puisqu'elle est proportionnelle au générateur de l'hypercharge, cette configuration du vide commute avec tous les générateurs du groupe de symétrie du Modèle Standard ; elle est dès lors invariante sous les transformations de ce groupe. On observe par contre que tous les autres générateurs sont brisés par le choix de cette configuration. La représentation adjointe convient donc pour décrire la première phase de la brisure spontanée de $SU(5)$.

Les fermions du Modèle Standard, rangés dans les représentations $\mathbf{5}^*$ et $\mathbf{10}$, ne peuvent acquérir de la masse qu'à travers les bilinéaires

$$\begin{aligned} \mathbf{5}^* \otimes \mathbf{5}^* &= \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{15} , \\ \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \mathbf{5}^* \oplus \mathbf{45}^* \oplus \mathbf{50} , \\ \mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} &= \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} . \end{aligned}$$

Or il est impossible d'obtenir un singulet de $SU(5)$ en multipliant aucun de ces bilinéaires avec le multiplet **24**. Les fermions du Modèle Standard demeurent donc non massifs lors de la première phase de la brisure spontanée de $SU(5)$ (ce qui est heureux dans la mesure où la valeur moyenne dans le vide associée à cette brisure entraînerait, pour rendre compte de la masse des fermions telle qu'elle est observée, l'existence de couplages de Yukawa inexplicablement petits). Si l'on souhaite douer les fermions d'une masse à l'aide d'un seul multiplet, il faut recourir à la représentation **5** ou **45**. On considère le schéma minimal qui implique cinq champs scalaires ϕ_i rangés dans la représentation fondamentale (**5**). Alors, les couplages de Yukawa des leptons¹⁰ chargés et des quarks de type *down* sont nécessairement identiques. Après brisure spontanée de la symétrie, ces couplages donnent lieu à des matrices de masse identiques. On a [70] :

$$\frac{m_d}{m_e} = 1 , \quad \frac{m_s}{m_\mu} = 1 , \quad \frac{m_b}{m_\tau} = 1 .$$

Ces relations sont naturelles. Mais elles ne peuvent être tenues pour vraies qu'à l'échelle d'énergie de $SU(5)$. On peut déterminer cette échelle d'énergie et faire courir les masses des fermions jusqu'à une échelle de quelques GeV. On montre que pour les fermions lourds (i.e. appartenant à la troisième génération), la course des masses introduit un facteur trois dans le membre de droite [71] :

$$\frac{m_b}{m_\tau} \simeq 3 .$$

A la masse du τ ($m_\tau \simeq 1,8$ GeV), on aurait donc $m_b = 5,4$ GeV. Ce résultat constitue l'une des plus remarquables prédictions de la théorie de grande unification minimale. Pour ce qui est des fermions légers (i.e. les deux premières générations), les effets de la renormalisation à basse énergie et l'imprécision dans la détermination des masses des quarks sont tels que la validité de l'estimation des rapports de masse à l'échelle du Modèle Standard n'est pas assurée.

¹⁰Les leptons sont introduits au chapitre 6, page 70.

4.2 Les rapports de masse

On considère le modèle (dit de Yukawa) impliquant un scalaire (réel) et deux fermions massifs gouvernés par le lagrangien :

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \sum_{a=1}^2 \{ \bar{\psi}_a (i \not{\partial} - m_a) \psi_a - g_a \bar{\psi}_a \psi_a \phi \} , \quad (4.12)$$

avec $V(\phi) = \mu^2/2 \phi^2 + O(\phi^3)$ et, en général, $g_1 \neq g_2$ et $m_1 \neq m_2$. Les termes d'interaction fermions-scalaire sont des couplages de Yukawa. On détermine les conditions de naturalité d'une relation entre les paramètres libres du secteur fermionique du modèle. On cherche ensuite à identifier la symétrie responsable de cette éventuelle relation naturelle.

4.2.1 L'argument

La partie fermionique compte quatre paramètres *a priori* libres et donc indépendants : g_1 , g_2 , m_1 et m_2 . On se pose la question de savoir dans quelle mesure la taille de l'ensemble de ces paramètres libres peut être réduite; autrement dit, on cherche à établir un critère permettant d'obtenir une ou plusieurs relations entre ces paramètres. Pour être acceptable, une telle relation, définie au *tree-level*, doit demeurer vraie à tous les ordres en théorie de la perturbation. C'est à dire qu'elle ne peut être corrigée que par des quantités finies, et généralement petites. On se propose de calculer les corrections radiatives divergentes à ces paramètres, à l'ordre d'une boucle, et de déterminer l'ensemble des relations valides à la fois au *tree-level* et à l'ordre d'une boucle. On précise d'emblée que s'il existe une relation valide à tous les ordres, elle appartient nécessairement à cet ensemble. On note en outre que les paramètres de dimension non nulle ne peuvent intervenir dans ces éventuelles relations qu'en termes de rapports. Or ils sont au nombre de deux (m_1 et m_2). On peut dès lors définir $r \equiv m_1/m_2$ et se contenter de considérer les trois paramètres r , g_1 et g_2 .

On suppose donc l'existence d'une relation, au *tree-level*, entre r d'une part, et g_1 et g_2 de l'autre :

$$r = r(g_1, g_2) . \quad (4.13)$$

On exige la validité de cette relation à l'ordre d'une boucle, i.e.

$$r + \delta r = r(g_1 + \delta g_1, g_2 + \delta g_2) , \quad (4.14)$$

où δr , δg_1 et δg_2 sont respectivement les corrections radiatives divergentes aux paramètres r , g_1 et g_2 . Utilisant (4.13) on réécrit (4.14) :

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial g_1} \delta g_1 + \frac{\partial r}{\partial g_2} \delta g_2 . \quad (4.15)$$

A l'ordre d'une boucle on calcule les corrections¹¹ radiatives divergentes à chacun de ces

¹¹On remarque que ces corrections sont indépendantes de la forme du potentiel $V(\phi)$ dans la mesure où les seules corrections radiatives à la fonction d'onde du scalaire proviennent du diagramme de polarisation du vide. Les corrections radiatives à la fonction d'onde des fermions, au rapport de masse des fermions, et au vertex fermions-scalaire ne font pas intervenir les couplages du potentiel scalaire.

paramètres (annexe B, page 97) :

$$\begin{aligned}\delta r &= -r \frac{3}{2} (g_1^2 - g_2^2) D, \\ \delta g_1 &= -g_1 \frac{1}{2} (5g_1^2 + 2g_2^2) D, \\ \delta g_2 &= -g_2 \frac{1}{2} (5g_2^2 + 2g_1^2) D,\end{aligned}$$

où $D = (4\pi)^{-2} 2/\epsilon$ est le facteur divergent (en régularisation dimensionnelle). Plongeant ces expressions dans l'équation (4.15), on aboutit à l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$3r(g_1^2 - g_2^2) = \frac{\partial r}{\partial g_1} (5g_1^3 + 2g_1g_2^2) + \frac{\partial r}{\partial g_2} (5g_2^3 + 2g_2g_1^2). \quad (4.16)$$

La solution générale de cette équation, si elle existe, fait probablement intervenir une fonction implicite arbitraire à un argument, c'est-à-dire une infinité de constantes d'intégration. Mais on ne cherche pas à construire cette solution générale ; on se contente, pour le coup, de remarquer que la relation

$$r = \frac{g_1}{g_2} \quad (4.17)$$

est une solution particulière de l'équation (4.16). Ceci signifie que si cette relation est vérifiée au *tree-level*, alors elle l'est également à l'ordre d'une boucle, à quelques corrections finies près. Autrement dit, les corrections radiatives à r ont la même partie infinie que les corrections radiatives à g_1/g_2 .

On vient de montrer qu'il existe une solution au problème posé, à savoir : trouver une ou plusieurs relations (entre r d'une part et g_1 et g_2 de l'autre) qui demeurent valides à l'ordre d'une boucle. S'il advient que la relation (4.17) demeure valide à tous les ordres en théorie de la perturbation, on la dira naturelle.

Il convient maintenant de s'interroger sur l'origine de cette éventuelle relation naturelle, de débusquer le principe, la symétrie, ou la théorie sous-jacente responsable de son existence, qui en garantirait la validité à tous les ordres, et permettrait de conclure qu'on est effectivement parvenu à diminuer le nombre de paramètres libres du lagrangien (4.12). Or, dans le cas présent, on observe qu'en termes des masses, (4.17) s'écrit $m_1/m_2 = g_1/g_2$, relation que l'on reparamètre sous la forme d'un système

$$\begin{aligned}m_1 &= v g_1, \\ m_2 &= v g_2,\end{aligned} \quad (4.18)$$

lequel décrit précisément le spectre de masse des fermions tel qu'il aurait été obtenu via brisure spontanée de la symétrie, pour autant que l'on identifie v à la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire avant brisure spontanée de la symétrie. Mais de quelle symétrie pourrait-il s'agir ? De quel lagrangien pourrait-on partir, afin d'obtenir, après brisure spontanée d'une symétrie qu'il reste à déterminer, le lagrangien (4.12) ?

4.2.2 L'origine

On réécrit le lagrangien (4.12) pour des fermions non massifs, avec un potentiel $V(\phi) = -\mu^2/2 \phi^2 + \lambda/4 \phi^4$ provoquant par sa forme la brisure spontanée de la symétrie :

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \sum_{a=1}^2 \{ \bar{\psi}_a i \not{\partial} \psi_a - g_a \bar{\psi}_a \psi_a \phi \}. \quad (4.19)$$

On peut décomposer les spineurs ψ_a en leurs composantes gauche et droite : $\psi_{aL}^R = (1 \pm \gamma_5)\psi_a/2$, et réexprimer \mathcal{L}_B :

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \sum_{a=1}^2 \{ \bar{\psi}_{aL} i \not{\partial} \psi_{aL} + \bar{\psi}_{aR} i \not{\partial} \psi_{aR} - g_a \bar{\psi}_{aL} \psi_{aR} \phi - g_a \bar{\psi}_{aR} \psi_{aL} \phi \} .$$

Ainsi formulé, il est aisé d'en montrer l'invariance sous les transformations du groupe produit $S_{2L} \otimes S_{2R}$, où S_2 est le groupe symétrique à deux générateurs¹² (on ne s'attarde pas sur la symétrie $SU(2)_V$ que présente également le lagrangien \mathcal{L}_B dans la mesure où elle n'intervient pas dans le raisonnement développé ci-dessous). Les lois de transformation s'écrivent

$$\begin{aligned} \psi_L &\longmapsto S_L \psi_L , \\ \psi_R &\longmapsto S_R \psi_R , \\ \phi &\longmapsto S_L S_R \phi , \end{aligned} \tag{4.20}$$

où ψ représente à la fois ψ_1 et ψ_2 , et avec $S_L \in S_{2L}$ et $S_R \in S_{2R}$, i.e. $S_L, S_R \in \{1, -1\}$. Lorsque le champ ϕ développe la valeur moyenne dans le vide $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ non nulle et est redéfini autour du vide physique, c'est-à-dire après la translation $\phi \rightarrow \phi + v$, le terme de Yukawa génère un terme de masse pour les fermions : $-g_a \bar{\psi}_a \psi_a \phi \rightarrow -g_a \bar{\psi}_a \psi_a \phi - m_a \bar{\psi}_a \psi_a$; avec¹³

$$m_a = v g_a .$$

Valable pour $a \in \{1, 2\}$, cette expression entraîne nécessairement (4.17). On remarque en outre qu'après brisure spontanée de la symétrie, le lagrangien n'est plus invariant que sous les transformations du sous-groupe diagonal de $S_{2L} \otimes S_{2R}$:

$$\begin{aligned} \psi_L &\longmapsto S \psi_L , \\ \psi_R &\longmapsto S \psi_R , \\ \phi &\longmapsto \phi , \end{aligned} \tag{4.21}$$

où $S = S_L = S_R \in S_2 \subset S_{2L} \otimes S_{2R}$. Ceci signifie que l'on peut aboutir au lagrangien (4.12) en partant du lagrangien (4.19) dont on brise spontanément la symétrie

$$S_{2L} \otimes S_{2R} \longrightarrow S_2 ,$$

et la relation (4.17) est naturelle, c'est à dire qu'elle est générée par l'existence d'une symétrie ($S_{2L} \otimes S_{2R}$). Même si elle est brisée spontanément, i.e. dissimulée, la symétrie continue de protéger la relation contre les corrections radiatives divergentes.

¹²c'est-à-dire le groupe des permutations de deux éléments, isomorphe au groupe \mathbb{Z}_2 .

¹³Il s'agit de l'analogie de la relation (2.10) dans le modèle sigma linéaire.

Conclusion

Au terme d'un calcul à l'ordre dominant, on a déterminé la seule valeur potentiellement calculable de l'angle faible. Cette valeur ne correspond pas à la valeur mesurée à l'échelle d'énergie du Modèle Standard. On peut cependant l'associer à l'angle faible tel qu'il est calculé lorsqu'on plonge le groupe de symétrie du Modèle Standard dans le groupe $SU(5)$, c'est-à-dire le plus petit groupe de grande unification. A partir de l'échelle d'énergie de grande unification, où l'angle faible est par définition calculable, on peut alors le faire courir afin qu'il atteigne sa valeur expérimentale à l'échelle du Modèle Standard. Il s'agit donc d'un exemple où l'étude de calculabilité d'un paramètre, à l'ordre dominant, permet de mettre en évidence l'existence d'une éventuelle symétrie plus contraignante à haute énergie.

On a montré ensuite qu'on peut partir d'un lagrangien (dans ce cas-ci \mathcal{L}_A) comportant un certain nombre de couplages *a priori* indépendants, et déterminer un ensemble de relations finies à l'ordre dominant entre ces paramètres. En outre, on a montré qu'il est possible (pour ce modèle particulier) d'associer au moins l'une de ces relations à l'existence éventuelle d'une symétrie, fût-elle dissimulée. Cette symétrie est alors responsable et garante du caractère naturel de la relation en question. On dispose donc avec ce modèle d'un exemple de l'utilisation fructueuse d'un argument à l'ordre dominant, c'est-à-dire conduisant à la découverte d'un principe (ici, une symétrie brisée spontanément) déterminant et expliquant le résultat obtenu à l'ordre dominant¹⁴.

Le succès des approches présentées dans la première et la deuxième section de ce chapitre fonde la raison de leur utilisation dans les chapitres 5 et 6, respectivement.

¹⁴Précisons que l'approche pourrait être appliquée au modèle sigma linéaire, et conduirait à la mise en évidence de la relation (2.10) de Goldberger-Treiman.

Chapitre 5

Mélanges finis

Dans le Modèle Standard à deux générations de fermions, l'angle de Cabibbo θ_C est un paramètre libre. Cependant, l'abondance de paramètres libres émanant du seul secteur de Yukawa ainsi que le succès phénoménologique de certains modèles (on songe par exemple à la relation [74, 75, 76]

$$\text{tg } \theta_C \simeq \sqrt{\frac{m_d}{m_s}}$$

en accord avec l'expérience : $\sqrt{m_d/m_s} \simeq \sqrt{1/20} \simeq 0,22$) donnent à penser que l'on pourrait considérer l'angle de Cabibbo comme calculable ou, pour le moins, comme une fonction naturelle des rapports de masse des quarks. Rappelons d'emblée la différence entre ces deux propositions. A l'angle calculable on attribue un nombre pur, à l'image de l'angle faible dans une théorie unifiée des interactions électrofaibles; on parle de *mélange fini*. Par contre, si l'angle s'exprime en termes des rapports de masse des quarks, on parle de relation naturelle. Du point de vue de la renormalisation, cette différence est capitale, puisqu'un nombre pur n'est pas renormalisé (i.e. il ne peut être affecté par des corrections radiatives divergentes), tandis qu'une relation naturelle l'est, mais de la même manière pour chaque membre de l'égalité [35].

Dans la première section de ce chapitre, on utilise les arguments développés au chapitre précédent afin d'étudier la calculabilité de l'angle de Cabibbo dans le Modèle Standard à deux générations de fermions et un doublet de Higgs [68]. C'est-à-dire qu'à l'ordre d'une boucle, on force l'annulation de la partie divergente des corrections radiatives à l'angle de Cabibbo. De cette annulation dérive une contrainte qui détermine la valeur de l'angle au *tree-level*. Le résultat obtenu est comparé à la thèse du théorème énoncé et démontré au chapitre 3, section 3.3. La deuxième section du chapitre est consacrée à la généralisation de l'étude de calculabilité aux paramètres de la matrice de Kobayashi-Maskawa dans le Modèle Standard à trois générations de fermions et un doublet de Higgs. Enfin, à l'aide de l'expression de la seule partie divergente des corrections radiatives aux angles de mélange, on examine les conditions de possibilité d'un mélange partiellement (et naturellement) trivial ($\theta_1 = 0$ et $\theta_2 \neq 0 \neq \theta_3$) au *tree-level*, et faible mais non trivial aux ordres supérieurs en théorie de la perturbation.


L'éventualité d'une ou de plusieurs relations naturelles entre les angles de mélange et les rapports de masse des quarks dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs fera l'objet du chapitre suivant.

5.1 L'angle de Cabibbo

On considère le Modèle Standard à un doublet de Higgs et deux générations de fermions. Il est invariant sous les transformations locales du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (brisé spontanément en $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$). On détermine les conditions de calculabilité de l'angle de Cabibbo [68]. On cherche ensuite à identifier la symétrie responsable de cette éventuelle calculabilité.

5.1.1 L'argument

L'angle de Cabibbo θ_C introduit dans la sous-section 3.1.2 décrit le mélange des champs de quark exprimés dans la base physique. Il mesure les transitions possibles entre les quarks de la première génération et les quarks de la deuxième génération. S'il est non nul au *tree-level*, il est en principe renormalisé par des diagrammes du type :



$$(5.1)$$

On se pose la question de savoir dans quelle mesure les corrections radiatives à l'angle de Cabibbo peuvent être finies. Si elles sont finies, alors elles le sont nécessairement à l'ordre d'une boucle. En combinant les contributions divergentes des diagrammes (5.1) calculés à l'ordre d'une boucle, c'est-à-dire



où les lignes pointillées sont des lignes de boson, on peut obtenir la contribution divergente des corrections radiatives à l'angle de Cabibbo. On montre en annexe (page 103) que

$$\delta\theta_C \sim \sin\theta_C \cos\theta_C \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}, \quad (5.2)$$

où Λ est un *cut-off* et μ une échelle d'énergie arbitraire. L'annulation de ces corrections divergentes revient à exiger¹ que

$$\sin\theta_C = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\theta_C = 0, \quad (5.4)$$

c'est-à-dire un mélange trivial ($\theta_C \in \{0, \pi/2\}$). Ce résultat, très éloigné de la valeur expérimentale $\sin\theta_C^{exp} \simeq 0,22$ [32], doit être écarté. Par analogie avec l'angle faible, on peut toutefois s'interroger sur l'origine d'un tel mélange, et chercher à savoir s'il n'est pas la manifestation d'une éventuelle symétrie, présente à une échelle d'énergie supérieure à celle du Modèle Standard.

¹A l'ordre d'une boucle, l'expression exacte de la partie divergente des corrections radiatives à l'angle de Cabibbo s'écrit :

$$\delta\theta_C = \epsilon \left[\frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} (m_d^2 - m_s^2) + \frac{m_s^2 + m_d^2}{m_s^2 - m_d^2} (m_u^2 - m_c^2) \right] \sin\theta_C \cos\theta_C, \quad (5.3)$$

avec $\epsilon = 3/(8v^2\pi^2) \ln\Lambda^2/\mu^2$, où v est la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire. Pour des masses non dégénérées, on remarque que le coefficient entre crochets est toujours différent de zéro.

5.1.2 L'origine

Au *tree-level*, l'absence de mélange ($\theta_C \in \{0, \pi/2\}$) entre deux générations de quarks trahit l'existence d'une symétrie supplémentaire, de type horizontal, qui interdit les transitions intergénérationnelles (le cas $\theta_C = \pi/2$ est équivalent au cas $\theta_C = 0$ dans la mesure où l'on permute les quarks u et c ou bien les quarks d et s). On remarque effectivement qu'avec $K = \mathbb{I}$ le lagrangien (3.2) est invariant sous les transformations

$$\begin{aligned} u &\longmapsto e^{-i\kappa_1} u, & c &\longmapsto e^{-i\kappa_2} c, \\ d &\longmapsto e^{-i\kappa_1} d, & s &\longmapsto e^{-i\kappa_2} s, \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il existe une symétrie $U(1)_i$ pour chaque génération i de quarks considérée. L'existence de ces symétries garantit l'absence de mélange à tous les ordres en théorie de la perturbation. On peut dès lors conclure qu'avec un seul doublet de Higgs, il est impossible qu'un mélange trivial génère un mélange non trivial par corrections radiatives, de même qu'il est impossible d'imaginer un angle de Cabibbo θ_C nul courir pour atteindre une valeur non nulle à basse énergie.

Le mélange (5.4) peut donc effectivement provenir de l'existence d'une symétrie horizontale, c'est-à-dire $U(1)_1 \otimes U(1)_2$, laquelle détermine trivialement l'angle de Cabibbo. Ajoutons que de ce point de vue, les deux symétries $U(1)_i$ sont équivalentes à n'importe quelle autre symétrie, pour autant que chaque génération de quarks soit rangée dans une représentation abélienne non triviale différente. Ce résultat est en accord avec le théorème de blocage démontré au chapitre 3 qui établit qu'il est impossible d'obtenir une détermination non triviale de l'angle de Cabibbo dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs à l'aide d'une symétrie horizontale [41]. C'est-à-dire que le théorème de blocage est non seulement retrouvé, mais il est en outre généralisé à tous les mécanismes possibles et imaginables destinés, sans augmenter le contenu en particules du Modèle Standard, à déterminer théoriquement l'angle de Cabibbo. En effet, le résultat obtenu au terme d'un calcul à l'ordre d'une boucle est indépendant du cadre théorique dans lequel on chercherait à déterminer l'angle de Cabibbo.

5.1.3 Remarque : deuxième approche

On peut aboutir au résultat précédent sans calculer l'expression exacte $\delta\theta_C$ de la partie divergente des corrections radiatives (à l'ordre d'une boucle) à l'angle de Cabibbo. On montre en annexe (page 101) qu'à l'ordre d'une boucle, les parties divergentes des corrections radiatives aux matrices de masse s'expriment²

$$\begin{aligned} M_u'' &= D_u + \epsilon [KD_d^2 K^\dagger D_u - D_u^3], \\ M_d'' &= D_d + \epsilon [K^\dagger D_u^2 K D_d - D_d^3], \end{aligned}$$

où M_u'' et M_d'' sont les matrices de masse corrigée³, et où $\epsilon = 3/(8v^2\pi^2) \ln \Lambda^2/\mu^2$. Dès lors, imposer l'annulation de la partie divergente des corrections à l'angle de Cabibbo revient à

²L'expression n'est vraie que dans la mesure où seules importent les corrections radiatives à l'angle de Cabibbo. C'est-à-dire qu'on a délibérément omis de calculer les corrections dues à l'échange d'un gluon, d'un photon, d'un Z^0 , ou même d'un W transverse, lesquelles n'affectent pas θ_C . Les détails du calcul sont présentés en annexe.

³On rappelle que

$$D_u = \begin{pmatrix} m_u & \\ & m_c \end{pmatrix}, \quad D_d = \begin{pmatrix} m_d & \\ & m_s \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

exiger que les vecteurs propres des matrices corrigées M_u'' et M_d'' soient parallèles⁴. Autrement dit, on demande que $M_u''M_u''^\dagger$ et $M_d''M_d''^\dagger$ soient simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'elles commutent. On a

$$\delta\theta_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [M_u''M_u''^\dagger, M_d''M_d''^\dagger] = 0.$$

Insérant dans le commutateur l'expression des matrices corrigées, on aboutit à la condition suivante :

$$\begin{aligned} & D_u^2 K^\dagger D_u^2 K D_d^2 - K^\dagger D_u^2 K D_d^2 D_u^2 + D_u^2 D_d^2 K^\dagger D_u^2 K + D_d^2 K^\dagger D_u^2 K D_u^2 \\ & + K D_d^2 K^\dagger D_u^2 D_d^2 - D_d^2 K D_d^2 K^\dagger D_u^2 + D_u^2 K D_d^2 K^\dagger D_d^2 - D_d^2 D_u^2 K D_d^2 K^\dagger = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Cette expression est matricielle. Cependant elle provient de l'annulation d'un commutateur. Et le commutateur de deux matrices hermitiennes est anti-hermitien. En outre, dans le Modèle Standard à deux générations, la matrice de mélange K est réelle. Dès lors le commutateur est anti-symétrique. Or une matrice anti-symétrique ne possède qu'un degré de liberté. Donc l'expression matricielle (5.6) se ramène à une expression scalaire (on choisit l'un des éléments non diagonaux de l'expression). On effectue les produits matriciels et on utilise (5.5) pour obtenir, enfin, une condition équivalente à l'annulation de (5.3) :

$$[(m_c^2 - m_u^2)^2(m_s^2 + m_d^2) + (m_s^2 - m_d^2)^2(m_c^2 + m_u^2)] \sin\theta_C \cos\theta_C = 0,$$

c'est-à-dire, pour autant que les masses soient non dégénérées, $\theta_C \in \{0, \pi/2\}$.

5.2 La matrice de Kobayashi-Maskawa

On considère le Modèle Standard à un doublet de Higgs et trois générations de fermions. Il est invariant sous les transformations locales du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (brisé spontanément en $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$). On étudie les conditions de calculabilité des paramètres de la matrice de Kobayashi-Maskawa. On cherche ensuite à identifier la symétrie responsable de cette éventuelle calculabilité.

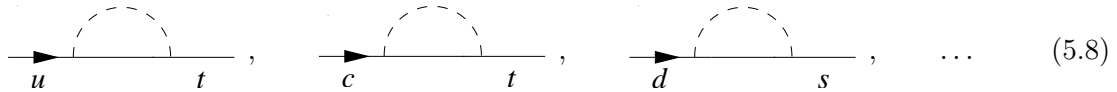
5.2.1 L'argument

Comme dans le Modèle Standard à deux générations, les paramètres $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et δ de la matrice de mélange mesurent les transitions possibles entre les quarks des trois générations. S'ils sont non nuls au *tree-level*, à l'ordre d'une boucle ces paramètres sont corrigés par les diagrammes du type :

$$\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow u \text{---} \text{---} \text{---} t \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \rightarrow c \text{---} \text{---} \text{---} t \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \rightarrow d \text{---} \text{---} \text{---} s \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}, \quad \dots \quad (5.7)$$

⁴En effet, la matrice de mélange corrigée est donnée par l'expression $K' = U_L'^\dagger K V_L'$ où U_L' et V_L' diagonalisent respectivement M_u'' et M_d'' . Imposer le parallélisme des vecteurs propres de M_u'' et M_d'' revient à demander que $U_L' = V_L'$. Et cette identité n'est équivalente à $K' = K$ que lorsque U_L' (ou V_L') et K commutent. En général, deux matrices unitaires 2×2 ne commutent pas (le groupe $U(2)$ n'est pas abélien). Cependant, on sait que K est orthogonale, et l'on peut se représenter que U_L' et V_L' le sont aussi dans la mesure où elles diagonalisent des matrices symétriques. Or le groupe $SO(2)$ des rotations dans le plan est abélien. On note que l'argument ne tient plus dans le Modèle Standard à n générations de quarks lorsque $n > 2$.

On cherche à déterminer ces paramètres de mélange tels qu'ils ne soient pas affectés par des corrections radiatives divergentes. Autrement dit, on veut annuler les contributions divergentes des corrections radiatives à θ_1 , θ_2 , θ_3 et δ , afin d'obtenir sur ces mêmes paramètres une contrainte qui puisse les déterminer. Si ces contributions divergentes sont nulles à tous les ordres en théorie de la perturbation, alors elles le sont nécessairement à l'ordre d'une boucle. On combine un ensemble de diagrammes de type (5.7) évalués à l'ordre d'une boucle, i.e.



$$\dots \quad (5.8)$$

et on calcule les contributions divergentes des corrections radiatives aux paramètres θ_1 , θ_2 , θ_3 et δ , à savoir $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$ et $\delta\delta$ (annexe C, page 109 – ces résultats ont été obtenus indépendamment par [77]). On observe que $\delta\delta$ est proportionnel à $\sin\delta$, et disparaît pour $\delta = 0$. Si la matrice de Kobayashi-Maskawa est réelle au *tree-level*, elle le reste donc bien à l'ordre d'une boucle. En outre, on note que l'annulation de deux angles, par exemple θ_1 et θ_2 , au *tree-level*, ramène l'expression des corrections au troisième angle à :

$$\delta\theta_3 = \epsilon \left[\frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} (m_d^2 - m_s^2) + \frac{m_s^2 + m_d^2}{m_s^2 - m_d^2} (m_u^2 - m_c^2) \right] s_3 c_3, \quad (5.9)$$

où $\epsilon = 3/(8v^2\pi^2) \ln \Lambda^2/\mu^2$. Il s'agit là de l'expression obtenue pour $\delta\theta_C$ dans le Modèle Standard à deux générations de fermions, comme le montre l'équation (5.3).

Annuler ces quatre expressions revient à résoudre un système de quatre équations $\{\delta\theta_1 = 0, \delta\theta_2 = 0, \delta\theta_3 = 0, \delta\delta = 0\}$ à quatre inconnues $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta\}$. Mais la complexité des équations rend la résolution fastidieuse, sinon impossible. Si l'on précise toutefois que les solutions attendues sont des nombres indépendants des rapports de masse, alors on conclut que les trois premières équations du système n'admettent pour solutions que des multiples entiers de $\pi/2$ (auquel cas la quatrième équation doit être abandonnée⁵). Il est aisé de s'en apercevoir : il suffit pour cela de considérer dans chaque équation du système les carrés des masses des quarks comme des vecteurs dont il faut annuler les coefficients. L'annulation de ces coefficients conduit immédiatement au mélange trivial $\{s_1c_1 = 0, s_2c_2 = 0, s_3c_3 = 0\}$.

Cependant, si l'on tolère l'apparition de rapports de masses dans l'expression des paramètres de mélange, le système ne peut être résolu aussi rapidement. Un traitement numérique partiel indique que les trois premières équations du système n'admettent à nouveau pour solutions que des multiples entiers de $\pi/2$, c'est-à-dire un mélange trivial. On dégage l'amorce d'une preuve analytique de ce résultat. On suppose que les masses sont non dégénérées. On peut dès lors affirmer, sans perte de généralité, que

$$m_u < m_c < m_t, \quad m_d < m_s < m_b.$$

⁵L'abandon de cette quatrième équation ne pose guère de problèmes dans la mesure où l'annulation d'un seul sinus ou cosinus dans la paramétrisation standard de la matrice de Kobayashi-Maskawa permet de se débarrasser de la phase par absorption dans les champs de quark. La matrice de Kobayashi-Maskawa devient réelle, et la quatrième équation ($\delta\delta = 0$) perd son sens.

On peut obtenir l'expression de la deuxième équation ($\delta\theta_2 = 0$) sous la forme :

$$\begin{aligned}
& s_2 c_2 \left[\underbrace{\left[\frac{m_b^2 + m_s^2}{m_b^2 - m_s^2} s_3^2 + \frac{m_b^2 + m_d^2}{m_b^2 - m_d^2} c_3^2 \right]}_{>1} \underbrace{[m_u^2 - m_c^2 s_1^2 - m_t^2 c_1^2]}_{<0} \right. \\
& \quad \left. - \underbrace{\left[\frac{m_t^2 + m_u^2}{m_t^2 - m_u^2} c_1^2 + \frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} s_1^2 \right]}_{>1} \underbrace{[-m_d^2 c_3^2 - m_s^2 s_3^2 + m_b^2]}_{>0} \right] \\
& + s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta \left[\underbrace{\left[\frac{m_b^2 + m_s^2}{m_b^2 - m_s^2} - \frac{m_b^2 + m_d^2}{m_b^2 - m_d^2} \right]}_{>0} \underbrace{(m_c^2 - m_t^2)}_{<0} \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\left[\frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} - \frac{m_t^2 + m_u^2}{m_t^2 - m_u^2} \right]}_{>0} \underbrace{(m_d^2 - m_s^2)}_{<0} \right] = 0, \tag{5.10}
\end{aligned}$$

i.e.

$$s_2 c_2 \underbrace{[\dots]}_{<0} + s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta \underbrace{[\dots]}_{<0} = 0.$$

Or, selon la paramétrisation standard de la matrice de Kobayashi-Maskawa, les trois angles prennent valeur dans le premier quadrant. Les sinus et les cosinus de ces angles sont donc positifs. S'il en allait de même pour la phase, on aurait

$$\begin{aligned}
s_2 c_2 &= 0, \\
s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta &= 0,
\end{aligned}$$

et, utilisant les équations restantes, on aboutirait probablement aux résultats triviaux soupçonnés. Cependant, la paramétrisation standard de la matrice de Kobayashi-Maskawa autorise la phase à prendre toute valeur comprise entre 0 et 2π . On ne peut donc rien conclure. Une analyse complète de ces quatre équations, pour autant qu'elle soit possible, conduirait à un résultat précis et déterminé quant à la valeur des angles et de la phase, dont il est vraisemblable qu'il sera conforme aux prédictions numériques. C'est-à-dire angles et phases triviaux, et donc absence de mélange. Si tel n'était pas le cas, les paramètres de mélange s'exprimeraient en fonction des rapports de masse des quarks. Or par construction, à l'ordre d'une boucle, les angles et la phase ainsi obtenus ne seraient pas affectés par des corrections radiatives divergentes. Donc il en irait de même pour leur expression en fonction des rapports de masse, ce qui paraît impossible puisque la renormalisation des rapports de masse n'a nulle part été prise en considération (or elle fait intervenir un nombre de diagrammes plus élevé que la renormalisation des paramètres de mélange). La prise en compte de la renormalisation des rapports de masse fera l'objet du chapitre suivant.

5.2.2 L'origine

Comme dans le cas à deux générations, le résultat obtenu est en accord avec le théorème démontré au chapitre 3, qui établit l'impossibilité d'obtenir une détermination non triviale des angles de mélange dans un modèle à un doublet de Higgs. L'absence de mélange peut être corrélée à l'existence d'une symétrie de type $U(1)$ pour chaque génération de quarks (ou à toute autre symétrie horizontale qui agirait sur chaque génération de quark dans une représentation abélienne non triviale différente). Cette symétrie garantit l'absence de mélange à tous les ordres en théorie de la perturbation. A nouveau, il convient de préciser que les conclusions relatives au résultat perturbatif obtenu dans cette section sont plus générales que celles du théorème de blocage démontré au chapitre 3 ; c'est-à-dire qu'elles s'étendent à tous les éventuels mécanismes permettant de déterminer les paramètres de mélange, et non seulement à l'usage des symétries horizontales.

5.2.3 Remarque : mélange radiatif

Un examen plus détaillé de l'expression (5.10) de la contribution divergente des corrections radiatives à l'un des angles de mélange, θ_2 par exemple, permet encore d'illustrer la puissance d'un calcul à l'ordre d'une boucle. La valeur mesurée de cet angle est proche de zéro : $\sin \theta_2 = 0,0029$ à $0,0043$. On imagine un modèle où cet angle, au *tree-level*, est naturellement nul (pour on ne sait quelle raison), et acquiert sa faible valeur par corrections radiatives⁶. S'il est naturellement nul, l'absence de contre-termes nécessite l'annulation des corrections radiatives divergentes. En particulier, à l'ordre d'une boucle, ces corrections doivent être finies. On note dans un premier temps que l'annulation naturelle de l'un des angles de mélange force l'orthogonalité de la matrice unitaire de Kobayashi-Maskawa, c'est-à-dire l'annulation de la phase δ . Donc dans ce cas : $\cos \delta = 1$. Il suffit ensuite d'observer que $\delta \theta_2$ ne s'annule pour $\sin \theta_2 = 0$ que lorsqu'au moins l'un des deux autres angles θ_1 ou θ_3 s'annule également. Autrement dit : l'annulation naturelle d'un des trois angles de mélange force l'annulation naturelle d'un deuxième angle de mélange, et l'on se retrouve en présence d'un mélange traditionnel, de type Cabibbo, entre deux générations, la troisième étant complètement découplée. Par exemple : $\sin \theta_2 = 0$ force $\sin \theta_1 = 0$ et seule demeure l'équation (5.9), laquelle fournit l'expression de la contribution divergente des corrections radiatives à l'angle (de Cabibbo) θ_3 qui mélange les deux premières générations. La troisième génération ne se mélange pas avec les deux autres. Du point de vue des symétries, ceci signifie que tout ce que l'on peut faire, c'est autoriser ou interdire l'existence d'un mélange entre deux générations, mais il est impossible de contraindre le mélange en annulant isolément l'un des angles θ_i .

⁶La proposition ne paraît pas absurde dans la mesure où l'annulation d'un seul angle ne supprime pas le mélange entre les générations auxquelles on associe cet angle (pour θ_2 , il s'agit de la première et de la troisième). Dès lors, si le mélange existe, il y a de bonnes raisons de croire qu'il sera modifié par corrections radiatives, générant *de facto* une valeur non nulle, finie, probablement petite, pour l'angle θ_2 .

Conclusion

On a déterminé les seules valeurs potentiellement calculables de l'angle de Cabibbo dans le Modèle Standard à deux générations de fermions et un doublet de Higgs. Ces valeurs correspondent à un mélange trivial et doivent être rejetées. La symétrie responsable de cette éventuelle calculabilité est horizontale. Son rôle se limitant à l'interdiction du mélange entre les générations 1 et 2, elle peut se ramener au groupe produit $U(1)_1 \otimes U(1)_2$. Ce résultat confirme le théorème de blocage démontré au chapitre 3, qui établit qu'il est impossible d'obtenir une détermination non triviale de l'angle de Cabibbo au sein du Modèle Standard à un doublet de Higgs [41].

On a généralisé ces résultats au Modèle Standard à trois générations de fermions et un doublet de Higgs : les seules valeurs potentiellement calculables des paramètres de la matrice de Kobayashi-Maskawa correspondent à un mélange trivial. Il est à nouveau possible d'associer à ce mélange une symétrie horizontale ($U(1)_1 \otimes U(1)_2 \otimes U(1)_3$ par exemple), et la thèse du théorème de blocage (chapitre 3) est confirmée [41]. En outre, on a montré qu'il est impossible d'annuler naturellement l'un des trois angles de mélange sans annuler du même coup au moins l'un des deux autres. La génération de l'un de ces (petits) angles par corrections radiatives est donc exclue.

Chapitre 6

Relations finies

Au chapitre précédent on a obtenu les conditions nécessaires de calculabilité des angles de mélange dans le Modèle Standard. On a vu que ces conditions sont incompatibles avec la réalité expérimentale. On souhaite maintenant obtenir les conditions nécessaires de naturalité d'une relation entre les angles de mélange et les rapports de masse des quarks. C'est-à-dire que dans le Modèle Standard à deux générations de fermions, on cherche à savoir s'il est possible d'établir une relation entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse. Cette relation est définie au *tree-level*. Pour être naturelle, elle doit demeurer valide à tous les ordres en théorie de la perturbation. On parle de *relation finie*. En particulier, elle doit demeurer valide à l'ordre d'une boucle (on parle de relation finie à l'ordre d'une boucle). On se propose de calculer les contributions divergentes des corrections radiatives à l'angle de Cabibbo et aux rapports de masse, à l'ordre d'une boucle, et de déterminer l'ensemble des relations valides à la fois au *tree-level* et à l'ordre d'une boucle. Toute relation naturelle entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse appartient nécessairement à cet ensemble.

La méthode utilisée est appelée méthode différentielle [68]. Afin de pouvoir généraliser le calcul au Modèle Standard à trois générations de fermions, on développe ensuite une méthode matricielle [78], plus puissante et d'une utilisation plus simple. Cette méthode repose sur le concept de stabilité sous corrections radiatives. Elle consiste à construire des paramètres stables à l'ordre d'une boucle dans le Modèle Standard. Une fois combinés entre eux, puisqu'ils dépendent des rapports de masse et des angles de mélange, ces paramètres donnent lieu à la formulation de plusieurs relations finies à l'ordre d'une boucle. La méthode conduit en outre à considérer le divorce entre stabilité et calculabilité en théorie des champs.

Après avoir défini l'extension minimale du Modèle Standard permettant de rendre compte des oscillations de neutrinos¹, on applique aux leptons le raisonnement développé dans le secteur des quarks. Enfin, par analogie avec le comportement de la charge électrique sous corrections radiatives, on introduit la notion d'universalité dans le secteur de Yukawa du Modèle Standard. Différentes relations finies à l'ordre d'une boucle sont alors formulées. Dans le seul secteur hadronique, une de ces relations conduit à la détermination du rapport m_u/m_d . L'existence des autres relations est conditionnée par le choix de l'extension du secteur leptonique. En l'absence de terme de Majorana pour les neutrinos droits, on aboutit à la détermination du spectre de masse des neutrinos, ainsi qu'à la formulation d'une solution simple et élégante pour le spectre des fermions du Modèle Standard [78].

¹C'est-à-dire l'ajout des trois neutrinos de chiralité droite au contenu fermionique, et le maintien de la symétrie globale responsable de la conservation du nombre leptonique.

6.1 Méthode différentielle

La méthode différentielle a déjà été utilisée pour déterminer l'ensemble des relations finies à l'ordre d'une boucle entre le rapport de masse et les constantes de couplage dans le modèle de Yukawa à deux fermions (chapitre 4, section 4.2). Il s'agit de postuler l'existence d'une relation arbitraire entre différents paramètres, et de soumettre cette relation aux corrections radiatives divergentes qui affectent les paramètres en question. La contrainte s'exprime sous la forme d'une (ou de plusieurs) équation(s) différentielle(s) [68].

6.1.1 Modèle à deux générations

Comme dans la section 5.1, on considère le Modèle Standard à un doublet de Higgs et deux générations de fermions. Il est invariant sous les transformations locales du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (brisé spontanément en $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$). On a montré page 33 que le secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard à deux générations compte cinq paramètres libres : les masses des quatre quarks et l'angle de Cabibbo. Si l'on se restreint aux rapports de masse pris entre deux quarks de même charge, il reste les trois paramètres $r_u \equiv m_u/m_c$, $r_d \equiv m_d/m_s$ et θ_C . On suppose l'existence *a priori* d'une relation entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse. En général, on a

$$F(\theta_C) = G(r_u, r_d), \quad (6.1)$$

de telle sorte que

$$F(\theta_C + \delta\theta_C) = G(r_u + \delta r_u, r_d + \delta r_d), \quad (6.2)$$

où $\delta\theta_C$, δr_u et δr_d sont les contributions divergentes des corrections radiatives à θ_C , r_u et r_d , respectivement. Donc

$$F_{|\theta_C} \delta\theta_C = G_{|r_u} \delta r_u + G_{|r_d} \delta r_d,$$

où $f_{|x}$ désigne la dérivée (partielle) de f par rapport à x . On montre en annexe (page 103) que

$$\begin{aligned} \delta r_u &= \epsilon r_u [(m_d^2 - m_s^2) \cos 2\theta_C - (m_u^2 - m_c^2)], \\ \delta r_d &= \epsilon r_d [(m_u^2 - m_c^2) \cos 2\theta_C - (m_d^2 - m_s^2)], \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\delta\theta_C = \epsilon \left[\frac{1+r_u^2}{1-r_u^2} (m_d^2 - m_s^2) + \frac{1+r_d^2}{1-r_d^2} (m_u^2 - m_c^2) \right] \sin\theta_C \cos\theta_C,$$

avec $\epsilon = 3/(8v^2\pi^2) \ln \Lambda^2/\mu^2$ où Λ est un *cut-off*, μ une échelle d'énergie arbitraire, et v la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire ϕ^0 avant brisure spontanée de la symétrie. On introduit ces expressions dans la condition (6.2) pour aboutir aux deux équations indépendantes

$$F_{|\theta_C} \sin\theta_C \cos\theta_C \frac{1+r_u^2}{1-r_u^2} = G_{|r_u} r_u \cos 2\theta_C - G_{|r_d} r_d, \quad (6.4)$$

$$F_{|\theta_C} \sin\theta_C \cos\theta_C \frac{1+r_d^2}{1-r_d^2} = G_{|r_d} r_d \cos 2\theta_C - G_{|r_u} r_u, \quad (6.5)$$

compatibles si et seulement si

$$\cos 2\theta_C = \frac{\frac{1-r_u^2}{1+r_u^2} r_d G_{|r_d} - \frac{1-r_d^2}{1+r_d^2} r_u G_{|r_u}}{\frac{1-r_u^2}{1+r_u^2} r_u G_{|r_u} - \frac{1-r_d^2}{1+r_d^2} r_d G_{|r_d}}. \quad (6.6)$$

Puisqu'elle exprime l'angle de Cabibbo en fonction des rapport de masse, cette condition doit correspondre à la relation (6.1) dont on a supposé l'existence, i.e.²

$$F(\theta_C) = \cos 2\theta_C, \quad (6.7)$$

$$G(r_u, r_d) = \frac{\frac{1-r_u^2}{1+r_u^2} r_d G_{r_d} - \frac{1-r_d^2}{1+r_d^2} r_u G_{r_u}}{\frac{1-r_u^2}{1+r_u^2} r_u G_{r_u} - \frac{1-r_d^2}{1+r_d^2} r_d G_{r_d}}. \quad (6.8)$$

Introduisant ces deux expressions dans les équations (6.4) et (6.5), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1+r_u^2}{1-r_u^2} G - r_u G_{r_u} + \frac{1+r_d^2}{1-r_d^2} G &= 0, \\ \frac{1+r_d^2}{1-r_d^2} G - r_d G_{r_d} + \frac{1+r_u^2}{1-r_u^2} G &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ce système d'équations différentielles ordinaires est intégrable. On montre dans la section E.1 que la solution générale s'écrit :

$$G(r_u, r_d) = \frac{-(1+r_u^2)(1+r_d^2) + 2\lambda r_u r_d}{(1-r_u^2)(1-r_d^2)},$$

où λ est une constante d'intégration insensible à la saveur. On conclut alors que, si une relation du type (6.1) existe, elle doit nécessairement appartenir à la classe suivante [68] :

$$\cos 2\theta_C = \frac{-(m_u^2 + m_c^2)(m_d^2 + m_s^2) + 2\lambda m_u m_c m_d m_s}{(m_u^2 - m_c^2)(m_d^2 - m_s^2)}. \quad (6.10)$$

L'objectif qui consistait à exprimer l'angle de Cabibbo en fonction des rapports de masse est atteint. On vérifie que la permutation $m_u \leftrightarrow m_c$ (ou $m_d \leftrightarrow m_s$) envoie l'angle de Cabibbo sur son complémentaire. La limite $m_u = m_c$ (ou $m_d = m_s$) est exclue depuis le départ dans la mesure où l'on ne peut calculer les corrections radiatives à l'angle de Cabibbo que s'il est parfaitement défini³. Cependant, cette relation dépend de la constante⁴ d'intégration λ . Celle-ci est inconnue et à l'ordre d'une boucle, rien ne nous permet de la déterminer. Il est dès lors impossible d'obtenir une prédiction numérique pour l'angle de Cabibbo.

²On vérifie que la part d'arbitraire qui réside dans ces identifications n'influence pas la forme de la solution escomptée. Imaginons, pour le montrer, que l'équation (6.7) s'exprime plutôt $f(F(\theta)) = \cos 2\theta$. On devrait alors remplacer G par $f(G)$ dans le membre de gauche de l'équation (6.8). Or le membre de droite de cette même équation est invariant sous le changement de variable $G \mapsto f(G)$. Dès lors, on peut résoudre l'équation (6.8) en la variable $f(G)$, identifiée ensuite à $f(F(\theta)) = \cos 2\theta$.

³L'angle de Cabibbo est indéterminé en cas de dégénérescence des masses.

⁴On note que cette constante doit être supérieure ou égale à 2 afin que $\cos 2\theta_C$ soit supérieur ou égal à -1 . En effet, si l'on inverse la relation (6.10), de telle sorte que λ s'exprime en fonction de l'angle θ_C et des rapports $r_u < 1$ et $r_d < 1$, on a :

$$\lambda = \frac{(1+r_u^2)(1+r_d^2) + (1-r_u^2)(1-r_d^2) \cos 2\theta_C}{2r_u r_d}, \quad (6.11)$$

et donc

$$\lambda \geq \frac{(1+r_u^2)(1+r_d^2) - (1-r_u^2)(1-r_d^2)}{2r_u r_d} = \frac{r_u^2 + r_d^2}{r_u r_d} \geq 2.$$

Le cas $\lambda = 2$ correspond donc au spectre de masse $r_u = r_d$ et au mélange trivial $\theta_C = \pi/2$.

Il découle en outre que l'éventualité que l'une des masses des quarks, en l'occurrence m_u , disparaisse doit être strictement rejetée puisqu'elle impliquerait l'apparition d'un cosinus inférieur à -1 . En d'autres termes, l'annulation de la masse m_u du quark up est strictement incompatible avec l'existence d'une relation naturelle entre l'angle de Cabibbo et le rapport de masse m_d/m_s . Ou encore, dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et deux générations de quarks, l'annulation, à tous les ordres en théorie de la perturbation, du paramètre θ_S à travers l'annulation de la masse m_u du quark up est strictement inconciliable avec l'existence d'une relation naturelle entre l'angle de Cabibbo et le rapport de masse m_d/m_s .

Dans la limite réaliste $m_u \ll m_c$ et $m_d \ll m_s$, la relation (6.10) entraîne :

$$\cos^2 \theta_C \simeq \lambda \frac{m_u m_d}{m_c m_s}, \quad (6.12)$$

et l'angle de Cabibbo ne correspond à sa valeur expérimental que si l'on attribue à λ une valeur suffisamment grande.

On a obtenu un ensemble infini de relations entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse des quarks, sans l'appoint explicite d'une symétrie supplémentaire. Les relations sont finies à l'ordre d'une boucle. L'ensemble est paramétré par une constante $\lambda \geq 2$ insensible à la saveur. Toute relation naturelle entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse des quarks appartient nécessairement à cet ensemble.

Pour tenter de comprendre le statut qu'il convient d'accorder à l'expression (6.10), ou, plus précisément, au système d'équations différentielles (6.9) dont l'expression (6.10) est la solution générale, on tâche d'établir un parallèle avec l'équation différentielle (4.16) de la section 4.2. Le système (6.9) comme l'équation (4.16) admet un ensemble infini de solutions. Pour le système, cette infinité tient à l'existence de la constante d'intégration λ . Pour l'équation aux dérivées partielles, l'infinité tient à l'existence d'une fonction d'intégration, que l'on n'a pas déterminée. Cependant, parmi les solutions de l'équation (4.16), il en existe une, la solution $r = g_1/g_2$, dont on a montré qu'elle peut être liée à la présence éventuelle d'une symétrie dissimulée, c'est-à-dire brisée spontanément, dans le modèle original. De même, on pourrait imaginer qu'un principe de nature symétrique puisse déterminer λ et du même coup sélectionner une relation particulière dans l'expression (6.10). Toutefois, on sait que les symétries horizontales sont exclues. En effet, on a montré au chapitre 3 qu'il est strictement impossible d'obtenir une détermination non triviale de l'angle de Cabibbo à l'aide d'une symétrie horizontale dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs [41, 42, 43, 40]. On tentera de situer l'origine potentielle de ces relations, ou de l'une d'entre elles, dans la suite du chapitre.

On note en outre qu'à l'ordre d'une boucle, les corrections radiatives à λ sont finies⁵ par construction. Ceci nous porte à développer une méthode différente pour la mise en évidence de relations finies entre les paramètres du secteur de Yukawa. Cette méthode, fondée sur la stabilité à l'ordre d'une boucle, est présentée dans la section suivante.

6.1.2 Modèle à trois générations

Pour ce qui est du Modèle Standard à trois générations, on remarque que les expressions (calculées en annexe, pages 108-109) des contributions divergentes des corrections radiatives

⁵Utilisant pour λ l'expression (6.11), on vérifie que les contributions divergentes $\delta\lambda$ des corrections radiatives à la constante d'intégration λ s'annulent :

$$\delta\lambda = \lambda_{\theta_C} \delta\theta_C + \lambda_{r_u} \delta r_u + \lambda_{r_d} \delta r_d = 0.$$

aux rapports de masse et aux angles de mélange sont trop complexes pour être manipulées et introduites dans un système d'équations différentielles aux dérivées partielles. On envisagera le traitement du modèle à trois générations par la méthode matricielle présentée ci-dessous.

6.2 Méthode matricielle

On considère le Modèle Standard à un doublet de Higgs et n générations de fermions. Il est invariant sous les transformations locales du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (brisé spontanément en $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$). Dans le secteur de Yukawa, on cherche à identifier des quantités physiques stables à l'ordre d'une boucle, c'est-à-dire des quantités auxquelles les corrections radiatives à l'ordre d'un boucle sont finies. On traite le cas général du modèle à n générations avant d'appliquer les résultats aux modèles à deux et à trois générations [78].

On reprend les expressions de la page 101 (annexe C) pour les matrices de masse corrigées à l'ordre d'une boucle. On a précisé page 99 que ces expressions ne tiennent compte ni des contributions dues à l'échange des photons, gluons et bosons vecteurs transverses Z et W , ni des diagrammes "têtard". Ces expressions ne sont donc vraies que dans la mesure où elles sont utilisées pour calculer les contributions divergentes des corrections radiatives aux angles de mélange et aux rapports de masse. Par souci de généralité, on souhaite toutefois réintroduire les contributions divergentes provenant des diagrammes omis, pour s'en débarrasser explicitement par la suite. A l'ordre d'une boucle, on aura donc⁶ :

$$\begin{aligned} M'_u &= M_u + \epsilon [M_d M_d^\dagger M_u - M_u M_u^\dagger M_d] + c_u M_u, \\ M'_d &= M_d + \epsilon [M_u M_u^\dagger M_d - M_d M_d^\dagger M_u] + c_d M_d, \end{aligned}$$

avec $\epsilon = 3/(8v^2\pi^2) \ln \Lambda^2/\mu^2$. Les constantes c_u et c_d sont scalaires dans l'espace des saveurs et tiennent compte des contributions électromagnétiques, faibles transverses et fortes, ainsi que des diagrammes "têtard". On réécrit avantageusement ces expressions :

$$\begin{aligned} M'_u &= [\mathbb{I} - \epsilon H + c_u] M_u, \\ M'_d &= [\mathbb{I} + \epsilon H + c_d] M_d, \end{aligned} \tag{6.13}$$

avec $H = M_u M_u^\dagger - M_d M_d^\dagger$. Cette réécriture nous permet d'affirmer qu'à un facteur scalaire près, les corrections radiatives à la quantité matricielle $M_d^\dagger M_u$ sont finies, i.e.

$$M_d'^\dagger M'_u = (1 + c_u + c_d) M_d^\dagger M_u.$$

Dans la base physique, on a :

$$M_d'^\dagger M'_u = V_R D_d V_L^\dagger U_L D_u U_R^\dagger,$$

où D_u et D_d sont les matrices de masse bidiagonalisées au *tree-level*, tandis que $U_{L,R}$ et $V_{L,R}$ sont les matrices unitaires qui bidiagonalisent M_u et M_d , respectivement. Afin de s'affranchir des matrices U_R et V_R de redéfinition des champs droits, on définit la matrice

$$A \equiv [M_d'^\dagger M'_u] [M_d^\dagger M_u]^\dagger = V_R [D_d K^\dagger D_u^2 K D_d] V_R^\dagger,$$

⁶On vérifie la forme de ces expressions en calculant les fonctions β des couplages de Yukawa dans le Modèle Standard [79, 80].

où $K = U_L^\dagger V_L$ est la matrice de mélange. On calcule les valeurs propres de la matrice A . Elles sont indépendantes de V_R . On se débarrasse enfin du facteur commun $(1 + c_u + c_d)$ qui distingue les valeurs propres de A' de celles de A en considérant ces valeurs propres en rapports. A partir de n valeurs propres, on construit $n - 1$ rapports indépendants. Dès lors, dans le Modèle Standard à n générations, il y a $n - 1$ paramètres auxquels les corrections radiatives à l'ordre d'une boucle sont finies. Tâchons de particulariser cette approche aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

6.2.1 Modèle à deux générations

On sait que l'ensemble des valeurs propres d'une matrice donnée correspond univoquement à l'ensemble des coefficients du polynôme caractéristique de cette matrice. Dès lors, au lieu d'extraire les valeurs propres de la matrice A on se contente de calculer les coefficients de son polynôme caractéristique. On les combine ensuite afin d'obtenir des quantités sans dimension. Dans le Modèle Standard à deux générations, au signe près, on a les coefficients

$$\begin{aligned} \det A &= \det D_d^2 \cdot \det D_u^2 \\ &= (m_d m_s m_u m_c)^2, \\ \text{tr } A &= \text{tr} [D_d^2 K^\dagger D_u^2 K] \\ &= (m_u^2 m_d^2 + m_c^2 m_s^2) \cos^2 \theta_C + (m_c^2 m_d^2 + m_u^2 m_s^2) \sin^2 \theta_C, \end{aligned}$$

A partir de ces deux quantités, on en construit une troisième qui n'est pas affectée par des corrections radiatives divergentes. A une fonction d'elle-même près, cette quantité est unique. On l'appelle λ et on l'exprime simplement :

$$\lambda = \frac{\text{tr } A}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ce qui entraîne [78] :

$$\lambda = \frac{(m_u^2 + m_c^2)(m_d^2 + m_s^2) + (m_u^2 - m_c^2)(m_d^2 - m_s^2) \cos 2\theta_C}{2 m_u m_c m_d m_s}. \quad (6.14)$$

Par construction, les contributions divergentes $\delta\lambda$ des corrections radiatives à λ s'annulent. Le paramètre λ de l'équation (6.14) est dit stable à l'ordre d'une boucle. Il correspond exactement à la constante d'intégration λ de l'expression (6.10) obtenue par la méthode différentielle. Ce qui n'a rien d'étonnant dans la mesure où comme on l'a souligné page 66, les corrections radiatives à cette constante d'intégration sont finies par construction. Il s'agit donc ici de repenser l'ensemble (6.10) des relations entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse finies à l'ordre d'une boucle comme la définition d'un paramètre physique λ qui à l'ordre d'une boucle, n'est affecté que par des corrections radiatives finies. De ce point de vue, les méthodes différentielle et matricielle sont équivalentes. L'approche matricielle permet cependant d'aboutir au résultat sans recourir à l'expression explicite de la matrice H intervenant dans l'équation (6.13). Autrement dit, quel que soit H , on a $\delta\lambda = 0$.

On note que dans l'approche matricielle, la condition $m_u \neq 0$ n'est plus une conséquence du développement mais une hypothèse de travail. Les conclusions demeurent toutefois identiques : l'annulation de la masse m_u du quark up est incompatible avec l'existence d'un paramètre stable dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et deux générations de quarks, c'est-à-dire, *in fine*, d'une relation naturelle entre l'angle de Cabibbo et le rapport de masse m_u/m_d .

6.2.2 Modèle à trois générations

De la matrice $A = V_R[D_d K^\dagger D_u^2 K D_d] V_R^\dagger$ on extrait les valeurs propres ou, à nouveau, les coefficients du polynôme caractéristique. Au signe près ces coefficients sont donnés par $\det A$, $\text{tr } A^c$ et $\text{tr } A$, où A^c est la matrice des cofacteurs de A . On remarque que, du point de vue des degré de liberté, puisque $A^{-1} = A^{cT}/\det A$, l'élément $\text{tr } A^c$ peut être remplacé par $\text{tr } A^{-1}$. On évalue ces trois éléments indépendants comme suit :

$$\begin{aligned} \det A &= \det D_d^2 \cdot \det D_u^2 \\ &= \prod_i m_{ui}^2 m_{di}^2, \\ \text{tr } A &= \text{tr } K^\dagger D_u^2 K D_d^2 \\ &= \sum_{i,j} m_{uj}^2 m_{di}^2 |K_{ji}|^2, \\ \text{tr } A^{-1} &= \text{tr } K^\dagger D_u^{-2} K D_d^{-2} \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{m_{uj}^2 m_{di}^2} |K_{ji}|^2. \end{aligned}$$

On les utilise pour construire deux – et seulement deux – paramètres stables :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \text{tr } A \cdot (\det A^{-1})^{\frac{1}{3}}, \\ \Lambda_2 &= \text{tr } A^{-1} \cdot (\det A)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

En termes des paramètres physiques – rapports de masse et entrées de la matrice de Kobayashi-Maskawa – on obtient [78] :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \left\{ \sum_{i,j} m_{ui}^2 m_{dj}^2 |K_{ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i \frac{1}{m_{ui}^2 m_{di}^2} \right\}^{\frac{1}{3}}, \\ \Lambda_2 &= \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{m_{ui}^2 m_{dj}^2} |K_{ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i m_{ui}^2 m_{di}^2 \right\}^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Tout comme pour λ dans le Modèle Standard à deux générations, à l'ordre d'une boucle les corrections radiatives à Λ_1 et à Λ_2 sont finies. On peut dès lors considérer ces deux dernières équations comme deux ensembles de relations finies à l'ordre d'une boucle entre les paramètres de la matrice de Kobayashi-Maskawa et les rapports de masse. Ces ensembles sont paramétrés par Λ_1 et Λ_2 .

On peut répéter la démarche précédente en imposant la condition $m_u = 0$. Puisque $\det A = 0$, la matrice A n'est plus inversible. Seuls les coefficients $\text{tr } A$ et $\text{tr } A^{cT}$ peuvent être considérés :

$$\begin{aligned} \text{tr } A &= \sum_{i,j} m_{uj}^2 m_{di}^2 |K_{ji}|^2, \\ \text{tr } A^{cT} &= \prod_i m_{ui}^2 m_{di}^2 \cdot \sum_{i,j} \frac{1}{m_{uj}^2 m_{di}^2} |K_{ji}|^2. \end{aligned}$$

On construit alors l'unique quantité stable à l'ordre d'une boucle⁷ :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{\text{tr } A}{(\text{tr } A^c T)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left\{ \sum_{i,j} m_u^2 m_d^2 |K_{ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i m_u^2 m_d^2 \cdot \sum_{i,j} \frac{1}{m_u^2 m_d^2} |K_{ij}|^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{m_c^2 (m_d^2 |K_{21}|^2 + m_s^2 |K_{22}|^2 + m_b^2 |K_{23}|^2) + m_t^2 (m_d^2 |K_{31}|^2 + m_s^2 |K_{32}|^2 + m_b^2 |K_{33}|^2)}{\{m_c^2 m_t^2 (m_s^2 m_b^2 |K_{11}|^2 + m_d^2 m_b^2 |K_{12}|^2 + m_d^2 m_s^2 |K_{13}|^2)\}^{1/2}} \\
&\simeq \left(\frac{m_t m_b}{m_c m_s} \cos^2 \theta_1 \right) \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3}.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne de cette expression, seuls les termes dominants ont été retenus. Si l'on revient au résultat (6.12), on remarque qu'à peu de choses près, Λ se ramène à l'expression de la constante λ obtenue dans le Modèle Standard à deux générations de fermions, où les deux générations sont cette fois la deuxième et la troisième. C'est-à-dire que l'annulation de la masse d'un quark d'une génération donnée dans le Modèle Standard à trois générations "tend" à réduire l'analyse à celle du Modèle Standard privé de cette même génération, i.e. le Modèle Standard à deux générations. Ceci n'est bien entendu qu'une "tendance", et l'on ne peut certainement pas conclure que l'annulation de la masse m_u du quark *up* soit incompatible avec l'existence d'une relation naturelle entre les paramètres de mélange (dont l'angle de Cabibbo) et les rapports de masse des autres quarks (dont le rapport m_d/m_s) ; seulement, l'influence du rapport m_d/m_s dans cette éventuelle relation serait marginale et négligeable.

6.3 Les leptons de Dirac

Jusqu'ici, seul le secteur hadronique du Modèle Standard a été étudié⁸. Or, outre les deux quarks, chaque génération de fermion compte deux leptons : un neutrino et un lepton chargé. On a :

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

A nouveau, comme dans le secteur hadronique du Modèle Standard, il existe une importante hiérarchie entre les masses des leptons chargés appartenant aux différentes générations. Ces masses sont connues avec une très grande précision. L'électron est le plus léger des trois leptons chargés, le muon est plus de deux cents fois plus lourd que l'électron, et le τ près de vingt fois plus lourd que le muon. A la masse du Z , on a le spectre [48] :

$$\begin{aligned}
m_e &= 0.48684727 \pm 0.00000014 \text{ MeV} , \\
m_\mu &= 102.75138 \pm 0.00033 \text{ MeV} , \\
m_\tau &= 1.74669^{+0.00030}_{-0.00027} \text{ GeV} .
\end{aligned}$$

⁷Cette quantité, Λ , peut s'exprimer à partir des deux quantités Λ_1 et Λ_2 définies au paragraphe précédent ; on vérifie effectivement que $\Lambda = \Lambda_1/\sqrt{\Lambda_2}$.

⁸Remarquons cependant qu'il a implicitement été tenu compte de l'existence des leptons à diverses reprises : ils interviennent dans le contenu fermionique des théories de grande unification et ils sont indispensables à la renormalisabilité du Modèle Standard (annulation de l'anomalie).

Les neutrinos sont des particules électriquement neutres et, dans le cadre du Modèle Standard, de masse nulle. En effet, en l'absence de neutrinos ν_R de chiralité droite, le lagrangien du secteur de Yukawa leptonique du Modèle Standard s'écrit

$$\mathcal{L}_Y = \bar{\Psi}_L \Gamma_d \ell_R \Phi + \text{h.c.}$$

Et la brisure spontanée de la symétrie génère un terme de masse pour les seuls leptons chargés⁹. Cependant, depuis quelques années, les évidences expérimentales de l'oscillation des neutrinos se sont multipliées. Or, pour être expliquées, les oscillations requièrent l'existence de neutrinos massifs.

Puisque les neutrinos sont des particules peu sensibles à la plupart des interactions connues, leur section efficace est petite et la mise en évidence des oscillations nécessite un dispositif expérimental vaste et coûteux. Les neutrinos provenant de la rencontre des rayons cosmiques avec l'atmosphère terrestre (neutrinos atmosphériques) ainsi que les neutrinos produits à l'intérieur de l'astre solaire (neutrinos solaires) sont interceptés à la surface de la terre. L'abondance observée des différents saveurs est alors confrontée aux prédictions des modèles théoriques de production des neutrinos (théorie du rayonnement cosmique et modèle standard du soleil). L'abondance relativement faible des neutrinos muoniques en provenance de l'atmosphère peut s'expliquer par un changement de saveur au cours du trajet qui les conduit des hautes couches de l'atmosphère terrestre à la surface de la terre, c'est-à-dire par l'existence d'oscillations entre les saveurs muonique et tauique. De même, le taux de neutrinos électroniques en provenance du soleil est inférieur au taux prédit par le modèle standard du soleil. Les contraintes expérimentales sont telles qu'à ce jour, l'hypothèse des oscillations reste de loin la plus plausible. La probabilité de transition entre un neutrino d'une saveur donnée vers un neutrino d'une autre saveur est fonction de la différence du carré de leurs masses et de l'angle de mélange associé à ces deux saveurs dans le Modèle Standard à deux générations de fermions. Pour les neutrinos atmosphériques, l'analyse des données expérimentales entraîne que [81, 82, 83]

$$\begin{aligned} \Delta m_{atm}^2 &\simeq 3,2 \cdot 10^{-3} \text{eV}^2, \\ \sin^2 2\theta_{atm} &\simeq 1. \end{aligned}$$

Quant aux neutrinos solaires, différents scénarios sont envisageables [84, 85]. On peut imputer le changement de saveur observé aux oscillations dans le vide (VO) entre le soleil et la terre ou aux oscillations dans la matière (MSW) entre l'endroit où ils sont produits et la surface du soleil. Aux oscillations dans la matière correspondent trois solutions : la solution *Large Mixing Angle* (LMA), la solution *Small Mixing Angle* (SMA), et la solution *Low probability* ou *Low mass* (LOW). Les paramètres associés à toutes ces solutions sont repris dans le tableau suivant (avec les masses données en eV) [86] :

	Δm_{sol}^2	$\tan^2 \theta_{sol}$
LMA	$5,0 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{-1}$
SMA	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$
LOW	$7,9 \cdot 10^{-8}$	$6,1 \cdot 10^{-1}$
VO	$4,6 \cdot 10^{-10}$	$1,8 \cdot 10^0$

⁹On note en outre l'absence de mélange dans le secteur des leptons : la matrice $V_{\ell L}$ de redéfinition des champs gauches des neutrinos peut être ajustée pour compenser l'effet de la matrice $U_{\ell L}$ de redéfinition des champs gauches des leptons chargés sur la matrice de mélange $K_\ell \equiv U_{\ell L}^\dagger V_{\ell L}$.

Notons que les résultats récents de la collaboration SNO tendent à favoriser la solution LMA [87, 88]. Les solutions LOW et VO demeurent permises (moins de trois écarts-type) et la solution SMA est exclue (plus de trois écarts-type).

L'extension minimale du Modèle Standard permettant de rendre compte de la présence de neutrinos massifs consiste à introduire les neutrinos de chiralité droites dans le contenu fermionique. On peut ensuite choisir de maintenir la symétrie globale responsable de la conservation du nombre leptonique afin d'interdire les termes de Majorana dans le lagrangien¹⁰. Ce choix est discutable¹¹. Mais pour pouvoir appliquer point par point la méthode développée en début de chapitre, il s'agit de s'assurer que le secteur leptonique du Modèle Standard soit une "copie parfaite" de son secteur hadronique. Précisons néanmoins que les résultats présentés dans cette section, c'est-à-dire les expressions (6.16) et (6.18), demeurent valables en présence de masses de Majorana pour autant que les masses $m_{\nu_\ell i}$ soient considérées comme les masses de Dirac des neutrinos correspondants.

6.3.1 Modèle à deux générations

On considère le Modèle Standard à deux générations de fermions et un doublet de Higgs. On étend le contenu fermionique aux champs ν_{eR} et $\nu_{\mu R}$. On maintient la symétrie globale responsable de la conservation du nombre leptonique. On peut alors reproduire pour les leptons le raisonnement détaillé dans la section 6.1 pour les quarks. En effet, ce raisonnement, qualifié de méthode différentielle, repose sur la seule structure du secteur de Yukawa du Modèle Standard. Or, après l'introduction des neutrinos droits dans le contenu fermionique, les secteurs de Yukawa leptonique et hadronique sont identiques. On conclut immédiatement que toute relation naturelle entre l'angle de mélange θ_ℓ et les rapports de masse des leptons appartient

¹⁰Pour une particule chargée, à laquelle est associée le spineur ψ , la seule combinaison quadratique invariante sous les transformations de Lorentz et sous les transformations (globales et locales) du groupe $U(1)_{em}$ est la combinaison $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$, où $\bar{\psi}$ est le spineur adjoint, et où $\psi_R = (1 + \gamma_5)/2\psi$ et $\psi_L = (1 - \gamma_5)/2\psi$. Le neutrino étant comme son nom l'indique électriquement neutre, il est possible de construire un terme quadratique (i.e. un terme de masse) invariant de Lorentz à partir des seules composantes gauches (L) et/ou à partir des seules composantes droites (R) du spineur et de son adjoint, à condition de faire intervenir le spineur "conjugué de charge" $\psi^c \equiv C\bar{\psi}^T$, où C est l'opérateur de conjugaison de charge. Il est en effet aisé de montrer que chacun des deux termes (dits termes de Majorana) du deuxième membre de

$$\bar{\psi}\psi^c = \bar{\psi}_L\psi_L^c + \bar{\psi}_R\psi_R^c$$

est un invariant de Lorentz (voir par exemple [89]). Cependant, puisque $\bar{\psi}$ et ψ^c se transforment de la même manière sous $U(1)_{em}$, le terme formé par leur produit n'est pas invariant sous les transformations de $U(1)_{em}$. Cette observation se généralise à toutes les symétries internes du modèle considéré : l'existence d'un terme de Majorana n'est envisageable que lorsque le champ concerné est rangé dans les représentations triviales (et alternées) des groupes internes du modèle, sauf si le groupe de symétrie est brisé spontanément, auquel cas le terme peut être construit à l'aide d'un couplage de Yukawa. Dans le Modèle Standard minimal, les termes de Majorana du type $\bar{\nu}_L\nu_L^c$ sont interdits même après brisure spontanée de la symétrie, parce que le secteur scalaire minimal ne contient pas de triplets, lesquels sont nécessaires à la construction d'un terme de Yukawa impliquant la combinaison $\bar{\nu}_L\nu_L^c$. Dans le Modèle Standard complété par des neutrinos droit, les termes de Majorana du type $\bar{\nu}_R\nu_R^c$ sont permis, le neutrino droit étant stérile, c'est-à-dire rangé dans les représentations triviales de tous les groupes de symétrie internes. Ces termes peuvent toutefois être interdits à l'aide, par exemple, du groupe de symétrie $U(1)_\ell$ qui garantit la conservation du nombre leptonique, dont aucune violation n'a, à ce jour, été observée.

¹¹En effet, il est généralement admis que la présence d'un terme de Majorana pour les neutrinos droits fournit une explication naturelle à la petitesse des masses des neutrinos observables à l'échelle d'énergie du Modèle Standard (voir par exemple [89]).

nécessairement à l'ensemble suivant :

$$\cos 2\theta_\ell = \frac{-(m_{\nu_e}^2 + m_{\nu_\mu}^2)(m_e^2 + m_\mu^2) + 2\lambda_\ell m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} m_e m_\mu}{(m_{\nu_e}^2 - m_{\nu_\mu}^2)(m_e^2 - m_\mu^2)}, \quad (6.16)$$

où λ_ℓ est à nouveau une constante d'intégration insensible à la saveur et plus grande ou égale à 2. Si $m_{\nu_e} \ll m_{\nu_\mu}$, alors on a la relation approximative

$$\cos^2 \theta_\ell \simeq \lambda_\ell \frac{m_{\nu_e} m_e}{m_{\nu_\mu} m_\mu} \quad (6.17)$$

analogue à l'équation (6.12). Si $m_{\nu_e} \gg m_{\nu_\mu}$, l'équation (6.17) reste valable pourvu que l'on permute les masses des neutrinos.

Quant à la méthode matricielle, comme pour le secteur des quarks, elle conduit à la mise en évidence d'un paramètre λ_ℓ stable à l'ordre d'une boucle, défini par la relation (6.16).

6.3.2 Modèle à trois générations

On considère le Modèle Standard à trois générations de fermions et un doublet de Higgs. On étend le contenu fermionique aux champs ν_{eR} , $\nu_{\mu R}$ et $\nu_{\tau R}$. On maintient la symétrie globale responsable de la conservation du nombre leptonique. Cette modification du secteur de Yukawa permet d'appliquer aux leptons la méthode matricielle développée dans la section 6.2. On montre l'existence de deux paramètres $\Lambda_{\ell 1}$ et $\Lambda_{\ell 2}$ stables à l'ordre d'une boucle :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\ell 1} &= \left\{ \sum_{i,j} m_{\nu_\ell i}^2 m_{\ell j}^2 |K_{\ell ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i \frac{1}{m_{\nu_\ell i}^2 m_{\ell i}^2} \right\}^{\frac{1}{3}}, \\ \Lambda_{\ell 2} &= \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{m_{\nu_\ell i}^2 m_{\ell j}^2} |K_{\ell ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i m_{\nu_\ell i}^2 m_{\ell i}^2 \right\}^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

où les indices i et j désignent la saveur. Les remarques, observations et discussions des deux premières sections de ce chapitre sont naturellement d'application dans le secteur des leptons.

6.4 Universalité

A l'ordre d'une boucle, on ne dispose d'aucun élément permettant de déterminer les paramètres $\lambda_{(\ell)}$ pour le modèle à deux générations, et $\Lambda_{(\ell)1}$ et $\Lambda_{(\ell)2}$ pour le modèle à trois générations. Cependant, ces paramètres sont stables à l'ordre d'une boucle.

En théorie des champs, un paramètre stable est généralement calculable. On se souvient de l'angle faible dans une théorie de grande unification (non brisée) de type $SU(5)$. Il est stable (à tous les ordres en théorie de la perturbation) et calculable. On a $\sin^2 \theta_W = 3/8$. La stabilité et la calculabilité sont garanties par l'unification des constantes de couplage g et g' , c'est-à-dire *in fine*, par la présence de la symétrie $SU(5)$. Il en va de même, par exemple, pour le paramètre ρ du Modèle Standard, défini par l'équation (2.17). Au *tree-level*, ρ est calculable et sa valeur est 1. Aux ordres suivants en théories de la perturbation, il est corrigé par des quantités finies et petites. Il s'agit donc bien d'un paramètre stable. La stabilité et la calculabilité sont dans ce cas garanties par la présence de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ brisée spontanément en $U(1)_{em}$. Même dissimulée, la symétrie demeure présente et protège les relations qui lui sont imputables.

On observe donc que stabilité et calculabilité vont généralement de paire, et qu'elles sont généralement liées à la présence d'une symétrie, qu'elle soit brisée spontanément ou non. Cependant, il existe en théorie des champs des cas où stabilité et calculabilité ne semblent pas s'associer. L'un d'entre eux concerne θ_S , l'angle fort introduit au chapitre 3, page 35. On peut effectivement montrer [90] que ce paramètre est stable jusqu'à l'ordre de six boucle au moins ! A ce jour, rien ne permet pourtant de le déterminer. Un deuxième exemple, que l'on se propose d'étudier en profondeur, est celui des rapports de charge.

6.4.1 Renormalisation de la charge

Afin d'illustrer la dissociation stabilité-calculabilité, on examine les processus de renormalisation de la charge dans différents modèles. On commence avec l'électrodynamique quantique dont on énonce le principe d'universalité de la charge ; on traite ensuite le modèle sigma linéaire et ses extensions ; on termine avec le Modèle Standard. L'objectif est de généraliser le principe d'universalité de la charge électrique à la charge de Yukawa.

L'électrodynamique quantique

On considère le lagrangien de l'électrodynamique quantique pour deux champs de matière ψ_a et ψ_b distincts, où a et b désignent n'importe quel fermion chargé (électron, quark, muon, ...). On a :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_a(i\not{\partial} - m_a)\psi_a + \bar{\psi}_b(i\not{\partial} - m_b)\psi_b - e_a\bar{\psi}_a\gamma^\mu\psi_a A_\mu - e_b\bar{\psi}_b\gamma^\mu\psi_b A_\mu,$$

avec en général $e_a \neq e_b$, puisque le groupe de symétrie $U(1)_{em}$ du lagrangien est abélien. La renormalisation des constantes de couplage se ramène aux expressions :

$$e'_a = \frac{Z_2^a Z_3^{\frac{1}{2}}}{Z_1^a} e_a \quad \text{et} \quad e'_b = \frac{Z_2^b Z_3^{\frac{1}{2}}}{Z_1^b} e_b,$$

où $Z_1^{a,b}$ renormalisent les vertex et $Z_2^{a,b}$ les champs $\psi_{a,b}$, tandis que Z_3 renormalise le champ A_μ . En général $Z_1^a \neq Z_1^b$ et $Z_2^a \neq Z_2^b$. Cependant, on montre en calculant les contributions divergentes des diagrammes



que $Z_1^a = Z_1^b$ et $Z_2^a = Z_2^b$ à l'ordre d'une boucle. On peut prouver que ces identités sont vraies à tous les ordres en théorie de la perturbation¹². Elles découlent des identités de Ward-Takahashi, qui elles-mêmes proviennent de la conservation du courant électromagnétique, c'est-à-dire de la symétrie $U(1)_{em}$ du lagrangien. Ceci signifie que les corrections radiatives au rapport $\Omega_{ab} \equiv e_a/e_b$ sont finies, i.e.

$$\Omega'_{ab} = \frac{e'_a}{e'_b} = \frac{Z_2^a Z_3^{\frac{1}{2}}}{Z_1^a} \cdot \frac{Z_1^b}{Z_2^b Z_3^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e_a}{e_b} = \frac{e_a}{e_b} = \Omega_{ab}.$$

¹²Voir par exemple [91].

Autrement dit, les rapports de charge Ω_{ab} sont stables. Et ils le sont à tous les ordres en théorie de la perturbation. On parle d'*universalité de la charge électrique* [91]. Cette propriété fondamentale de l'électrodynamique quantique, qui affirme donc que les charges électrique e_a des différents fermions sont renormalisées de la même manière, permet d'envisager l'égalité (à un facteur entier ou rationnel près) de ces charges, c'est-à-dire la *quantification de la charge électrique*. En d'autres termes, la stabilité des rapports de charge permet d'envisager leur calculabilité. Mais la stabilité n'établit pas la calculabilité. Il n'y a effectivement rien dans la théorie de l'électrodynamique quantique qui permette de déterminer ces rapports. On doit se contenter d'observer qu'ils sont entiers ou, pour le moins, rationnels (on a par exemple $\Omega_{uc} = \frac{2}{3}/\frac{2}{3} = 1$, $\Omega_{de} = \frac{-1}{3}/(-1) = \frac{1}{3}$, etc...) et présumer l'existence d'un principe sous-jacent, inconnu, qui les déterminerait¹³.

Le modèle sigma linéaire

On écrit le lagrangien (2.1) du modèle sigma linéaire non jaugé pour deux générations de fermions a et b . La matrice de Yukawa est diagonalisée : $\Gamma = \text{diag}\{g_a, g_b\}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \\ & + \bar{\Psi}_a i \not{\partial} \Psi_a + \bar{\Psi}_b i \not{\partial} \Psi_b - g_a \bar{\Psi}_a (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5) \Psi_a - g_b \bar{\Psi}_b (\sigma + i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi} \gamma_5) \Psi_b, \end{aligned}$$

avec en général¹⁴ $g_a \neq g_b$. On a choisi de considérer le modèle dans sa phase symétrique : à la différence du lagrangien (2.1), celui-ci n'entraîne pas la brisure spontanée de la symétrie puisque le terme de masse des scalaires est de signe négatif, et le potentiel scalaire est minimal en zéro. On renormalise les constantes de couplage (voir annexe D, page 111)

$$g'_a = \frac{Z_\Psi^a Z_\Phi^{\frac{1}{2}}}{Z_V^a} g_a \quad \text{et} \quad g'_b = \frac{Z_\Psi^b Z_\Phi^{\frac{1}{2}}}{Z_V^b} g_b,$$

où $Z_V^{a,b}$ renormalise les vertex de Yukawa et $Z_\Psi^{a,b}$ les champs $\Psi_{a,b}$, tandis que Z_Φ renormalise les champs σ et $\boldsymbol{\pi}$. A nouveau, comme en électrodynamique quantique, on a généralement $Z_V^a \neq Z_V^b$ et $Z_\Psi^a \neq Z_\Psi^b$. Cependant, on montre¹⁵ en calculant les contributions divergentes des

¹³Un certain nombre de propositions ont été avancées pour rétablir le lien entre universalité et quantification de la charge, c'est-à-dire entre stabilité et calculabilité des rapports de charge. Mais les tentatives de détermination des rapports de charge interfamiliaux (par exemple $\Omega_{e\mu}$) sont inexistantes.

Au sein du Modèle Standard, seul le postulat de l'annulation des différents termes anomaux permet d'aboutir à la détermination du contenu fermionique minimal [92], et donc à la détermination des rapports Ω_{ab} . Mais, s'il est nécessaire pour assurer la renormalisabilité du modèle, ce postulat lui est imposé *a posteriori*, sans aucune justification de nature symétrique (précisons que ce postulat n'entraîne la quantification de la charge électrique, c'est-à-dire la détermination des rapports Ω_{ab} , que si l'on prend soin de plonger l'électrodynamique quantique dans le Modèle Standard ; lorsqu'elle est considérée comme une théorie à part entière, isolée, l'électrodynamique quantique ne permet pas la détermination des rapports Ω_{ab}). En outre, ce postulat, valable séparément pour chacune des familles de fermions, ne donne pas lieu à la détermination des rapports de charge interfamiliaux.

Au-delà du Modèle Standard, les groupes de grande unification, tel $SU(5)$, fournissent une explication simple et élégante de la quantification de la charge à l'intérieur d'une génération donnée [70, 71]. Une fois plongé dans le groupe d'unification (non abélien et simple), tout groupe abélien voit sa propre constante de couplage figée et fixée par rapport à celles des autres composantes du groupe d'unification.

¹⁴Le groupe de symétrie du lagrangien n'est pas abélien, mais la symétrie est globale et le terme d'interaction considéré n'implique pas les courants de jauge ; les constantes de couplage sont donc généralement différentes.

¹⁵On trouve confirmation de ces résultats dans [93, 94].

diagrammes



qu'à l'ordre d'une boucle, $Z_V^a = Z_\Psi^a$ et $Z_V^b = Z_\Psi^b$ (annexe D, page 112). Ceci implique qu'à l'ordre d'une boucle, les corrections radiatives au rapport $\eta_{ab} \equiv g_a/g_b$ sont finies :

$$\eta'_{ab} = \frac{g'_a}{g'_b} = \frac{Z_\Psi^a Z_\Phi^{\frac{1}{2}}}{Z_V^a} \cdot \frac{Z_V^b}{Z_\Psi^b Z_\Phi^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{g_a}{g_b} = \frac{g_a}{g_b} = \eta_{ab}.$$

En d'autres termes, η_{ab} est un paramètre physique stable à l'ordre d'une boucle, mais non calculable. Toutefois, contrairement à ce que l'on a obtenu pour les rapports de charge Ω_{ab} en électrodynamique quantique, la stabilité à tous les ordres en théorie de la perturbation n'est pas garantie.

Ces résultats, comme tout ce qui a été obtenu jusqu'ici, concernent le comportement ultra-violet du modèle. On aurait pu les obtenir en effectuant les calculs dans la phase de Goldstone. C'est-à-dire en changeant le signe du terme de masse des scalaires dans le lagrangien de départ. Après brisure spontanée de la symétrie, les fermions acquièrent une masse $m_a = v g_a$ et $m_b = v g_b$ avec v la valeur dans le vide du champs scalaire. Remarquant que $\eta_{ab} \equiv g_a/g_b = m_a/m_b$, on montre immédiatement la stabilité à l'ordre d'une boucle des rapports de masse.

Le Modèle Standard sans mélange

Il se trouve que le modèle sigma linéaire ne correspond au secteur scalaire du Modèle Standard que lorsque l'on brise explicitement deux générateurs du groupe $SU(2)_R$. Pour le secteur de Yukawa (comme on l'a montré page 21), cela revient à procéder à la substitution suivante : $-g_y \bar{\Psi}_L \Sigma \Psi_R \rightarrow -g_d \bar{\Psi}_L \Phi d_R - g_u \bar{\Psi}_L \tilde{\Phi} d_R$. En termes du doublet scalaire $\Phi \equiv (\phi^+ \phi^0)^T$, le lagrangien du secteur scalaire du modèle sigma linéaire est donné par l'équation (2.21). Pour deux générations de quarks Ψ_{aL} , u_{aR} , d_{aR} et Ψ_{bL} , u_{bR} , d_{bR} , après la brisure explicite des générateurs $\tau_1/2$ et $\tau_2/2$ du groupe $SU(2)_R$ le lagrangien du modèle sigma linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 1/2 \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + \mu^2/2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda/4 (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ & + \bar{\Psi}_L i \not{\partial} \Psi_L + \bar{u}_R i \not{\partial} u_R + \bar{d}_R i \not{\partial} d_R \\ & - \bar{\Psi}_L \Gamma_u u_R \tilde{\Phi} - \bar{\Psi}_L \Gamma_d d_R \Phi - \tilde{\Phi}^\dagger \bar{u}_R \Gamma_u^\dagger \Psi_L - \Phi^\dagger \bar{d}_R \Gamma_d^\dagger \Psi_L, \end{aligned}$$

où les indices désignant les générations sont sous-entendus. Ce lagrangien correspond au lagrangien du Modèle Standard pour deux générations de quarks incolores, où la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ n'a été ni jaugée, ni brisée spontanément. Si l'on interdit les mélanges entre ces deux générations, à l'aide, par exemple, d'une symétrie de type $U(1)$ pour chaque génération, alors les couplages de Yukawa sont diagonaux dès le départ : $\Gamma_u = \text{diag}\{g_{ua}, g_{ub}\}$ et $\Gamma_d = \text{diag}\{g_{da}, g_{db}\}$. On peut montrer que dans ces conditions, la renormalisation des constantes de couplage g_{ua} et g_{da} pour la première génération, et g_{ub} et g_{db} pour la seconde

génération, se ramène aux expressions

$$g'_{ua} = \frac{Z_{\Psi_L}^{a\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{u_R}^{a\frac{1}{2}}}{Z_{V_u}^a} g_{ua}, \quad g'_{da} = \frac{Z_{\Psi_L}^{a\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{d_R}^{a\frac{1}{2}}}{Z_{V_d}^a} g_{da},$$

$$g'_{ub} = \frac{Z_{\Psi_L}^{b\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{u_R}^{b\frac{1}{2}}}{Z_{V_u}^b} g_{ub}, \quad g'_{db} = \frac{Z_{\Psi_L}^{b\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{d_R}^{b\frac{1}{2}}}{Z_{V_d}^b} g_{db},$$

Les constantes $Z_{\Psi_L}^{a,b}$, $Z_{u_R}^{a,b}$, $Z_{d_R}^{a,b}$, $Z_{V_u}^{a,b}$ et $Z_{V_d}^{a,b}$ renormalisent respectivement les champs $\Psi_{a,bL}$, $u_{a,bR}$, $d_{a,bR}$, et les vertex $\bar{u}_{a,bL} u_{a,bR} \phi^{0*}$ et $\bar{d}_{a,bL} d_{a,bR} \phi^0$, tandis que Z_{Φ} renormalise les champs scalaires (neutres). A l'ordre d'une boucle, on montre que les relations entre les constantes de renormalisation obtenues dans le modèle sigma linéaire deviennent :

$$Z_{V_u}^a \cdot Z_{V_d}^a = Z_{\Psi_L}^a \cdot Z_{u_R}^{a\frac{1}{2}} \cdot Z_{d_R}^{a\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad Z_{V_u}^b \cdot Z_{V_d}^b = Z_{\Psi_L}^b \cdot Z_{u_R}^{b\frac{1}{2}} \cdot Z_{d_R}^{b\frac{1}{2}}.$$

Dès lors les corrections radiatives au paramètre $\Upsilon_{ab} \equiv (g_{ua} \cdot g_{da}) / (g_{ub} \cdot g_{db})$ sont finies à l'ordre d'une boucle :

$$\begin{aligned} \Upsilon'_{ab} &= \frac{g'_{ua} \cdot g'_{da}}{g'_{ub} \cdot g'_{db}} \\ &= \frac{Z_{\Psi_L}^{a\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{u_R}^{a\frac{1}{2}}}{Z_{V_u}^a} \cdot \frac{Z_{\Psi_L}^{a\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{d_R}^{a\frac{1}{2}}}{Z_{V_d}^a} \cdot \frac{Z_{V_u}^b}{Z_{\Psi_L}^{b\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{u_R}^{b\frac{1}{2}}} \cdot \frac{Z_{V_d}^b}{Z_{\Psi_L}^{b\frac{1}{2}} Z_{\Phi}^{\frac{1}{2}} Z_{d_R}^{b\frac{1}{2}}} \cdot \frac{g_{ua} \cdot g_{da}}{g_{ub} \cdot g_{db}} \\ &= \frac{g_{ua} \cdot g_{da}}{g_{ub} \cdot g_{db}} \\ &= \Upsilon_{ab}. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que dans ce modèle, le rapport Υ_{ab} est un paramètre stable à l'ordre d'une boucle. Après brisure spontanée de la symétrie, les fermions des deux générations acquièrent une masse proportionnelle à la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire avant brisure. On a $m_{ua} = v g_{ua}$, $m_{da} = v g_{da}$, $m_{ub} = v g_{ub}$, et $m_{db} = v g_{db}$, ce qui implique la stabilité du rapport $\Upsilon_{ab} \equiv (g_{ua} \cdot g_{da}) / (g_{ub} \cdot g_{db}) = (m_{ua} \cdot m_{da}) / (m_{ub} \cdot g_{db})$ à l'ordre d'une boucle. Il s'agit de la généralisation de la stabilité des rapports de masse du modèle sigma linéaire au Modèle Standard sans mélange. Ces conclusions sont valables pour un modèle à n générations de quarks. Il y aurait alors $n - 1$ paramètres stables Υ_{ab} . On note que les rapports Υ_{ab} correspondent aux carrés des valeurs propres de la matrice $A = [\Gamma_d^\dagger \Gamma_u][\Gamma_d^\dagger \Gamma_u]^\dagger$. L'introduction de la couleur et des symétries de jauge dans le modèle ne modifie pas la stabilité des rapports Υ_{ab} .

Le Modèle Standard

La généralisation de ce raisonnement au Modèle Standard complet (i.e. sans restriction sur les mélanges interfamiliaux) à n générations de fermions implique l'utilisation des matrices de Yukawa Γ_u et Γ_d (ou, de manière équivalente, des matrices de masse M_u et M_d) qui ne sont cette fois plus ni diagonales ni réelles ou même hermitiennes. Il s'agit donc de traiter ces objets, qui ne commutent pas, dans le bon ordre. Le calcul complet, en termes des matrices M_u et M_d a été effectué en début de chapitre ; l'évaluation des diagrammes figure en annexe.

Ce calcul conduit à la mise en évidence de $n - 1$ paramètres stables à l'ordre d'une boucle. Ces paramètres sont les rapports des valeurs propres de la matrice $A = [M_d^\dagger M_u][M_d^\dagger M_u]^\dagger$. Dans le Modèle Standard à trois générations, on appelle ces deux rapports Θ_{12} et Θ_{23} . Il serait toutefois fastidieux d'en calculer l'expression exacte. Cependant, on sait que du point de vue des degrés de liberté et de la stabilité, les rapports Θ_{12} et Θ_{23} sont équivalents aux paramètres Λ_1 et Λ_2 définis section 6.2. On retombe donc sur les deux paramètres stables (à l'ordre d'une boucle) mais non calculables dont on cherchait à situer l'origine. Notons qu'à la différence des paramètres Υ_{12} et Υ_{23} du paragraphe précédent, les paramètres Θ_{12} et Θ_{23} font intervenir les angles de mélange.

6.4.2 Relation hadronique

On a vu que dans le Modèle Standard, les rapports de charge électrique sont stables. Il s'agit de l'universalité de la charge électrique. On observe en outre que si l'on rapporte la charge d'un quark d'une génération donnée à celle de son homologue dans une autre génération, on aboutit toujours à la même valeur : $\Omega_{12} = \Omega_{23}$, où¹⁶ $\Omega_{12} \equiv \Omega_{uc} = \Omega_{ds}$ et $\Omega_{23} \equiv \Omega_{ct} = \Omega_{sb}$.

La stabilité (à l'ordre d'une boucle) des rapports de masse dans le modèle sigma linéaire nous incite à établir le parallèle en postulant l'existence d'une identité analogue : $\eta_{12} = \eta_{23}$, où¹⁷ $\eta_{12} \equiv \eta_{uc} = \eta_{ds}$ et $\eta_{23} \equiv \eta_{ct} = \eta_{sb}$. On parle d'universalité de la masse. mais, même si elle est valide à l'ordre d'une boucle, cette relation n'a guère d'utilité pratique, puisque le modèle sigma linéaire n'est pas supposé rendre compte de la physique des particules élémentaires.

On vient toutefois de montrer que le Modèle Standard (qui est lui censé décrire la physique des particules élémentaires) a hérité des caractéristiques de stabilité du modèle sigma linéaire. On peut dès lors postuler l'existence de l'identité $\Theta_{12} = \Theta_{23}$ entre les deux paramètres stables (à l'ordre d'une boucle) du Modèle Standard, et la soumettre à vérification expérimentale. Or on prouve (annexe E, page 114) que les contraintes $\Theta_{12} = \Theta_{23}$ et $\Lambda_1 = \Lambda_2$ sont équivalentes. On impose alors

$$\boxed{\Lambda_1 = \Lambda_2}.$$

On a [78]

$$\left\{ \sum_{i,j} m_{ui}^2 m_{dj}^2 |K_{ij}|^2 \right\} = \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{m_{ui}^2 m_{dj}^2} |K_{ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i m_{ui}^2 m_{di}^2 \right\}^{\frac{2}{3}}. \quad (6.19)$$

Cette relation est finie à l'ordre d'une boucle et ne s'exprime plus qu'en termes de quantités physiques "mesurables". En tenant compte de l'importante hiérarchie caractérisant les masses et les angles de mélange, on aboutit à l'expression approchée :

$$\frac{m_u}{m_c} \cdot \frac{m_d}{m_s} \simeq \frac{m_c}{m_t} \cdot \frac{m_s}{m_b}, \quad (6.20)$$

où les angles de mélange n'interviennent plus. Afin de pouvoir la confronter aux données expérimentales, on la réorganise en termes des rapports de masse les mieux connus, avec dans

¹⁶Les égalités entre e_u/e_c et e_d/e_s et entre e_c/e_t et e_s/e_b sont immédiates dans la mesure où les quarks de type *up* et les quarks de type *down* sont, par génération, rangés dans des doublets de $SU(2)_L$.

¹⁷Les égalités entre m_u/m_c et m_d/m_s et entre m_c/m_t et m_s/m_b sont immédiates et proviennent de la structure du contenu en particules du modèle sigma linéaire ($m_u = m_d$, $m_c = m_s$ et $m_t = m_b$).

le membre de gauche les rapports de masse des quarks légers, et dans le membre de droite les rapports de masse des quarks lourds :

$$\frac{m_u}{m_d} \cdot \left(\frac{m_d}{m_s}\right)^2 \simeq \left(\frac{m_c}{m_b}\right)^2 \cdot \frac{m_b}{m_t}. \quad (6.21)$$

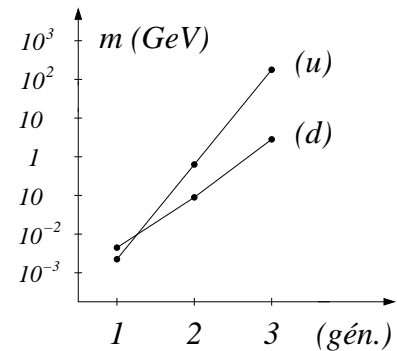
La masse des quarks lourds (c , b et t) est estimée avec une précision relativement bonne. On peut donc supposer que les rapports de masse héritent de cette précision. Pour ce qui touche aux quarks légers, s'il est généralement admis que la valeur du rapport m_d/m_s avoisine le vingtième, celle du rapport m_u/m_d fait aujourd'hui encore l'objet d'intenses discussions [48]. On choisit donc de prendre le rapport m_u/m_d pour inconnue, et d'en estimer la valeur à partir de l'équation (6.21). A la masse du Z , si l'on considère les valeurs centrales des masses des quarks lourds et du rapport m_d/m_s , on a :

$$\frac{m_u}{m_d} \simeq \frac{1}{3}. \quad (6.22)$$

Le premier élément remarquable de cette prédiction est la relation d'ordre $m_u/m_d < 1$, c'est-à-dire $m_u < m_d$. Rappelons que cette relation d'ordre (singulière dans la mesure où $m_t > m_b$ et $m_c > m_s$) est d'une importance capitale pour l'existence et la stabilité de la matière atomique telle qu'elle nous environne (et nous constitue). On sait en effet qu'elle est à l'origine de la relation d'ordre $m_P < m_N$, elle-même à l'origine de l'instabilité du neutron (désintégration $\beta : N \rightarrow P e^- \nu_e$) et de la stabilité du proton. L'instabilité du proton qui résulterait d'une inversion de la relation $m_P < m_N$, i.e. de la relation $m_u < m_d$, entraînerait l'instabilité de l'atome d'hydrogène (lequel constitue la majeure partie de la matière de notre univers). On note en outre que la valeur prédite pour le rapport m_u/m_d ne s'éloigne guère de la valeur expérimentale (théorie chirale) $m_u/m_d \simeq 1/2$ [48], d'autant moins que certaines estimations récentes donnent lieu aux résultats $m_u/m_d \simeq 1/2,5$ [95], voire $m_u/m_d \simeq 1/3,5$ [96].

Si l'on revient un instant à l'expression originale (6.20) et que l'on trace, ci-dessous, le graphe des masses des quarks classés par génération, on constate effectivement que le produit des pentes des segments qui relient les points correspondant aux quarks des deux premières générations et le produit des pentes des segments qui relient les points correspondant aux quarks de la deuxième et de la troisième génération sont approximativement égaux.

Grappe logarithmique des masses des quarks classés par génération. Le logarithme (en base dix) de la masse des quarks pour les trois générations existantes est porté en ordonnée. Les pentes des quatre segments représentés correspondent aux quatre rapports intervenant dans l'expression (6.20). On vérifie que cette expression est approximativement satisfaite. On constate en outre que ce graphe, qui reprend des données expérimentales, est pratiquement compatible avec le graphe de deux droites sécantes, i.e., avec les identités approximatives $m_u/m_c \simeq m_c/m_t$ et $m_d/m_s \simeq m_s/m_b$.



On en conclut que la relation (6.19), finie à l'ordre d'une boucle et établie sur base d'un principe d'universalité, conduit à l'expression d'une contrainte phénoménologique qui semble effectivement correspondre à la réalité expérimentale.

6.4.3 Relation leptonique

Le raisonnement précédent est évidemment applicable au secteur des leptons¹⁸. On identifie les paramètres stables (à l'ordre d'une boucle) :

$$\boxed{\Lambda_{\ell 1} = \Lambda_{\ell 2}},$$

pour obtenir une relation finie à l'ordre d'une boucle et n'impliquant que des quantités physiques "mesurables" :

$$\left\{ \sum_{i,j} m_{\nu_\ell i}^2 m_{\ell j}^2 |K_{\ell ij}|^2 \right\} = \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{m_{\nu_\ell i}^2 m_{\ell j}^2} |K_{\ell ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i m_{\nu_\ell i}^2 m_{\ell i}^2 \right\}^{\frac{2}{3}}. \quad (6.23)$$

Si l'on suppose en outre que les couplages de Yukawa des neutrinos, une fois diagonaux, ont le même type de hiérarchie que les couplages de Yukawa des autres fermions ($m_{\nu_\tau} \gg m_{\nu_\mu} \gg m_{\nu_e}$), et que les éléments diagonaux de la matrice de mélange K_ℓ des leptons sont d'ordre 1, alors on peut approcher la relation (6.23) :

$$\frac{m_{\nu_e}}{m_{\nu_\mu}} \cdot \frac{m_e}{m_\mu} \simeq \frac{m_{\nu_\mu}}{m_{\nu_\tau}} \cdot \frac{m_\mu}{m_\tau}. \quad (6.24)$$

On utilise les données provenant de l'observation des oscillations de neutrinos, à savoir Δm_{atm}^2 et Δm_{sol}^2 , que l'on identifie respectivement à $m_{\nu_\tau}^2 - m_{\nu_\mu}^2 \simeq m_{\nu_\tau}^2$ et $m_{\nu_\mu}^2 - m_{\nu_e}^2 \simeq m_{\nu_\mu}^2$, et à partir des trois équations

$$\begin{aligned} m_{\nu_\tau}^{exp} &\simeq \sqrt{\Delta m_{atm}^2}, \\ m_{\nu_\mu}^{exp} &\simeq \sqrt{\Delta m_{sol}^2}, \\ m_{\nu_e}^{th} &\simeq \frac{m_\mu/m_\tau}{m_e/m_\mu} \cdot \Delta m_{sol}^2 / \sqrt{\Delta m_{atm}^2}, \end{aligned}$$

on établit le spectre de masse des neutrinos en fonction des solutions choisies pour les neutrinos solaires (en eV) :

	$m_{\nu_\tau}^{exp}$	$m_{\nu_\mu}^{exp}$	$m_{\nu_e}^{th}$
LMA	$6 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$
SMA	$6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
LOW	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$
VO	$6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$

On voit que les solutions LMA et SMA sont pas compatibles avec l'hypothèse de hiérarchie $m_{\nu_\mu} \gg m_{\nu_e}$ et doivent être rejetées. L'incompatibilité réside dans la trop grande valeur du rapport m_{ν_μ}/m_{ν_τ} , laquelle, une fois multipliée par le rapport m_μ/m_τ , pousse le rapport m_{ν_e}/m_{ν_μ} proche de l'unité dans l'expression (6.24). Il reste donc les solutions LOW et VO.

¹⁸Répetons que les arguments développés ci-dessous, et ce jusqu'à la fin du chapitre, ne sont valides qu'en l'absence de termes de Majorana dans le lagrangien du Modèle Standard.

6.4.4 Relations mixtes

Si l'on revient à la question de l'universalité de la charge électrique, on observe que les rapports de charge hadroniques Ω_{12} et Ω_{23} sont identiques aux rapports de charge leptoniques $\Omega_{\ell 12}$ et $\Omega_{\ell 23}$ (où $\Omega_{\ell 12} \equiv \Omega_{e\mu}$ et $\Omega_{\ell 23} \equiv \Omega_{\mu\tau}$). On tâche d'exporter cette universalité quark-lepton dans le secteur de Yukawa en analysant les relations finies (à l'ordre d'une boucle) qui découlent de l'identification des paramètres stables (à l'ordre d'une boucle) hadroniques et leptoniques. Rappelons que dans les théories de grande unification, $SU(5)$ par exemple, il existe déjà un certain type d'universalité quark-lepton, laquelle se manifeste à travers la stabilité des rapports de masse m_e/m_d , m_μ/m_s et m_τ/m_b , et leur calculabilité : $m_e/m_d = m_\mu/m_s = m_\tau/m_b = 1$ (chapitre 4, 49).

Modèle à deux générations

On sait qu'à l'ordre d'une boucle, il est impossible de déterminer les constantes d'intégration λ et λ_ℓ apparaissant dans l'expression des relations (6.10) et (6.16). Cependant, notant qu'elles sont toutes deux sans dimension et insensibles à la saveur, on suppose l'existence d'une universalité quarks-leptons telle que

$$\boxed{\lambda = \lambda_\ell}.$$

En combinant alors les équations (6.10) et (6.16) en termes des rapports de masse r_u , r_d , $r_\nu \equiv m_{\nu_e}/m_{\nu_\mu}$ et $r_\ell \equiv m_e/m_\mu$, on aboutit à la relation [68]

$$\frac{(1 + r_\nu^2)(1 + r_\ell^2) + (1 - r_\nu^2)(1 - r_\ell^2) \cos 2\theta_\ell}{(1 + r_u^2)(1 + r_d^2) + (1 - r_u^2)(1 - r_d^2) \cos 2\theta_C} = \frac{r_\nu r_\ell}{r_u r_d}, \quad (6.25)$$

qui est dite *mixte* parce qu'elle fait intervenir des paramètres des secteurs hadronique et leptonique. Cette relation est finie à l'ordre d'une boucle et n'implique plus que des quantités physiques "mesurables". Dans la limite $r_u \ll 1$, $r_d \ll 1$, $r_\nu \ll 1$ et $r_\ell \ll 1$, on a

$$\frac{\cos^2 \theta_\ell}{\cos^2 \theta_C} \simeq \frac{r_\nu r_\ell}{r_u r_d}. \quad (6.26)$$

Si l'on suppose que les deux cosinus carrés de l'équation (6.26) sont du même ordre, c'est-à-dire $\cos^2 \theta_\ell / \cos^2 \theta_C \sim O(1)$, alors, à partir de la différence Δm_{sol}^2 des carrés des masses provenant des observations de l'oscillation des neutrinos solaires que l'on identifie à $m_{\nu_\mu}^2 - m_{\nu_e}^2 \simeq m_{\nu_\mu}^2$, on peut calculer le spectre de masse des neutrinos ν_μ et ν_e . A l'aide des expressions

$$m_{\nu_\mu}^{exp} \simeq \sqrt{\Delta m_{sol}^2},$$

$$m_{\nu_e}^{th} \simeq \frac{m_u m_d}{m_c m_s} \cdot \frac{m_\mu}{m_e} \cdot \sqrt{\Delta m_{sol}^2},$$

on dresse le tableau des spectres associés aux différentes solutions solaires (en eV) :

	$m_{\nu_\mu}^{exp}$	$m_{\nu_e}^{th}$
LMA	$7 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
SMA	$2 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
LOW	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$
VO	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-7}$

Choisissant d'appliquer la relation (6.25), finie à l'ordre d'une boucle, aux fermions de la deuxième et de la troisième génération, c'est-à-dire en redéfinissant $r_u \equiv m_c/m_t$, $r_d \equiv m_s/m_b$, $r_\nu \equiv m_{\nu_\mu}/m_{\nu_\tau}$ et $r_\ell \equiv m_\mu/m_\tau$, on obtient de la même manière le spectre de masse des neutrinos ν_τ et ν_μ . Or, sous l'hypothèse de hiérarchie forte, ce spectre est expérimentalement établi. Il suffit en effet d'identifier respectivement les différences de carré de masses Δm_{atm}^2 et Δm_{sol}^2 à $m_{\nu_\tau}^2 - m_{\nu_\mu}^2 \simeq m_{\nu_\tau}^2$ et $m_{\nu_\mu}^2 - m_{\nu_e}^2 \simeq m_{\nu_\mu}^2$. On dispose dès lors d'un outil expérimental pour la vérification de la relation (6.25), ou, inversement, d'un outil de sélection théorique pour les solutions solaires. A l'aide des équations

$$\begin{aligned} m_{\nu_\tau}^{exp} &\simeq \sqrt{\Delta m_{atm}^2}, \\ m_{\nu_\mu}^{exp} &\simeq \sqrt{\Delta m_{sol}^2}, \\ m_{\nu_\mu}^{th} &\simeq \frac{m_c m_s}{m_t m_b} \cdot \frac{m_\tau}{m_\mu} \cdot \sqrt{\Delta m_{atm}^2}, \end{aligned}$$

on dresse le tableau des spectres de masse expérimentaux associés aux différentes solutions solaires, comparés à la prédiction théorique pour la masse du neutrino ν_μ (en eV) :

	$m_{\nu_\tau}^{exp}$	$m_{\nu_\mu}^{exp}$	$m_{\nu_\mu}^{th}$
LMA	$6 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
SMA	$6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
LOW	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
VO	$6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$

En termes d'ordres de grandeur, la conclusion est immédiate : la relation (6.25), finie à l'ordre d'une boucle, est expérimentalement vérifiée lorsqu'elle est appliquée à la deuxième et à la troisième génération de fermions, pour autant que les observations à venir favorisent la solution LOW pour l'oscillation des neutrinos solaires¹⁹. Eventuellement, si l'on considère le spectre de masse des quarks utilisé suffisamment raisonnable, on s'attendrait en outre à voir la quantité Δm_{atm}^2 augmenter légèrement, ou la quantité Δm_{sol}^2 diminuer légèrement. Lorsqu'elle est appliquée à la première et à la deuxième génération, la relation (6.25) conduit à la détermination de la masse du neutrino électronique. On aurait donc pour les neutrinos un spectre de masse du type :

$$m_{\nu_\tau} \sim 10^{-1} \text{eV} \quad \underbrace{\gg}_{\frac{m_t m_b m_\mu}{m_c m_s m_\tau} \simeq 500} \quad m_{\nu_\mu} \sim 10^{-4} \text{eV} \quad \underbrace{\gg}_{\frac{m_c m_s m_e}{m_u m_d m_\mu} \simeq 30} \quad m_{\nu_e} \sim 10^{-5} \text{eV}.$$

Modèle à trois générations

Comme dans le Modèle Standard à deux générations de fermions, on souhaite étudier les conséquences phénoménologique d'une éventuelle universalité quark-lepton : il s'agit d'identifier les paramètres stables (à l'ordre d'une boucle) Θ_{ij} aux paramètres stables (à l'ordre d'une boucle) $\Theta_{\ell ij}$. Or on sait (annexe E, page 114) que

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= \Theta_{\ell 12} \\ \parallel &\quad \parallel \\ \Theta_{23} &= \Theta_{\ell 23} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \Lambda_1 &= \Lambda_{\ell 1} \\ \parallel &\quad \parallel \\ \Lambda_2 &= \Lambda_{\ell 2} \end{aligned}}.$$

¹⁹La solution VO ne paraît pas exclue. Notons cependant que les estimations de la valeur du paramètre Δm_{sol}^2 associé à la solution VO sont généralement plus basses (on a $\Delta m_{sol}^2 = 1,6 \cdot 10^{-10}$ eV dans [97], et $\Delta m_{sol}^2 = 8 \cdot 10^{-11}$ eV dans [98]) et sont donc de nature à l'exclure.

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\left\{ \sum_{i,j} m_{u_i}^2 m_{d_j}^2 |K_{ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i \frac{1}{m_{u_i}^2 m_{d_i}^2} \right\}^{\frac{1}{3}} &= \left\{ \sum_{i,j} m_{\nu_{\ell i}}^2 m_{\ell j}^2 |K_{\ell ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i \frac{1}{m_{\nu_{\ell i}}^2 m_{\ell i}^2} \right\}^{\frac{1}{3}} \\
\parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\
\left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{m_{u_i}^2 m_{d_j}^2} |K_{ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i m_{u_i}^2 m_{d_i}^2 \right\}^{\frac{1}{3}} &= \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{m_{\nu_{\ell i}}^2 m_{\ell j}^2} |K_{\ell ij}|^2 \right\} \cdot \left\{ \prod_i m_{\nu_{\ell i}}^2 m_{\ell i}^2 \right\}^{\frac{1}{3}}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Ces relations, dites mixtes parce qu'elles font intervenir les paramètres des secteurs hadronique et leptonique, sont finies à l'ordre d'une boucle. Approximativement, si l'on considère un secteur de Yukawa fortement hiérarchisé ($m_1 \ll m_2 \ll m_3$) et faiblement mélangé ($K^{(\ell)} \simeq \mathbb{I}$), on a

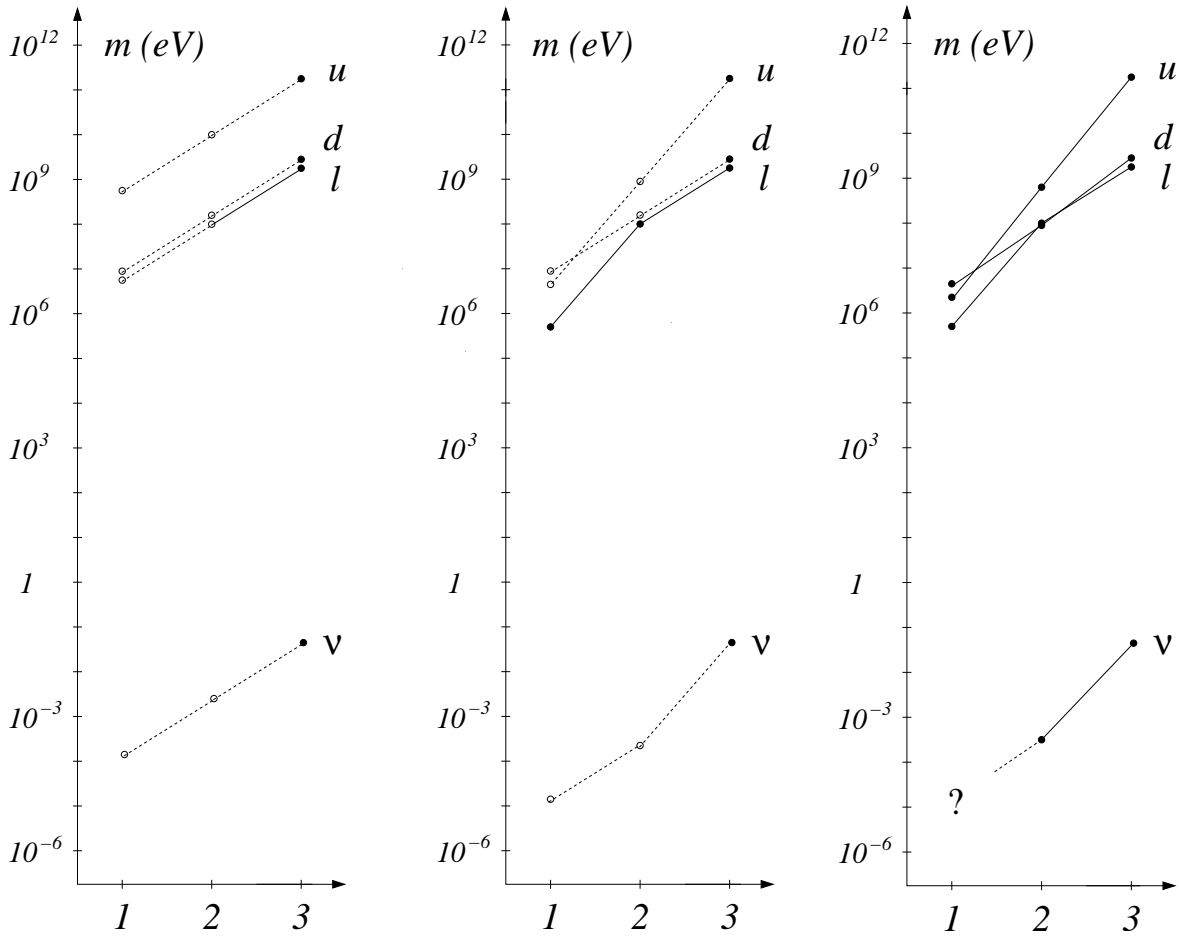
$$\frac{m_u}{m_c} \cdot \frac{m_d}{m_s} \simeq \frac{m_c}{m_t} \cdot \frac{m_s}{m_b} \simeq \frac{m_{\nu_e}}{m_{\nu_\mu}} \cdot \frac{m_e}{m_\mu} \simeq \frac{m_{\nu_\mu}}{m_{\nu_\tau}} \cdot \frac{m_\mu}{m_\tau} . \tag{6.28}$$

Les deux identités verticales de l'expression (6.27) ont déjà été traitées. Les deux identités horizontales correspondent à la deuxième identité approximative de l'expression (6.28). Comme dans le paragraphe précédent, on montre aisément que cette identification peut être expérimentalement confirmée si l'on sélectionne la solution LOW pour les neutrinos solaires.

L'expression (6.28) nous dit que le produit du rapport de masse des quarks de type *up* appartenant à deux générations voisines (1–2 ou 2–3) et du rapport de masse des quarks de type *down* appartenant à ces deux mêmes générations est approximativement identique quelles que soient les deux générations voisines concernées, et il est au surplus identique au produit du rapport de masse des neutrinos appartenant à deux générations voisines et du rapport de masse des leptons chargés appartenant à ces deux mêmes générations voisines, quelles que soient les deux générations voisines concernées.

A chaque solution de l'équation (6.28) on peut associer un spectre de masse. On tâche d'analyser ces différents spectres à partir de la solution triviale $m_u/m_c = m_c/m_t = m_d/m_s = m_s/m_b = m_e/m_\mu = m_\mu/m_\tau = \dots$ que l'on complique ensuite en fonction des contraintes expérimentales les plus fiables. Cette solution triviale correspond à la figure présentée ci-dessous, à l'extrême gauche, où les pentes de tous les segments tracés entre les masses des fermions sont égales. Elle n'est pas réaliste dans la mesure où les rapports de masse des leptons chargés, connus avec une précision considérable, diffèrent d'un ordre de grandeur. En effet, à la masse du Z on a $m_e/m_\mu \simeq 1/211$ et $m_\mu/m_\tau \simeq 1/17$. En outre, on note en observant le graphe que $m_u > m_d$, en contradiction flagrante avec la réalité expérimentale.

Afin de pouvoir reproduire le spectre de masse des leptons chargés, il est donc nécessaire d'introduire au moins deux pentes différentes dans le graphe. On trace les segments reliant les points correspondant aux masses des leptons chargés, et on tente de tirer des parallèles à ces segments à partir des masses des quarks de la troisième génération. Pour les neutrinos, en vertu de la troisième identité de l'équation (6.28), on inverse les pentes des deux segments originaux. Il apparaît rapidement que la seule configuration vraisemblable compatible avec l'équation (6.28), représentée sur le graphe encadré, correspond bien au graphe expérimental (ci-dessous à droite), compte tenu de l'incertitude sur la détermination de l'échelle des quarks légers (dont le quark étrange) et des neutrinos, et pour autant que la solution LOW soit privilégiée. On vérifie bien que $m_u < m_d$.



Graphes logarithmiques des masses des fermions. Le logarithme des masses des fermions est porté en ordonnée. Le premier graphe correspond à la solution à pente unique ; le deuxième graphe est celui de la solution à deux pentes. Les disques noirs représentent les valeurs expérimentales des masses les mieux connues ; les disques blancs, les valeurs théoriques des autres masses. Le troisième graphe est celui du spectre de masse des fermions tel qu'il est établi sur base expérimentale. Dans les trois graphes, les pentes des segments en traits continus correspondent aux rapports de masse expérimentaux. Les pentes des segments en traits interrompus correspondent à des estimations théoriques.

Deux pentes pourraient donc suffire pour rendre compte du spectre de masse des fermions. Cette solution présente l'intérêt d'être simple et proche des données expérimentales. Mais elle n'est en rien exclusive, et sans doute ne correspond-elle qu'au "premier ordre" d'une solution plus complexe qu'il reste à déterminer. En effet, l'équation (6.28) n'impose pas l'égalité entre les pentes, mais entre les produits de pente. En outre, l'équation originale (6.27) implique les paramètres de mélange des secteurs hadronique et leptonique, lesquels viendront également corriger la configuration avancée.

Rappelons encore une fois que l'identification des paramètres stables dans les secteurs des quarks et des leptons n'est compatible avec les données expérimentales relatives à l'oscillation des neutrinos solaires que lorsque l'on prend soin de sélectionner la solution LOW, à savoir $\Delta m_{sol}^2 \simeq 10^{-7} \text{eV}^2$ et $\text{tg}^2 \theta \simeq 0,6$.

Conclusion

Dans le Modèle Standard à deux générations de fermions et un doublet de Higgs, à l'aide d'une méthode dite différentielle, on a établi l'existence d'un ensemble de relations entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse des quarks. Ces relations sont finies à l'ordre d'une boucle. Elles sont paramétrées par une constante d'intégration $\lambda \geq 2$. On a conclu qu'une relation naturelle entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse des quarks appartient nécessairement à cet ensemble. S'il en existe une, elle doit correspondre à une valeur particulière de λ . Cependant, le calcul à l'ordre d'une boucle ne permet pas de déterminer λ . En outre, on sait que la symétrie responsable d'une éventuelle relation de ce type ne peut pas être de nature horizontale.

On a ensuite développé une méthode dite matricielle. Plus générale, celle-ci a permis de mettre en évidence l'existence de $n - 1$ paramètres stables à l'ordre d'une boucle dans le Modèle Standard à n générations de fermions et un doublet de Higgs. Ces paramètres sont des fonctions des rapports de masse des quarks et des angles de mélange (dans le Modèle Standard à deux générations de fermions, le paramètre stable correspond à la constante d'intégration λ de la méthode différentielle). Ils ne sont pas calculables. Une éventuelle étude de calculabilité (semblable à celles qui ont été présentées aux chapitres 4 et 5) serait d'ailleurs vouée à l'échec dans la mesure où, par construction, à l'ordre d'une boucle, les corrections radiatives qui les affectent sont naturellement finies.

Après avoir postulé l'existence d'un secteur de Yukawa leptonique structurellement²⁰ identique au secteur de Yukawa hadronique, on a étendu les développements précédents aux leptons. On a donc mis en évidence l'existence de $n - 1$ paramètres stables à l'ordre d'une boucle dans le secteur de Yukawa leptonique du Modèle Standard à n générations de fermions et un doublet de Higgs.

Afin d'avancer une explication à l'existence de ces paramètres stables (à l'ordre d'une boucle) mais non calculables, on a rappelé que dans le Modèle Standard, les rapports de charge électrique sont des paramètres stables (universalité de la charge électrique) et qu'en outre, bien qu'ils ne soient pas calculables, ils sont rigoureusement identiques (quantification de la charge électrique). Par analogie, on a généralisé le concept d'universalité de la charge en l'exportant dans le secteur de Yukawa. Cette universalité a donné lieu à la formulation de plusieurs relations finies (à l'ordre d'une boucle) entre les angles de mélange et les rapports de masse. Ces relations ne font plus intervenir que des quantités physiques "accessibles" à l'expérience. L'une d'entre elle, dite relation hadronique parce qu'elle ne concerne que les masses des quarks et les paramètres de la matrice de Kobayashi-Maskawa, aboutit à la prédiction remarquable $m_u/m_d \simeq 1/3$. Les autres relations impliquent des paramètres du secteur de Yukawa leptonique. En l'absence de termes de Majorana, ces relations sont en accord avec la solution LOW pour l'oscillation des neutrinos solaires. Elles permettent en outre d'établir grossièrement le spectre de masse des neutrinos (page 82). A partir de ces relations, une solution simple est alors proposée pour le spectre de masse général des fermions du Modèle Standard (solution à deux pentes). Cette solution est en accord avec toutes les données expérimentales disponibles. Notons enfin que l'introduction de termes de Majorana compliquerait singulièrement la confrontation des relations à l'expérience, puisque ces relations concernent les masses de Dirac, lesquelles ne seraient plus directement mesurables.

Seuls l'extension de ces calculs aux ordres supérieurs en théorie de la perturbation et

²⁰C'est-à-dire qu'on a introduit les neutrinos droits dans le Modèle Standard, tout en interdisant la présence de termes de Majorana.

la découverte d'une symétrie soutenant le concept d'universalité dans le secteur de Yukawa permettraient de préciser le statut qu'il convient d'accorder aux paramètres mis en évidence, et de confirmer les hypothèses avancées quant à leur identification.

Conclusion

La question des masses des fermions et des angles de mélange au sein du Modèle Standard demeure aujourd'hui l'une des plus passionnantes énigmes de la physique des particules élémentaires. La plupart des tentatives visant à débrouiller cet écheveau n'ont guère réussi qu'à le compliquer ; soit en se heurtant à la réalité expérimentale ; soit en multipliant les paramètres libres supplémentaires au point de contrarier l'objectif initial de simplification et d'unification.

L'étude des conditions de calculabilité des angles de mélange et des conditions de naturalité des relations entre ces angles de mélange et les rapports de masse présentée au fil des pages de ce travail s'inscrit parfaitement dans l'effort destiné à réduire le nombre de paramètres libres du Modèle Standard. Elle ne présuppose pas l'existence explicite d'une symétrie supplémentaire ni d'un principe fondateur qui échapperait aux lois du Modèle Standard. La méthode consiste exclusivement à identifier, à l'aide d'un calcul à l'ordre dominant, les valeurs éventuellement calculables des angles de mélange, ainsi que les relations éventuellement naturelles entre ces angles de mélange et les rapports de masse des fermions. Cette méthode a été utilisée avec succès pour déterminer la seule valeur éventuellement calculable de l'angle faible (redécouverte des théories de grande unification), ainsi que les seules relations éventuellement naturelles entre un rapport de masse et deux constantes de couplage – dans un modèle de Yukawa à deux fermions (redécouverte de la brisure spontanée de la symétrie).

Dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et deux générations de fermions, l'étude des conditions de calculabilité de l'angle de Cabibbo a prouvé que seuls les mélanges triviaux peuvent être comptés pour calculables. Il en va de même pour les paramètres de la matrice de Kobayashi-Maskawa dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et trois générations de fermions. Or un mélange trivial à l'ordre le plus bas demeure trivial à tous les ordres en théorie de la perturbation. Cette solution, incompatible avec les données expérimentales, a donc dû être rejetée.

Cependant, on a montré qu'il existe un ensemble infini de relations finies à l'ordre d'une boucle entre l'angle de Cabibbo et les rapports de masse des quarks. Cet ensemble, paramétré par une constante d'intégration λ , peut être réinterprété comme l'ensemble des valeurs attribuables au paramètre λ , univoquement défini en termes de l'angle de Cabibbo et des rapports de masse des quarks. Ce paramètre est fini à l'ordre d'une boucle. Plus généralement, on a montré qu'au sein du Modèle Standard à un doublet de Higgs et n générations de fermions, il existe $n - 1$ paramètres finis à l'ordre d'une boucle. Ces paramètres sont des fonctions des angles de mélange et des rapports de masse des quarks. Afin de pouvoir rendre compte des oscillations de neutrinos observées ces dernières années, les neutrinos droits sont introduits dans le Modèle Standard (les termes de Majorana sont interdits à l'aide d'une symétrie globale). Cette extension minimale du Modèle Standard a pour effet de doubler le nombre de paramètres finis à l'ordre d'une boucle. Par analogie avec l'universalité de la charge électrique, un

principe d'universalité de la charge de Yukawa est alors défini, lequel conduit à l'identification des paramètres finis à l'ordre d'une boucle. Les prédictions qui découlent de ces identifications sont remarquablement corroborées par les données expérimentales disponibles. En particulier, on songe à la détermination du rapport m_u/m_d ($\simeq 1/3$), à la sélection d'une solution (LOW) pour le problème des neutrinos solaires et à la proposition d'une configuration (modèle à deux pentes) pour le spectre de masse des fermions du Modèle Standard.

Il convient toutefois de souligner que la nature des résultats obtenus est conjecturale dans la mesure où les conditions de naturalité établies à l'ordre dominant sont nécessaires mais insuffisantes. En outre les fondements symétriques de cette éventuelle naturalité et du principe d'universalité suggéré demeurent inconnus. Ces résultats ne pourraient être définitivement confirmés (ou infirmés) qu'à la lumière de ces fondements (pour autant qu'ils existent), ou, pour le moins, à l'aide d'un calcul aux ordres supérieurs en théorie de la perturbation. Mais ne fût-ce qu'à l'ordre d'une boucle, l'existence même de ces paramètres stables et la proximité de leurs valeurs expérimentales (puisqu'en les identifiant, on aboutit aux prédictions évoquées ci-dessus) méritent plus qu'un détour...

Terminons enfin en notant que la généralisation de l'approche perturbative développée au cours de ce travail aux structures de Higgs plus complexes (plusieurs doublets, triplets, quadruplets,...) permettrait probablement de dégager un vaste ensemble de relations finies à l'ordre d'une boucle. Parmi celles-ci figureraient les relations naturelles associées à toutes les symétries horizontales possibles et imaginables, puisque par essence, une relation naturelle est finie à tous les ordres en théorie de la perturbation. Si l'on parvient à contourner les obstacles techniques qui jalonnent les développements mathématiques (augmentation du nombre de couplages, et, dès lors, du nombre de paramètres intervenant dans les équations différentielles à résoudre) cette approche devrait permettre de dresser un véritable catalogue des relations naturelles et des groupes de symétrie qui leur sont associés.

Addendum : Alors que la rédaction de cette dissertation arrivait à son terme, les premiers résultats de KamLAND ont été publiés [99]. KamLAND est le nom d'un vaste projet expérimental destiné à recueillir à l'aide d'un nouveau détecteur situé dans les mines de Kamioka (Japon), les anti-neutrinos électroniques issus des désintégrations β inverses au sein des réacteurs nucléaires environnants (distants de cent à deux cents kilomètres de Kamioka). Le nombre d'anti-neutrinos électroniques ainsi obtenus, d'une énergie moyenne de quelques MeV est comparé au nombre d'anti-neutrinos électroniques attendus. Le déficit observé des anti-neutrinos électroniques permet non seulement de renforcer la thèse selon laquelle les neutrinos sont effectivement doués d'une masse, mais en outre, d'exclure (avec plus de quatre écarts-type) les solutions solaires dites LOW, SMA et VO, pour ne plus retenir que la solution dite LMA [100]. Ces résultats expérimentaux sont en contradiction avec les conclusions théoriques dérivées de l'analyse du secteur leptonique conduite au chapitre 6 de la présente dissertation. En effet, celles-ci privilégiaient la solution solaire LOW, laquelle était la seule à permettre un accord entre l'hypothèse d'universalité définie dans la section 6.4, l'hypothèse d'une extension leptonique minimale du Modèle Standard introduite dans la section 6.3, et l'hypothèse de hiérarchie forte (semblable à la hiérarchie observée dans le spectre de masse des quarks, et dans la matrice de Kobayashi-Maskawa) évoquée page 80. Si l'on souhaite conserver l'hypothèse d'universalité (souhait fondé sur le succès de l'universalité dans le secteur hadronique), la première hypothèse à relâcher est celle de la hiérarchie forte (auquel cas les simplifications de la page 80 ne sont évidemment plus de mise). Une étude approfondie de l'expression (6.23) pourrait alors conduire à la reconsidération de la solution LMA, pour autant que les éléments de la matrice de mélange leptonique le permettent (une fois l'hypothèse de hiérarchie forte abandonnée, les éléments de la matrice de mélange perdent leur caractère négligeable). L'intérêt d'une telle étude résiderait donc également dans l'éventuelle prise en considération des angles de mélange θ_{atm} et θ_{sol} , lesquels "découplent" dans le cas d'une hiérarchie forte où seuls importaient les ordres de grandeur des rapports de masse. Il conviendrait ensuite d'envisager la présence éventuelle de termes de Majorana pour les neutrinos, c'est-à-dire de relâcher l'hypothèse qui concerne l'extension minimale du Modèle Standard; le nombre élevé de paramètres provenant de la matrice de masse générale des neutrinos permettrait sans aucun doute la prise en considération de la solution LMA pour les neutrinos solaires.

Annexe A

Le modèle de Wyler

On considère le Modèle Standard à trois doublets de Higgs Φ_0, Φ_1 et Φ_2 , et deux générations de fermions [40].

A.1 Symétries et lagrangien

Au groupe de symétrie vertical $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ on ajoute la composante horizontale D_3 . On considère en outre le groupe \mathbb{Z}_2 . Le groupe diédral D_3 est isomorphe au groupe symétrique S_3 , groupe discret fini. La structure de ses représentations irréductibles est examinée page 95.

Les champs du Modèle Standard sont rangés dans les représentations irréductibles des groupe D_3 et \mathbb{Z}_2 . Sous D_3 , on a : u_R un singulet de la représentation triviale ; c_R un singulet de la représentation alternée ; $(s_R d_R)^T$ un doublet ; $(\Psi_{L1} \Psi_{L2})^T$ un doublet, où Ψ_{L1} et Ψ_{L2} sont les doublets d'isospin faible de la première et de la deuxième génération, i.e. $\Psi_{L1} = (u_L d_L)^T$ et $\Psi_{L2} = (c_L s_L)^T$; Φ_0 un singulet de la représentation triviale ; $(\Phi_1 \Phi_2)^T$ un doublet. Sous \mathbb{Z}_2 , on a : Φ_0 un singulet de la représentation impaire ; et tous les autres champs vivent dans la représentation triviale.

Dans le secteur de Yukawa on écrit le lagrangien général invariant sous les transformations du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & (\bar{\Psi}_{L1} \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_d^0 \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_0 + (\bar{\Psi}_{L1} \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_d^1 \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_1 + (\bar{\Psi}_{L1} \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_d^2 \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_2 \\ & + (\bar{\Psi}_{L1} \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_u^0 \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_0 + (\bar{\Psi}_{L1} \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_u^1 \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 + (\bar{\Psi}_{L1} \bar{\Psi}_{L2}) \Gamma_u^2 \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_2, \end{aligned}$$

dont on impose en outre l'invariance sous les transformations du produit $D_3 \otimes \mathbb{Z}_2$. L'invariance de \mathcal{L}_Y sous la transformation $\Phi_0 \mapsto -\Phi_0$ implique que $\Gamma_d^0 = \Gamma_u^0 = 0$. Il y a découplage du doublet de Higgs Φ_0 dans le secteur de Yukawa. Quant à l'invariance sous D_3 , il suffit de considérer les transformations correspondant aux éléments nécessaires pour engendrer le groupe, c'est-à-dire les générateurs. Ils sont au nombre de deux. On les nomme A et B . On montre en fin de chapitre que leurs représentants bidimensionnels s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \omega & \\ & \omega^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix},$$

avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Pour le secteur *down*, en vertu de l'équation (3.7), l'invariance sous la transformation A

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) &\longmapsto (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \omega & \\ & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

conduit au système

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{d11}^1 & \Gamma_{d12}^1 \\ \Gamma_{d21}^1 & \Gamma_{d22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \omega &= \begin{pmatrix} \Gamma_{d11}^1 & \Gamma_{d12}^1 \\ \Gamma_{d21}^1 & \Gamma_{d22}^1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{d11}^2 & \Gamma_{d12}^2 \\ \Gamma_{d21}^2 & \Gamma_{d22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \omega^2 &= \begin{pmatrix} \Gamma_{d11}^2 & \Gamma_{d12}^2 \\ \Gamma_{d21}^2 & \Gamma_{d22}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dont les solutions s'écrivent

$$\Gamma_d^1 = \begin{pmatrix} & \\ & \Gamma_{d22}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_d^2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{d11}^2 & \\ & \end{pmatrix}.$$

L'invariance de \mathcal{L}_Y sous la transformation B

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) &\longmapsto (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} d'_R \\ s'_R \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d'_R \\ s'_R \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entraîne alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{d11}^2 & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} & \\ & \Gamma_{d22}^1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \Gamma_{d22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma_{d11}^2 & \\ & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on aboutit à l'expression des couplages de Yukawa :

$$\Gamma_d^1 = \begin{pmatrix} & \\ & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_d^2 = \begin{pmatrix} c & \\ & \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Pour ce qui est du secteur *up*, à partir de l'invariance de \mathcal{L}_Y sous la transformation A

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) &\longmapsto (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on dérive les contraintes sur les couplages :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{u11}^1 & \Gamma_{u12}^1 \\ \Gamma_{u21}^1 & \Gamma_{u22}^1 \end{pmatrix} \omega^2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{u11}^1 & \Gamma_{u12}^1 \\ \Gamma_{u21}^1 & \Gamma_{u22}^1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 & \\ & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{u11}^2 & \Gamma_{u12}^2 \\ \Gamma_{u21}^2 & \Gamma_{u22}^2 \end{pmatrix} \omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{u11}^2 & \Gamma_{u12}^2 \\ \Gamma_{u21}^2 & \Gamma_{u22}^2 \end{pmatrix},$$

dont on extrait les solutions intermédiaires :

$$\Gamma_u^1 = \begin{pmatrix} & \\ \Gamma_{u12}^1 & \Gamma_{u22}^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_u^2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{u11}^2 & \Gamma_{u12}^2 \\ & \end{pmatrix}.$$

Et l'invariance sous la transformation B

$$\begin{aligned} (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) &\longmapsto (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{u11}^2 & \Gamma_{u12}^2 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma_{u21}^1 & \Gamma_{u22}^1 \\ & \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{u21}^1 & \Gamma_{u22}^1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Gamma_{u11}^2 & \Gamma_{u12}^2 \\ & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, on résoud ce système pour aboutir aux solutions :

$$\Gamma_u^1 = \begin{pmatrix} & \\ a & -b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_u^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ & \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Dans le secteur de Yukawa, on a dérivé le lagrangien général invariant sous les transformations du groupe $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes D_3 \otimes \mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_1 + (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \end{pmatrix} \Phi_2 \\ &+ (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 + (\bar{\Psi}_{L1} \ \bar{\Psi}_{L2}) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_2, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\mathcal{L}_Y = a(\bar{\Psi}_{L1} u_R \tilde{\Phi}_2 + \bar{\Psi}_{L2} u_R \tilde{\Phi}_1) + b(\bar{\Psi}_{L1} c_R \tilde{\Phi}_2 - \bar{\Psi}_{L2} c_R \tilde{\Phi}_1) + c(\bar{\Psi}_{L1} d_R \Phi_2 - \bar{\Psi}_{L2} s_R \Phi_1).$$

A.2 Relation naturelle

Après avoir développé une valeur moyenne dans le vide non nulle, les champs scalaires sont redéfinis ; les fermions se trouvent doués d'une masse :

$$M_d = \begin{pmatrix} cv_2 & \\ & cv_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_u = \begin{pmatrix} av_2^* & bv_2^* \\ av_1^* & -bv_1^* \end{pmatrix},$$

avec v_1 et v_2 les valeurs moyennes dans le vide des champs scalaires Φ_1 et Φ_2 , respectivement.

Le produit hermitien $M_d M_d^\dagger$ est diagonal ; on en extrait les valeurs propres et l'angle correspondant à l'orientation des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} m_d &= |cv_2|, \\ m_s &= |cv_1|, \\ \theta_d &= 0. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Dans le secteur up , on cherche à diagonaliser le produit hermitien

$$M_u M_u^\dagger = \begin{pmatrix} (|a|^2 + |b|^2)|v_2|^2 & (|a|^2 - |b|^2)v_2^* v_1 \\ (|a|^2 - |b|^2)v_1^* v_2 & (|a|^2 + |b|^2)|v_1|^2 \end{pmatrix}.$$

On peut calculer les invariants $\text{tr } M_u M_u^\dagger$ et $\det M_u M_u^\dagger$ et déterminer des combinaisons de valeurs propres :

$$\begin{aligned} m_u^2 + m_c^2 &= (|a|^2 + |b|^2)(|v_1|^2 + |v_2|^2), \\ m_u^2 \cdot m_c^2 &= 4|a|^2|b|^2|v_1|^2|v_2|^2, \end{aligned} \tag{A.4}$$

et l'angle correspondant à l'orientation des vecteurs propres :

$$\frac{1}{2} \text{tg } 2\theta_u = \frac{(|a|^2 - |b|^2)|v_1||v_2|}{(|a|^2 + |b|^2)(|v_1|^2 - |v_2|^2)}, \tag{A.5}$$

Sachant que l'angle de Cabibbo s'exprime comme la différence $\theta_C = \theta_d - \theta_u$, et combinant les équations (A.3), (A.4) et (A.5), on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \text{tg } 2\theta_C\right)^2 &= \left(\frac{(|a|^2 - |b|^2)|v_1||v_2|}{(|a|^2 + |b|^2)(|v_1|^2 - |v_2|^2)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{|v_1||v_2|}{|v_1|^2 - |v_2|^2}\right)^2 - \left(\frac{|v_1|^2 + |v_2|^2}{|v_1|^2 - |v_2|^2}\right)^2 \left(\frac{2|a||b||v_1||v_2|}{(|v_1|^2 + |v_2|^2)(|a|^2 + |b|^2)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{m_s m_d}{m_s^2 - m_d^2}\right)^2 - \left(\frac{m_s^2 + m_d^2}{m_s^2 - m_d^2}\right)^2 \left(\frac{m_u m_c}{m_u^2 + m_c^2}\right)^2, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\frac{1}{2} \text{tg } 2\theta_C = \frac{m_s m_d}{m_s^2 - m_d^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_u m_c}{m_d m_s} \cdot \frac{m_d^2 + m_s^2}{m_u^2 + m_c^2}\right)^2}. \tag{A.6}$$

A.3 Le groupe diédral

A.3.1 Généralités

Le groupe diédral D_n est composé des opérations de symétrie sous lesquelles un polygone régulier à n sommets demeure invariant. On note que le groupe de symétrie D_3 , discret et fini, est isomorphe au groupe S_3 des permutations de trois éléments. Il s'agit d'un groupe d'ordre 6 ; les permutations de trois éléments $(1, 2, 3)$ peuvent être étiquetées par la combinaison d'éléments (i_1, i_2, i_3) à laquelle elles aboutissent. En extension, on a

$$S_3 = \{(1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\} .$$

On peut regrouper les éléments de S_3 en trois classes dites d'équivalence :

$$\{(1, 2, 3)\} , \quad \{(2, 1, 3), (1, 3, 2)\} , \quad \{(3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\} ,$$

à savoir, telles qu'elles réunissent chacune des permutations équivalentes – permutations reliées entre elles par un opérateur d'entrelacement appartenant au groupe (i.e. il y a équivalence entre τ et $\tau' = \sigma^{-1}\tau\sigma$, $\forall \tau, \sigma \in S_3$). Le nombre de classes d'équivalence d'un groupe fini correspond au nombre de ses représentations irréductibles. On sait que le groupe symétrique S_n admet deux représentations de dimension un : la représentation triviale, associant 1 à chacun des éléments du groupe, et la représentation alternée, associant à chacune des permutations sa signature (1 ou -1). Or, l'ordre du groupe est égal à la somme des carrés des dimensions de ses représentations irréductibles ; donc la troisième représentation irréductible de S_3 est de dimension 2 (i.e. $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$).

A.3.2 La représentation bidimensionnelle

On peut construire les matrices de la représentation bidimensionnelle en considérant les permutations des sommets d'un triangle équilatéral dont le centre est situé à l'origine des axes x et y sur le plan \mathbb{R}^2 . On écrit respectivement le représentant de l'identité, le représentant de l'inversion de deux sommets, et le représentant de la rotation d'un angle de $2\pi/3$ autour de l'origine :

$$R_{(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} , \quad R_{(2,1,3)} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} , \quad R_{(3,1,2)} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} ,$$

à partir de quoi, par multiplication, on génère tous les représentants du groupe. Il est aisé de montrer que cette représentation est irréductible et qu'elle correspond dès lors à la représentation bidimensionnelle recherchée. En effet, on remarque que

$$[R_{(3,1,2)}, R_{(2,1,3)}] \neq 0 .$$

Ces deux matrices ne sont donc pas simultanément diagonalisables ; et la représentation est indécomposable. Or elle est unitaire ; donc elle est irréductible. On choisit maintenant une base dans laquelle la matrice $R_{(3,1,2)}$ est diagonale ; le changement de base s'exprime à l'aide de la matrice V des vecteurs propres de $R_{(3,1,2)}$:

$$\begin{aligned} R'_{(3,1,2)} &= V^\dagger R_{(3,1,2)} V , \\ R'_{(2,1,3)} &= V^\dagger R_{(2,1,3)} V , \end{aligned}$$

avec

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Et les matrices

$$R'_{(3,1,2)} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & \\ & e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R'_{(2,1,3)} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

correspondent précisément aux générateurs A et B utilisés dans la section précédente.

Annexe B

Le modèle de Yukawa

On souhaite calculer à l'ordre d'une boucle les contributions divergentes des corrections radiatives aux paramètres libres et sans dimension ($r \equiv m_1/m_2$, g_1 et g_2) du secteur fermionique du modèle de Yukawa à deux fermions examiné au chapitre 4.

On reprend le lagrangien (4.12) :

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \sum_{a=1}^2 \{ \bar{\psi}_a (i \not{\partial} - m_a) \psi_a - g_a \bar{\psi}_a \psi_a \phi \} ,$$

avec $V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + O(\phi^3)$ et, en général, $g_1 \neq g_2$ et $m_1 \neq m_2$. On exprime ce lagrangien en termes des composantes gauche et droite $\psi_{aR} = (1 \pm \gamma_5) \psi_a / 2$ des spineurs ψ_a :

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \sum_{a=1}^2 \{ \bar{\psi}_{aL} i \not{\partial} \psi_{aL} + \bar{\psi}_{aR} i \not{\partial} \psi_{aR} - g_a \bar{\psi}_{aL} \psi_{aR} \phi - g_a \bar{\psi}_{aR} \psi_{aL} \phi \} .$$

Les champs, les masses et les constantes de couplage sont renormalisés :

$$\begin{aligned} \Psi_{aL} &\longmapsto \Psi'_{aL} = (Z_{\Psi_L}^a)^{-\frac{1}{2}} \Psi_{aL} , \\ \Psi_{aR} &\longmapsto \Psi'_{aR} = (Z_{\Psi_R}^a)^{-\frac{1}{2}} \Psi_{aR} , \\ \phi &\longmapsto \phi' = (Z_\phi)^{-\frac{1}{2}} \phi , \\ m_a &\longmapsto m'_a = (Z_{\Psi_L}^a)^{\frac{1}{2}} (Z_{\Psi_R}^a)^{\frac{1}{2}} (Z_m^a)^{-1} m_a , \\ g_a &\longmapsto g'_a = (Z_{\Psi_L}^a)^{\frac{1}{2}} (Z_{\Psi_R}^a)^{\frac{1}{2}} (Z_\phi)^{\frac{1}{2}} (Z_g^a)^{-1} g_a . \end{aligned}$$

On calcule ces constantes de renormalisation à l'ordre d'une boucle. Dans les diagrammes, une croix représente l'insertion d'un terme de masse. On note que chaque insertion de masse implique l'insertion d'un nouveau propagateur, et donc la diminution du degré de divergence du diagramme. Les contributions divergentes des diagrammes sont extraites à l'aide de la régularisation dimensionnelle. Désignant les termes finis par "t.f.", on a pour le champ gauche du fermion a :

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{L} \quad \quad \quad \text{R} \quad \quad \quad \text{L} \end{array} = i g_a^2 \not{p} / 2 D + \text{t.f.} ,$$

avec le facteur divergent $D = (4\pi)^{-2} 2/\epsilon$ où $\epsilon = 4 - d$ est le paramètre de régularisation. Par symétrie, le calcul est identique pour le champ droit du fermion a . Pour la renormalisation du

terme de masse du fermion a , on évalue le diagramme suivant :

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{R} \quad \text{L} \quad \text{R} \quad \text{L} \end{array} \quad = \quad ig_a^2 m_a D \quad + \quad \text{t.f.}$$

On calcule ensuite la constante de renormalisation du vertex du fermion a :

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{R} \quad \text{L} \quad \text{R} \quad \text{L} \end{array} \quad = \quad ig_a^3 m_a D \quad + \quad \text{t.f.}$$

On calcule enfin le seul diagramme contribuant à la renormalisation de la fonction d'onde du champ scalaire¹ :

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad = \quad i(g_1^2 + g_2^2) 2p^2 D \quad + \quad \text{t.f.}$$

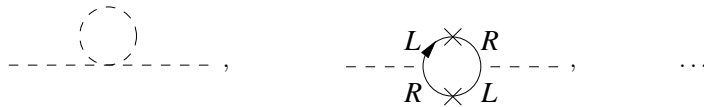
A l'aide de ces résultats, on procède à l'évaluation des constantes de renormalisation :

$$\begin{aligned} Z_{\Psi_L}^a &= 1 - g_a^2/2 D, \\ Z_{\Psi_R}^a &= 1 - g_a^2/2 D, \\ Z_m^a &= 1 + g_a^2 D, \\ Z_g^a &= 1 + g_a^2 D, \\ Z_\phi &= 1 - 2(g_1^2 + g_2^2) D, \end{aligned}$$

pour obtenir enfin, en introduisant ces résultats dans les expressions de la page précédente, les contributions divergentes des corrections radiatives aux paramètres $r \equiv m_1/m_2$, g_1 et g_2 :

$$\begin{aligned} \delta r &= -r \frac{3}{2} (g_1^2 - g_2^2) D, \\ \delta g_1 &= -g_1 \frac{1}{2} (5g_1^2 + 2g_2^2) D, \\ \delta g_2 &= -g_2 \frac{1}{2} (5g_2^2 + 2g_1^2) D. \end{aligned}$$

¹On observe en effet que la contribution divergente des diagrammes



ne dépend pas de la quantité de mouvement transportée, et n'intervient donc pas dans la renormalisation de la fonction d'onde du scalaire.

Annexe C

Les couplages de Yukawa

Dans la suite on utilise indistinctement l’adjectif “corrigé” et “renormalisé” pour qualifier des objets (matrice de masse, rapport de masse, angle de mélange, . . .) complétés par la partie divergente des corrections radiatives qui les affectent. Tous les calculs sont effectués à l’ordre d’une boucle ; lorsque la chose n’est pas précisée, elle est sous-entendue.

C.1 Les matrices de masse

Dans le Modèle Standard à un doublet de Higgs et n générations de quarks, on calcule à l’ordre d’une boucle la partie divergente des corrections radiatives aux matrices de masse des quarks. On considère les matrices de masse dans la base faible. Ces corrections impliquent des diagrammes de self-énergie et des diagrammes “têtard” comme

$$\dots \quad (C.1)$$

Cependant, parmi les paramètres contenus dans les matrices de masse, seuls les rapports de masse des quarks et les angles de mélange nous intéressent. Par conséquent, parmi les diagrammes corrigeant les matrices de masse, on ne sélectionne que ceux dont la partie divergente affecte les rapports de masse et les angles de mélange. Afin de pouvoir les sélectionner, on se replace dans la base physique. L’électrodynamique quantique et la chromodynamique quantique sont insensibles à la saveur. Dès lors les rapports de masse de quarks de même charge et de même couleur ne sont affectés ni par les corrections électromagnétiques, ni par les corrections fortes. Cet argument demeure valide pour les diagrammes impliquant les polarisations transverses des bosons vectoriels Z et W , ainsi que pour les diagrammes “têtard”. Pour s’en convaincre, il suffit de remarquer que la contribution (divergente) de tous ces diagrammes à la renormalisation des rapports de masse des quarks s’écrit :

$$\frac{m_u}{m_c} \longmapsto \frac{(1 + C_\gamma + C_G + C_Z + C_W + C_T)m_u}{(1 + C_\gamma + C_G + C_Z + C_W + C_T)m_c} = \frac{m_u}{m_c}$$

où C_γ , C_G , C_Z et C_W proviennent respectivement de l’échange d’un photon, d’un gluon, d’un Z transverse et d’un W transverse, tandis que C_T provient des diagrammes “têtard”. Ces

contributions C sont identiques pour n'importe quel quark de type up – pour ce qui concerne la partie divergente. On peut évidemment appliquer le même raisonnement aux quarks de type *down*. Pour ce qui est des angles de mélange, la preuve est encore plus directe puisque aucun des diagrammes évoqués ne génère une correction divergente non diagonale à la matrice de masse diagonale nue (les corrections non diagonales dues aux polarisations transverses du W sont finies). En d'autres termes, les seuls diagrammes à considérer sont les self-énergies des quarks dues à l'échange d'un scalaire (boson de Higgs ou *would-be-goldstone*). Ce qui n'a rien d'étonnant dans la mesure où les scalaires sont les seuls champs sensibles aux différences entre les générations de fermions.

Après brisure spontanée de la symétrie, dans la base faible, le lagrangien du secteur de Yukawa hadronique du Modèle Standard s'écrit (voir page 31) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \bar{u}_L \Gamma_d d_R \phi^+ + \bar{d}_L \Gamma_d d_R \phi^0 + \bar{d}_R \Gamma_d^\dagger u_L \phi^- + \bar{d}_R \Gamma_d^\dagger d_L \phi^{0*} \\ & + \bar{u}_L \Gamma_u u_R \phi^{0*} - \bar{d}_L \Gamma_u u_R \phi^- + \bar{u}_R \Gamma_d^\dagger u_L \phi^0 - \bar{u}_R \Gamma_u^\dagger d_L \phi^+ \\ & + \bar{d}_L M_d d_R + \bar{u}_L M_u u_R + \bar{d}_R M_d^\dagger d_L + \bar{u}_R M_u^\dagger u_L . \end{aligned}$$

Le champs et les paramètres de ce lagrangien sont renormalisés par les constantes (infinies) suivantes :

$$\begin{aligned} u_{L,R} & \mapsto u'_{L,R} = (Z_{L,R}^u)^{-\frac{1}{2}} u_{L,R} \\ d_{L,R} & \mapsto d'_{L,R} = (Z_{L,R}^d)^{-\frac{1}{2}} d_{L,R} \\ M_u & \mapsto M'_u = (Z_L^u)^{\frac{1}{2}} (Z_{M_u})^{-1} M_u (Z_R^u)^{\frac{1}{2}} \\ M_d & \mapsto M'_d = (Z_L^d)^{\frac{1}{2}} (Z_{M_d})^{-1} M_d (Z_R^d)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

À l'ordre d'une boucle, on calcule ces constantes de renormalisation. Pour la construction et l'évaluation des diagrammes, on développe le propagateurs fermioniques en série autour du propagateurs d'un fermion de masse nulle (on utilise les propagateurs des fermions de Weyl droits et gauches). Dans les diagrammes, une croix figure l'insertion d'un terme de masse. On note que chaque insertion de masse implique l'insertion d'un nouveau propagateur, et partant la diminution du degré de divergence du diagramme. Pour les champs gauches des quarks de type up , on a :

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = i \not{\epsilon} \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_u \Gamma_u^\dagger + \Gamma_d \Gamma_d^\dagger] + \text{t.f.},$$

avec $\epsilon = \left(\frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)$ où Λ est un *cut-off* et μ une échelle d'énergie arbitraire. Pour les champs gauches des quarks de type *down*, on a :

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = i \not{\epsilon} \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_d \Gamma_d^\dagger + \Gamma_u \Gamma_u^\dagger] + \text{t.f.},$$

tandis que pour les champs droits des quarks de type up

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = i \not{\epsilon} \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_u \Gamma_u^\dagger + \Gamma_u \Gamma_u^\dagger] + \text{t.f.},$$

et pour les champs droist des quarks de type *down*

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{d_R} \text{---} \xrightarrow{d_L} \text{---} \xrightarrow{d_R} \\ \quad \quad \quad \text{---} \phi^{0*} \text{---} \\ \text{---} \xrightarrow{d_R} \text{---} \xrightarrow{u_L} \text{---} \xrightarrow{d_R} \\ \quad \quad \quad \text{---} \phi^- \text{---} \end{array} + = i \not{p} \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_d \Gamma_d^\dagger + \Gamma_d \Gamma_d^\dagger] + \text{t.f.}$$

Les constantes de renormalisation des termes de masse se calculent de la même manière. Pour les quarks de type *up* on a :

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{u_R} \text{---} \xrightarrow{d_L} \text{---} \times \text{---} \xrightarrow{d_R} \text{---} \xrightarrow{u_L} \\ \quad \quad \quad \text{---} \phi^+ \text{---} \end{array} = i \epsilon \Gamma_d M_d^\dagger \Gamma_u + \text{t.f.},$$

Les diagrammes impliquant plus d'une insertion de masse font intervenir plus de trois propagateurs fermioniques et sont donc finis. De même, pour les quarks de type *down* on a :

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{d_R} \text{---} \xrightarrow{u_L} \text{---} \times \text{---} \xrightarrow{u_R} \text{---} \xrightarrow{d_L} \\ \quad \quad \quad \text{---} \phi^- \text{---} \end{array} = i \epsilon \Gamma_u M_u^\dagger \Gamma_d + \text{t.f.}$$

On note que contrairement aux champs des quarks, les termes de masse ne sont pas renormalisés par les courants neutres. A l'aide de ces diagrammes et sachant que $M_{u,d} = v\Gamma_{u,d}$ où v est la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire avant brisure spontanée de la symétrie, on obtient aisément l'expression des constantes de renormalisation :

$$\begin{aligned} Z_L^u &= 1 - \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_u \Gamma_u^\dagger + \Gamma_d \Gamma_d^\dagger], & Z_L^d &= 1 - \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_d \Gamma_d^\dagger + \Gamma_u \Gamma_u^\dagger], \\ Z_R^u &= 1 - \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_u \Gamma_u^\dagger + \Gamma_u \Gamma_u^\dagger], & Z_R^d &= 1 - \frac{\epsilon}{2} [\Gamma_d \Gamma_d^\dagger + \Gamma_d \Gamma_d^\dagger], \\ Z_{M_u} &= 1 - \epsilon \Gamma_d \Gamma_d^\dagger, & Z_{M_d} &= 1 - \epsilon \Gamma_u \Gamma_u^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

et on vérifie que $Z_L^u = Z_L^d$ conformément à la structure électro-faible de la théorie. Pour être complet, nous devrions ajouter à chacune de ces expressions un terme proportionnel à l'identité dans l'espace des saveurs, qui tiendrait compte des contributions électromagnétiques, faibles transverses et fortes, ainsi que de celles des diagrammes "têtard". Mais à nouveau, il n'importe pas d'en rendre compte dans la mesure où ces résultats seront appliqués à la renormalisation des seuls rapports de masse et angles de mélange. A partir des expressions (C.2), on dérive les corrections aux matrices de masse dans la base faible

$$\begin{aligned} M'_u &= M_u + \epsilon [M_d M_d^\dagger M_u - M_u M_u^\dagger M_u], \\ M'_d &= M_d + \epsilon [M_u M_u^\dagger M_d - M_d M_d^\dagger M_d], \end{aligned}$$

et dans la base physique

$$\begin{aligned} U_L^\dagger M'_u U_R &= D_u + \epsilon [K D_d^2 K^\dagger D_u - D_u^3], \\ V_L^\dagger M'_d V_R &= D_d + \epsilon [K^\dagger D_u^2 K D_d - D_d^3], \end{aligned}$$

avec, cette fois¹, $\epsilon = \frac{3}{4} \frac{2}{v^2} \left(\frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)$ et où D_u et D_d sont les matrices de masse diagonales nues tandis que $K = U_L^\dagger V_L$ est la matrice de mélange nue (voir page 31). Rappelons également que U_L et V_L diagonalisent respectivement $M_u M_u^\dagger$ et $M_d M_d^\dagger$. On réécrit ces dernières expressions en définissant les matrices de correction $\epsilon_u \equiv \epsilon [K D_d^2 K^\dagger D_u - D_u^3]$ et $\epsilon_d \equiv \epsilon [K^\dagger D_u^2 K D_d - D_d^3]$, et les matrices de masse corrigées exprimées dans la base physique $M_u'' \equiv U_L^\dagger M_u' U_R$ et $M_d'' \equiv V_L^\dagger M_d' V_R$. On a :

$$\begin{aligned} M_u'' &= D_u + \epsilon_u , \\ M_d'' &= D_d + \epsilon_d . \end{aligned}$$

On peut maintenant procéder à la bidiagonalisation des matrices M_u'' et M_d'' et au calcul explicite des matrices de correction ϵ_u et ϵ_d dans le Modèle Standard à deux et à trois générations de quark. Les valeurs propres conduiront aux rapports de masse corrigés, et les vecteurs propres aux angles de mélange corrigés. Tous les calculs seront effectués au premier ordre en ϵ .

C.2 Modèle à deux générations

On cherche à bidiagonaliser les matrices M_u'' et M_d'' dans le Modèle Standard à deux générations de fermions, i.e.

$$\begin{aligned} U_L^\dagger M_u'' U_R' &= D_u' , \\ V_L^\dagger M_d'' V_R' &= D_d' , \end{aligned}$$

où D_u' et D_d' sont les matrices de masse renormalisées diagonales. Pour ce faire, on diagonalise les produits hermitiens $M_u'' M_u''^\dagger$ et $M_d'' M_d''^\dagger$:

$$\begin{aligned} U_L^\dagger M_u'' M_u''^\dagger U_L' &= D_u'^2 , \\ V_L^\dagger M_d'' M_d''^\dagger V_L' &= D_d'^2 . \end{aligned}$$

C.2.1 Diagonalisation des matrices de masse corrigées

En termes des éléments $\epsilon_{u ij}$ et $\epsilon_{d ij}$ des matrices de correction, on a les expressions

$$\begin{aligned} M_u'' &= \begin{pmatrix} m_u + \epsilon_{u 11} & \epsilon_{u 12} \\ \epsilon_{u 21} & m_c + \epsilon_{u 22} \end{pmatrix} , & M_u'' M_u''^\dagger &= \begin{pmatrix} m_u^2 + 2m_u \epsilon_{u 11} & m_u \epsilon_{u 21} + m_c \epsilon_{u 12} \\ m_u \epsilon_{u 21} + m_c \epsilon_{u 12} & m_c^2 + 2m_c \epsilon_{u 22} \end{pmatrix} , \\ M_d'' &= \begin{pmatrix} m_d + \epsilon_{d 11} & \epsilon_{d 12} \\ \epsilon_{d 21} & m_s + \epsilon_{d 22} \end{pmatrix} , & M_d'' M_d''^\dagger &= \begin{pmatrix} m_d^2 + 2m_d \epsilon_{d 11} & m_d \epsilon_{d 21} + m_s \epsilon_{d 12} \\ m_d \epsilon_{d 21} + m_s \epsilon_{d 12} & m_s^2 + 2m_s \epsilon_{d 22} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

On note que les matrices de correction sont réelles (ce qui est propre au modèle à deux générations). On résout les équations aux valeurs propres $\det(M_u'' M_u''^\dagger - \lambda_u \mathbb{I}) = 0$ et $\det(M_d'' M_d''^\dagger - \lambda_d \mathbb{I}) = 0$. On a les solutions $\lambda_u = \{m_u^2 + 2m_u \epsilon_{u 11}, m_c^2 + 2m_c \epsilon_{u 22}\}$ et $\lambda_d = \{m_d^2 + 2m_d \epsilon_{d 11}, m_s^2 + 2m_s \epsilon_{d 22}\}$. Il s'agit maintenant de construire les vecteurs propres. On observe que les matrices hermitiennes $M_u'' M_u''^\dagger$ et $M_d'' M_d''^\dagger$ sont symétriques. Par conséquent, les matrices unitaires U_L et V_L qui les diagonalisent sont orthogonales. Elle sont caractérisées par les angles θ_u et θ_d , respectivement. On calcule² ces angles. On obtient alors aisément les matrices des valeurs

¹On a absorbé un facteur $\frac{3}{4} \frac{2}{v^2}$ dans ϵ .

²Voir à ce propos l'équation (C.4) dans la section suivante.

propres et des vecteurs propres des parties hermitiennes de M'_u et M'_d :

$$D'_u = \begin{pmatrix} m_u + \epsilon_{u11} & \\ & m_c + \epsilon_{u22} \end{pmatrix}, \quad U'_L = \begin{pmatrix} 1 & \theta_u \\ -\theta_u & 1 \end{pmatrix},$$

$$D'_d = \begin{pmatrix} m_d + \epsilon_{d11} & \\ & m_s + \epsilon_{d22} \end{pmatrix}, \quad V'_L = \begin{pmatrix} 1 & \theta_d \\ -\theta_d & 1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\theta_u = \frac{m_u \epsilon_{u21} + m_c \epsilon_{u12}}{m_c^2 - m_u^2} \quad \text{et} \quad \theta_d = \frac{m_d \epsilon_{d21} + m_s \epsilon_{d12}}{m_s^2 - m_d^2}.$$

Sachant que la matrice de mélange corrigée est définie par $K' = U_L^{\dagger} K V'_L$, on a $\theta'_C = \theta_C - \theta_u + \theta_d$. En termes des éléments $\epsilon_{u ij}$ et $\epsilon_{d ij}$ des matrices de correction, on exprime finalement les masses et l'angle de mélange corrigés :

$$\begin{aligned} m'_u &= m_u + \epsilon_{u11}, & m'_c &= m_c + \epsilon_{u22}, & \theta'_C &= \theta_C - \frac{m_u \epsilon_{u21} + m_c \epsilon_{u12}}{m_c^2 - m_u^2} + \frac{m_d \epsilon_{d21} + m_s \epsilon_{d12}}{m_s^2 - m_d^2}. \\ m'_d &= m_d + \epsilon_{d11}, & m'_s &= m_s + \epsilon_{d22}, \end{aligned}$$

C.2.2 Les matrices de correction

Il reste de calculer les matrices de correction ϵ_u et ϵ_d définies à la fin de la section C.1. On a immédiatement :

$$\begin{aligned} \epsilon_{u11} &= \epsilon m_u (m_d^2 \cos^2 \theta_C + m_s^2 \sin^2 \theta_C - m_u^2), \\ \epsilon_{u12} &= \epsilon m_c (m_s^2 - m_d^2) \sin \theta_C \cos \theta_C, \\ \epsilon_{u21} &= \epsilon m_u (m_s^2 - m_d^2) \sin \theta_C \cos \theta_C, \\ \epsilon_{u22} &= \epsilon m_c (m_s^2 \cos^2 \theta_C + m_d^2 \sin^2 \theta_C - m_c^2), \\ \\ \epsilon_{d11} &= \epsilon m_d (m_u^2 \cos^2 \theta_C + m_c^2 \sin^2 \theta_C - m_d^2), \\ \epsilon_{d12} &= \epsilon m_s (m_u^2 - m_c^2) \sin \theta_C \cos \theta_C, \\ \epsilon_{d21} &= \epsilon m_d (m_u^2 - m_c^2) \sin \theta_C \cos \theta_C, \\ \epsilon_{d22} &= \epsilon m_s (m_c^2 \cos^2 \theta_C + m_u^2 \sin^2 \theta_C - m_c^2). \end{aligned}$$

Introduisant les éléments de ces matrices dans les expressions des masses et de l'angle corrigés, et définissant les rapports de masse nus $r_u \equiv m_u/m_c$ et $r_d \equiv m_d/m_s$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} r'_u &= r_u + \epsilon r_u [(m_d^2 - m_s^2) \cos 2\theta_C - (m_u^2 - m_c^2)], \\ r'_d &= r_d + \epsilon r_d [(m_u^2 - m_c^2) \cos 2\theta_C - (m_d^2 - m_s^2)], \\ \theta'_C &= \theta_C + \epsilon \left[\frac{1+r_u^2}{1-r_u^2} (m_d^2 - m_s^2) + \frac{1+r_d^2}{1-r_d^2} (m_u^2 - m_c^2) \right] \sin \theta_C \cos \theta_C. \end{aligned} \tag{C.3}$$

C.3 Modèle à trois générations

Dans le Modèle Standard à trois générations de fermions, on veut bidiagonaliser les matrices M_u'' et M_d'' , c'est-à-dire diagonaliser les produits hermitiens $M_u''M_u''^\dagger$ et $M_d''M_d''^\dagger$:

$$\begin{aligned} U_L^\dagger M_u'' U_R' &= D_u', & U_L^\dagger M_u'' M_u''^\dagger U_L' &= D_u'^2, \\ V_L^\dagger M_d'' V_R' &= D_d', & V_L^\dagger M_d'' M_d''^\dagger V_L' &= D_d'^2, \end{aligned}$$

où D_u' et D_d' sont les matrices de masse renormalisées diagonales.

C.3.1 Diagonalisation des matrices de masse corrigées

Pour le secteur up , en termes des éléments $\epsilon_{u ij}$ de la matrice de correction, on a les expressions

$$\begin{aligned} M_u'' &= \begin{pmatrix} m_u + \epsilon_{u 11} & \epsilon_{u 12} & \epsilon_{u 13} \\ \epsilon_{u 21} & m_c + \epsilon_{u 22} & \epsilon_{u 23} \\ \epsilon_{u 31} & \epsilon_{u 32} & m_t + \epsilon_{u 33} \end{pmatrix}, \\ M_u'' M_u''^\dagger &= \begin{pmatrix} m_u^2 + 2 m_u |\epsilon_{u 11}| & m_u \epsilon_{u 21}^* + m_c \epsilon_{u 12} & m_u \epsilon_{u 31}^* + m_t \epsilon_{u 13} \\ m_u \epsilon_{u 21} + m_c \epsilon_{u 12}^* & m_c^2 + 2 m_c |\epsilon_{u 22}| & m_c \epsilon_{u 32}^* + m_t \epsilon_{u 23} \\ m_u \epsilon_{u 31} + m_t \epsilon_{u 13}^* & m_c \epsilon_{u 32} + m_t \epsilon_{u 23}^* & m_t^2 + 2 m_t |\epsilon_{u 33}| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Elles sont analogues pour les matrices M_d'' et $M_d''M_d''^\dagger$ du secteur $down$. On procède à la diagonalisation explicite de la matrice $M_u''M_u''^\dagger$. La démarche est identique pour la matrice $M_d''M_d''^\dagger$. On résoud l'équation aux valeurs propres $\det(M_u''M_u''^\dagger - \lambda_u \mathbb{I}) = 0$. On a les solutions $\lambda_u = \{m_u^2 + 2 m_u |\epsilon_{u 11}|, m_c^2 + 2 m_c |\epsilon_{u 22}|, m_t^2 + 2 m_t |\epsilon_{u 33}|\}$. Il s'agit maintenant de calculer les vecteurs propres de la matrice 3×3 $M_u''M_u''^\dagger$ ou, plus précisément la matrice U_L des vecteurs propres. On choisit de décomposer le calcul en trois étapes, et de diagonaliser successivement les trois "blocs" 2×2 de la matrice complète. A cet effet, on introduit quelques éléments techniques concernant la diagonalisation des matrices 2×2 .

Une matrice S , 2×2 , réelle et symétrique, est diagonalisable par une matrice O , 2×2 , réelle et orthogonale : $O^T S O = D_S$, où

$$S = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\text{tg } 2\theta = 2c/(b-a)$. Une matrice H , 2×2 , hermitienne est diagonalisable par une matrice U , 2×2 , unitaire : $U^\dagger H U = D_H$, où

$$H = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{i\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & \\ & e^{i\beta} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$, tandis que $\text{tg } 2\theta = 2|c|/(b-a)$ et $\text{tg } \rho = i(c-c^*)/(c+c^*)$. α et β sont arbitraires et peuvent être choisis nuls.

On note que la matrice de correction ϵ_u est *a priori* complexe puisqu'elle comporte des éléments de la matrice de mélange nue, elle-même complexe. Avant de procéder au calcul proprement dit des vecteurs propres de la matrice $M_u''M_u''^\dagger$, on vérifie que l'on peut le faire pour l'un de ses "blocs" 2×2 . Si l'on désigne par H le "bloc" 12, alors on a : $U^\dagger H U = D_H$, où

$$H = \begin{pmatrix} m_u^2 + 2 m_u |\epsilon_{11}| & O_{12} \\ O_{12}^* & m_c^2 + 2 m_c |\epsilon_{22}| \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -e^{i\rho} \theta & e^{i\rho} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

avec $O_{12} = m_u \epsilon_{21}^* + m_c \epsilon_{12}$, $\theta = |m_u \epsilon_{21}^* + m_c \epsilon_{12}| / (m_c^2 - m_u^2)$, $\text{tg } \rho = (O_{12} - O_{12}^*) / (O_{12} + O_{12}^*)$. Pour des raisons de clarté, et ce jusqu'à l'obtention des vecteurs propres, on omet délibérément l'indice u des éléments de la matrice ϵ_u et de toutes les quantités qui s'y rapportent (θ^u , ρ^u et O_{12}^u) et s'y rapporteront (θ_i^u , ρ_i^u et O_{ij}^u). On observe que, si l'angle θ s'écrit comme un terme d'ordre un en ϵ , il n'en va pas de même pour la phase ρ qui est d'ordre zéro en ϵ . On peut maintenant construire la matrice U_L des vecteurs propres de $M_u'' M_u''^\dagger$. On diagonalise successivement les "blocs" 23, 13 et 12 de $M_u'' M_u''^\dagger$. Au cours de chacune des trois étapes, la matrice perdra tour à tour deux éléments non diagonaux. Au terme de la troisième étape, elle sera donc complètement diagonalisée. Par souci de clarté, on renomme les éléments non diagonaux de $M_u'' M_u''^\dagger$:

$$\begin{aligned} O_{12} &= m_u \epsilon_{21}^* + m_c \epsilon_{12} , \\ O_{13} &= m_u \epsilon_{31}^* + m_t \epsilon_{13} , \\ O_{23} &= m_c \epsilon_{32}^* + m_t \epsilon_{23} . \end{aligned} \tag{C.7}$$

Première étape

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -e^{-i\rho_1} \theta_1 \\ & \theta_1 & e^{-i\rho_1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_u^2 + 2m_u |\epsilon_{11}| & O_{12} & O_{13} \\ O_{12}^* & m_c^2 + 2m_c |\epsilon_{22}| & O_{23} \\ O_{13}^* & O_{23}^* & m_t^2 + 2m_t |\epsilon_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \theta_1 \\ & -e^{i\rho_1} \theta_1 & e^{i\rho_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_u^2 + 2m_u |\epsilon_{11}| & O_{12} & O_{13} e^{i\rho_1} \\ O_{12}^* & m_c^2 + 2m_c |\epsilon_{22}| & \\ O_{13}^* e^{-i\rho_1} & & m_t^2 + 2m_t |\epsilon_{33}| \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Deuxième étape

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & -e^{-i\rho_2} \theta_2 \\ & 1 & \\ \theta_2 & & e^{-i\rho_2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_u^2 + 2m_u |\epsilon_{11}| & O_{12} & O_{13} e^{i\rho_1} \\ O_{12}^* & m_c^2 + 2m_c |\epsilon_{22}| & \\ O_{13}^* e^{-i\rho_1} & & m_t^2 + 2m_t |\epsilon_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \theta_2 \\ & 1 & \\ -e^{i\rho_2} \theta_2 & & e^{i\rho_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_u^2 + 2m_u |\epsilon_{11}| & O_{12} & \\ O_{12}^* & m_c^2 + 2m_c |\epsilon_{22}| & \\ & & m_t^2 + 2m_t |\epsilon_{33}| \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Troisième étape

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & -e^{-i\rho_3} \theta_3 \\ & \theta_3 & e^{-i\rho_3} \\ & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_u^2 + 2m_u |\epsilon_{11}| & O_{12} & \\ O_{12}^* & m_c^2 + 2m_c |\epsilon_{22}| & \\ & & m_t^2 + 2m_t |\epsilon_{33}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \theta_3 \\ -e^{i\rho_3} \theta_3 & & e^{i\rho_3} \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_u^2 + 2m_u |\epsilon_{11}| & & \\ & m_c^2 + 2m_c |\epsilon_{22}| & \\ & & m_t^2 + 2m_t |\epsilon_{33}| \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Les angles θ_i et les phases ρ_i intervenant au cours des trois étapes sont définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{|m_c \epsilon_{32}^* + m_t \epsilon_{23}|}{m_t^2 - m_c^2} , & \text{tg } \rho_1 &= \frac{O_{23} - O_{23}^*}{O_{23} + O_{23}^*} , \\ \theta_2 &= \frac{|m_u \epsilon_{31}^* + m_t \epsilon_{13}|}{m_t^2 - m_u^2} , & \text{tg } (\rho_1 + \rho_2) &= \frac{O_{13} - O_{13}^*}{O_{13} + O_{13}^*} , \\ \theta_3 &= \frac{|m_u \epsilon_{21}^* + m_c \epsilon_{12}|}{m_c^2 - m_u^2} , & \text{tg } \rho_3 &= \frac{O_{12} - O_{12}^*}{O_{12} + O_{12}^*} . \end{aligned} \tag{C.8}$$

La matrice des vecteurs propres de $M_u'' M_u''^\dagger$ s'obtient en multipliant les matrices des trois étapes de la diagonalisation :

$$U_L' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \theta_1 \\ -e^{i\rho_1} \theta_1 & e^{i\rho_1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \theta_2 \\ & 1 & \\ -e^{i\rho_2} \theta_2 & e^{i\rho_2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & \\ -e^{i\rho_3} \theta_3 & e^{i\rho_3} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

En termes des éléments $\epsilon_{u ij}$ de la matrice de correction, les matrices des valeurs propres et des vecteurs propres de la partie hermitienne de M_u'' s'expriment finalement :

$$D_u' = \begin{pmatrix} m_u + |\epsilon_{u 11}| & & \\ & m_c + |\epsilon_{u 22}| & \\ & & m_t + |\epsilon_{u 33}| \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

$$U_L' = \begin{pmatrix} 1 & \theta_3^u & \theta_2^u \\ -e^{i\rho_3^u} \theta_3^u & e^{i\rho_3^u} & e^{i\rho_2^u} \theta_1^u \\ -e^{i(\rho_1^u + \rho_2^u)} \theta_2^u & -e^{i(\rho_1^u + \rho_3^u)} \theta_1^u & e^{i(\rho_1^u + \rho_2^u)} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

où l'on a réintroduit les indices u pour distinguer le secteur up du secteur $down$. Précisément, les matrices D_d' et V_L' des valeurs propres et des vecteurs propres de la partie hermitienne de M_d'' s'obtiennent en substituant dans ces expressions les masses m_d , m_s et m_b aux masses m_u , m_c et m_t , ainsi que les indices d aux indices u des éléments des matrices de corrections, des angles θ_i^u et des phases ρ_i^u (et bien entendu des éléments O_{ij}^u non diagonaux de la matrice $M_u'' M_u''^\dagger$). On peut maintenant calculer la matrice de mélange corrigée $K' = U_L'^\dagger K V_L'$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{-i\rho_3^u} \theta_3^u & -e^{-i(\rho_1^u + \rho_2^u)} \theta_2^u \\ \theta_3^u & e^{-i\rho_3^u} & -e^{-i(\rho_1^u + \rho_3^u)} \theta_1^u \\ \theta_2^u & e^{-i\rho_2^u} \theta_1^u & e^{-i(\rho_1^u + \rho_2^u)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 c_3 & c_2 s_3 & s_2 e^{-i\delta} \\ -c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta} & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta} & s_1 c_2 \\ s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta} & -s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta_3^d & \theta_2^d \\ -e^{i\rho_3^d} \theta_3^d & e^{i\rho_3^d} & e^{i\rho_2^d} \theta_1^d \\ -e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d)} \theta_2^d & -e^{i(\rho_1^d + \rho_3^d)} \theta_1^d & e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_2 c_3 & \theta_3^d c_2 c_3 & \theta_2^d c_2 c_3 \\ -\theta_3^u (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i\rho_3^u} & +c_2 s_3 e^{i\rho_3^d} & +\theta_1^d c_2 s_3 e^{i\rho_2^d} \\ -\theta_2^u (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i(\rho_1^u + \rho_3^u)} & -\theta_3^u (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_3^u)} & +s_2 e^{-i\delta} e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d)} \\ -\theta_3^d c_2 s_3 e^{i\rho_3^d} & -\theta_2^u (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} & -\theta_3^u s_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_3^u)} \\ -\theta_2^d s_2 e^{-i\delta} e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d)} & -\theta_1^d s_2 e^{-i\delta} e^{i(\rho_1^d + \rho_3^d)} & -\theta_2^d c_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} \\ \\ \theta_3^u c_2 c_3 & \theta_3^d (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i\rho_3^u} & \theta_2^d (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i\rho_3^u} \\ +(-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i\rho_3^u} & +\theta_3^u c_2 s_3 e^{i\rho_3^d} & +\theta_1^d (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_3^u)} \\ -\theta_1^u (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i(\rho_1^u + \rho_3^u)} & +(c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_3^u)} & +\theta_3^u s_2 e^{-i\delta} e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d)} \\ -\theta_3^d (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_3^u)} & -\theta_1^u (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_1^u - \rho_3^u)} & +s_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_3^u)} \\ -\theta_2^d s_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_3^u)} & -\theta_1^d s_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_3^u)} & -\theta_1^u c_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_1^u - \rho_3^u)} \\ \\ \theta_2^u c_2 c_3 & \theta_3^d (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i(\rho_1^u + \rho_2^u)} & \theta_2^d (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i(\rho_1^u + \rho_2^u)} \\ +\theta_1^u (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i\rho_3^u} & +\theta_2^u c_2 s_3 e^{i\rho_3^d} & +\theta_1^d (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_2^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} \\ +(s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) e^{-i(\rho_1^u + \rho_2^u)} & +\theta_1^u (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_2^u)} & +\theta_2^u s_2 e^{-i\delta} e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d)} \\ -\theta_3^d (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} & +(-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) e^{i(\rho_3^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} & +\theta_1^u s_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_2^u)} \\ -\theta_2^d c_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} & -\theta_1^d c_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_3^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} & +c_1 c_2 e^{i(\rho_1^d + \rho_2^d - \rho_1^u - \rho_2^u)} \end{pmatrix}$$

qui ne correspond pas nécessairement à la matrice de Kobayashi-Maskawa corrigée exprimée dans sa paramétrisation traditionnelle. En effet, puisque les matrices de correction ϵ_u et ϵ_d

sont *a priori* complexes, tous les éléments de K' risquent de l'être. Avant d'identifier dans K' les angles de mélange corrigés, il convient de la multiplier à gauche et à droite par les matrices unitaires diagonales appropriées. Il est dès lors incorrect d'affirmer que $K'_{13} = s'_2 e^{-i\delta'}$ ou que $K'_{23} = s'_1 c'_2$. Le plus sûr moyen d'extraire de K' les angles de mélange corrigés consiste à travailler exclusivement en termes de modules. Par exemple, l'examen attentif des modules des éléments K'_{13} , K'_{23} , K'_{12} et K'_{21} permet de conclure sans ambiguïté que

$$\begin{aligned}\theta'_2 &= \arcsin |K'_{13}|, \\ \theta'_1 &= \arcsin \sqrt{\frac{|K'_{23}|^2}{1 - |K'_{13}|^2}}, \\ \theta'_3 &= \arcsin \sqrt{\frac{|K'_{12}|^2}{1 - |K'_{13}|^2}}, \\ \delta' &= \arccos \frac{|K'_{21}|^2(1 - |K'_{13}|^2)^2 - |K'_{12}K'_{33}|^2 - |K'_{11}K'_{13}K'_{23}|^2}{2|K'_{11}K'_{12}K'_{13}K'_{23}K'_{33}|}.\end{aligned}$$

En développant (fastidieusement) ces identités, on aboutit à l'expression des angles de mélange corrigés en termes des quantités θ_i^u , θ_i^d , ρ_i^u et ρ_i^d , c'est-à-dire, indirectement, en termes des éléments $\epsilon_{u ij}$ et $\epsilon_{d ij}$:

$$\begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \\ \theta'_3 \\ \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^d \\ \theta_2^d \\ \theta_3^d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^u \\ \theta_2^u \\ \theta_3^u \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}A_d &= \begin{pmatrix} \frac{c_3}{c_2} \cos(\rho_1^d) & \frac{-s_3}{c_2} \cos(\rho_1^d + \rho_2^d) & 0 \\ s_3 \cos(-\delta + \rho_1^d) & c_3 \cos(-\delta + \rho_1^d + \rho_2^d) & 0 \\ \frac{-s_2 c_3}{c_2} \cos(-\delta + \rho_1^d) & \frac{s_2 s_3}{c_2} \cos(-\delta + \rho_1^d + \rho_2^d) & \cos(\rho_3^d) \\ \frac{s_2^2 c_3^2 - s_3^2}{s_2 c_2 s_3} \sin(-\delta + \rho_1^d) + c_3 \frac{c_1^2 - s_1^2}{s_1 c_1 c_2} \sin(\rho_1^d) & \frac{s_2^2 s_3^2 - c_3^2}{s_2 c_2 c_3} \sin(-\delta + \rho_1^d + \rho_2^d) + s_3 \frac{s_1^2 - c_1^2}{s_1 c_1 c_2} \sin(\rho_1^d + \rho_2^d) & \frac{1}{s_3 c_3} \sin(\rho_3^d) \end{pmatrix}, \\ A_u &= \begin{pmatrix} \cos(\rho_1^u) & \frac{s_1 s_2}{c_2} \cos(-\delta + \rho_1^u + \rho_2^u) & \frac{-c_1 s_2}{c_2} \cos(-\delta + \rho_3^u) \\ 0 & c_1 \cos(-\delta + \rho_1^u + \rho_2^u) & s_1 \cos(-\delta + \rho_3^u) \\ 0 & \frac{-s_1}{c_2} \cos(\rho_1^u + \rho_2^u) & \frac{c_1}{c_2} \cos(\rho_3^u) \\ \frac{1}{s_1 c_1} \sin(\rho_1^u) & \frac{s_1^2 s_2^2 - c_1^2}{c_1 s_2 c_2} \sin(-\delta + \rho_1^u + \rho_2^u) + s_1 \frac{s_3^2 - c_3^2}{c_2 s_3 c_3} \sin(\rho_1^u + \rho_2^u) & \frac{c_1^2 s_2^2 - s_1^2}{s_1 s_2 c_2} \sin(-\delta + \rho_3^u) + c_1 \frac{c_3^2 - s_3^2}{c_2 s_3 c_3} \sin(\rho_3^u) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

sont des matrices 4×3 . Rappelons que les quantités θ_i^u , θ_i^d , ρ_i^u et ρ_i^d sont données par les équations (C.8), tandis que les quantités O_{ij}^u et O_{ij}^d sont définies par les équations (C.7). De l'équation (C.9), on tire l'expression des masses corrigées :

$$\begin{aligned}m'_u &= m_u + |\epsilon_{u 11}|, & m'_c &= m_c + |\epsilon_{u 22}|, & m'_t &= m_t + |\epsilon_{u 33}|, \\ m'_d &= m_d + |\epsilon_{d 11}|, & m'_s &= m_s + |\epsilon_{d 22}|, & m'_b &= m_b + |\epsilon_{d 33}|.\end{aligned}$$

Comme dans le modèle à deux générations, l'expression des masses corrigées n'implique que les éléments diagonaux des matrices de correction, tandis que l'expression des angles corrigés n'implique que les éléments non diagonaux des matrices de correction.

C.3.2 Les matrices de correction

Il ne reste plus qu'à calculer les matrices de corrections ϵ_u et ϵ_d définies à la fin de la section C.1. On a :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{u11} &= \epsilon m_u [m_d^2 c_2^2 c_3^2 + m_s^2 c_2^2 s_3^2 + m_t^2 s_2^2 - m_u^2], \\
\epsilon_{u12} &= \epsilon m_c [m_d^2 c_2 c_3 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) + m_s^2 c_2 s_3 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) + m_b^2 s_1 c_2 s_2 e^{-i\delta}], \\
\epsilon_{u13} &= \epsilon m_t [m_d^2 c_2 c_3 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) + m_s^2 c_2 s_3 (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) + m_b^2 c_1 c_2 s_2 e^{-i\delta}], \\
\epsilon_{u21} &= \epsilon m_u [m_d^2 c_2 c_3 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) + m_s^2 c_2 s_3 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) + m_b^2 s_1 c_2 s_2 e^{i\delta}], \\
\epsilon_{u22} &= \epsilon m_c [m_d^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) + m_s^2 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) + m_b^2 s_1^2 c_2^2 - m_c^2], \\
\epsilon_{u23} &= \epsilon m_t [m_d^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) + m_s^2 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) + m_b^2 s_1 c_2 c_1 c_2], \\
\epsilon_{u31} &= \epsilon m_u [m_d^2 c_2 c_3 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) + m_s^2 c_2 s_3 (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) + m_b^2 c_1 c_2 s_2 e^{i\delta}], \\
\epsilon_{u32} &= \epsilon m_c [m_d^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) + m_s^2 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) + m_b^2 s_1 c_2 c_1 c_2], \\
\epsilon_{u33} &= \epsilon m_t [m_d^2 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) + m_s^2 (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) + m_b^2 c_1^2 c_2^2 - m_t^2], \\
\\
\epsilon_{d11} &= \epsilon m_d [m_u^2 c_2^2 c_3^2 + m_c^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) + m_t^2 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) - m_d^2], \\
\epsilon_{d12} &= \epsilon m_s [m_u^2 c_2 c_3 c_2 s_3 + m_c^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) + m_t^2 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta})], \\
\epsilon_{d13} &= \epsilon m_b [m_u^2 c_2 c_3 s_2 e^{-i\delta} + m_c^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) s_1 c_2 + m_t^2 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{-i\delta}) c_1 c_2], \\
\epsilon_{d21} &= \epsilon m_d [m_u^2 c_2 c_3 c_2 s_3 + m_c^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) + m_t^2 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{-i\delta})], \\
\epsilon_{d22} &= \epsilon m_s [m_u^2 c_2^2 s_3^2 + m_c^2 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) + m_t^2 (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) - m_s^2], \\
\epsilon_{d23} &= \epsilon m_b [m_u^2 c_2 s_3 s_2 e^{-i\delta} + m_c^2 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) s_1 c_2 + m_t^2 (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{-i\delta}) c_1 c_2], \\
\epsilon_{d31} &= \epsilon m_d [m_u^2 c_2 c_3 s_2 e^{i\delta} + m_c^2 (-c_1 s_3 - s_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) s_1 c_2 + m_t^2 (s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 e^{i\delta}) c_1 c_2], \\
\epsilon_{d32} &= \epsilon m_s [m_u^2 c_2 s_3 s_2 e^{i\delta} + m_c^2 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) s_1 c_2 + m_t^2 (-s_1 c_3 - c_1 s_2 s_3 e^{i\delta}) c_1 c_2], \\
\epsilon_{d33} &= \epsilon m_b [m_u^2 s_2^2 + m_c^2 s_1^2 c_2^2 + m_t^2 c_1^2 c_2^2 - m_b^2].
\end{aligned}$$

On insère ces éléments dans les dernières expressions de la sous-section C.3.1. Définissant les rapports nus $r_{uc} \equiv m_u/m_c$, $r_{ut} \equiv m_u/m_t$, $r_{db} \equiv m_d/m_b$ et $r_{sb} \equiv m_s/m_b$, on obtient les rapports de masse et les angles de mélange corrigés $r'_{uc} = r_{uc} + \delta r_{uc}$, $r'_{ut} = r_{ut} + \delta r_{ut}$, $r'_{db} = r_{db} + \delta r_{db}$, $r'_{sb} = r_{sb} + \delta r_{sb}$, $\theta'_1 = \theta_1 + \delta\theta_1$, $\theta'_2 = \theta_2 + \delta\theta_2$, $\theta'_3 = \theta_3 + \delta\theta_3$ et $\delta' = \delta + \delta\delta$, avec pour

$$\delta r_{uc}/\epsilon,$$

$$r_{uc} \left\{ m_d^2 (c_2^2 c_3^2 - c_1^2 s_3^2 - s_1^2 s_2^2 c_3^2 - 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta) + m_s^2 (c_2^2 s_3^2 - c_1^2 c_3^2 - s_1^2 s_2^2 s_3^2 + 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta) + m_b^2 (s_2^2 - s_1^2 c_2^2) - (m_u^2 - m_c^2) \right\};$$

$$\delta r_{ut}/\epsilon,$$

$$r_{ut} \left\{ m_d^2 (c_2^2 c_3^2 - s_1^2 s_3^2 - c_1^2 s_2^2 c_3^2 + 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta) + m_s^2 (c_2^2 s_3^2 - s_1^2 c_3^2 - c_1^2 s_2^2 s_3^2 - 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta) + m_b^2 (s_2^2 - c_1^2 c_2^2) - (m_u^2 - m_t^2) \right\};$$

$$\delta r_{db}/\epsilon,$$

$$r_{db} \left\{ m_u^2 (c_2^2 c_3^2 - s_2^2) + m_c^2 (c_1^2 s_3^2 + s_1^2 s_2^2 c_3^2 + 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1^2 c_2^2) + m_t^2 (s_1^2 s_3^2 + c_1^2 s_2^2 c_3^2 - 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - c_1^2 c_2^2) - (m_d^2 - m_b^2) \right\};$$

$$\delta r_{sb}/\epsilon,$$

$$r_{sb} \left\{ m_u^2 (c_2^2 s_3^2 - s_2^2) + m_c^2 (c_1^2 c_3^2 + s_1^2 s_2^2 s_3^2 - 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1^2 c_2^2) + m_t^2 (s_1^2 c_3^2 + c_1^2 s_2^2 s_3^2 + 2s_1 c_1 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - c_1^2 c_2^2) - (m_s^2 - m_b^2) \right\};$$

$\delta\theta_1/\epsilon,$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_b^2 + m_s^2}{m_b^2 - m_s^2} [m_u^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta + m_c^2 (s_1 c_1 c_3^2 - s_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta) + m_t^2 (-s_1 c_1 c_3^2 - c_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta)] \\
& - \frac{m_b^2 + m_d^2}{m_b^2 - m_d^2} [m_u^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta + m_c^2 (-s_1 c_1 s_3^2 - s_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta) + m_t^2 (s_1 c_1 s_3^2 - c_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta)] \\
& - \frac{m_t^2 + m_c^2}{m_t^2 - m_c^2} [m_d^2 (s_1 c_1 (-s_3^2 + s_2^2 c_3^2) + s_2 s_3 c_3 (c_1^2 - s_1^2) \cos \delta) + m_s^2 (s_1 c_1 (-c_3^2 + s_2^2 s_3^2) + s_2 s_3 c_3 (s_1^2 - c_1^2) \cos \delta) + m_b^2 s_1 c_1 c_2^2] \\
& - \frac{m_t^2 + m_u^2}{m_t^2 - m_u^2} [m_d^2 (s_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1 c_1 s_2^2 c_3^2) + m_s^2 (-s_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1 c_1 s_2^2 s_3^2) + m_b^2 s_1 c_1 s_2^2] \\
& + \frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} [m_d^2 (-c_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1 c_1 s_2^2 c_3^2) + m_s^2 (c_1^2 s_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1 c_1 s_2^2 s_3^2) + m_b^2 s_1 c_1 s_2^2];
\end{aligned}$$

 $\delta\theta_2/\epsilon,$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_b^2 + m_s^2}{m_b^2 - m_s^2} [m_u^2 s_2 c_2 s_3^2 + m_c^2 (s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1^2 s_2 c_2 s_3^2) + m_t^2 (-s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - c_1^2 s_2 c_2 s_3^2)] \\
& + \frac{m_b^2 + m_d^2}{m_b^2 - m_d^2} [m_u^2 s_2 c_2 c_3^2 + m_c^2 (-s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1^2 s_2 c_2 c_3^2) + m_t^2 (s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - c_1^2 s_2 c_2 c_3^2)] \\
& - \frac{m_t^2 + m_u^2}{m_t^2 - m_u^2} [m_d^2 (s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - c_1^2 s_2 c_2 c_3^2) + m_s^2 (-s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - c_1^2 s_2 c_2 s_3^2) + m_b^2 c_1^2 s_2 c_2] \\
& - \frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} [m_d^2 (-s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1^2 s_2 c_2 c_3^2) + m_s^2 (s_1 c_1 c_2 s_3 c_3 \cos \delta - s_1^2 s_2 c_2 s_3^2) + m_b^2 s_1^2 s_2 c_2];
\end{aligned}$$

 $\delta\theta_3/\epsilon,$

$$\begin{aligned}
& - \frac{m_b^2 + m_s^2}{m_b^2 - m_s^2} [m_u^2 s_2^2 s_3 c_3 + m_c^2 (s_1 c_1 s_2 c_3^2 \cos \delta - s_1^2 s_2^2 s_3 c_3) + m_t^2 (-s_1 c_1 s_2 c_3^2 \cos \delta - c_1^2 s_2^2 s_3 c_3)] \\
& + \frac{m_b^2 + m_d^2}{m_b^2 - m_d^2} [m_u^2 s_2^2 s_3 c_3 + m_c^2 (-s_1 c_1 s_2 s_3^2 \cos \delta - s_1^2 s_2^2 s_3 c_3) + m_t^2 (s_1 c_1 s_2 s_3^2 \cos \delta - c_1^2 s_2^2 s_3 c_3)] \\
& + \frac{m_t^2 + m_d^2}{m_t^2 - m_d^2} [m_u^2 c_2^2 s_3 c_3 + m_c^2 (s_3 c_3 (-c_1^2 + s_1^2 s_2^2) + s_1 c_1 s_2 (s_3^2 - c_3^2) \cos \delta) + m_t^2 (s_3 c_3 (-s_1^2 + c_1^2 s_2^2) + s_1 c_1 s_2 (c_3^2 - s_3^2) \cos \delta)] \\
& + \frac{m_t^2 + m_u^2}{m_t^2 - m_u^2} [m_d^2 (s_1^2 s_3 c_3 - s_1 c_1 s_2^2 c_3^2 \cos \delta) + m_s^2 (-s_1^2 s_3 c_3 - s_1 c_1 s_2 s_3^2 \cos \delta) + m_b^2 s_1 c_1 s_2 \cos \delta] \\
& - \frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} [m_d^2 (-c_1^2 s_3 c_3 - s_1 c_1 s_2 c_3^2 \cos \delta) + m_s^2 (c_1^2 s_3 c_3 - s_1 c_1 s_2 s_3^2 \cos \delta) + m_b^2 s_1 c_1 s_2 \cos \delta];
\end{aligned}$$

 $\delta\delta/\epsilon,$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_b^2 + m_s^2}{m_b^2 - m_s^2} [m_u^2 (s_2 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 - s_1^2}{s_1 c_1 c_2} + m_c^2 (-s_1 c_1 c_2 c_3 \frac{s_2^2 c_3^2 - s_3^2}{s_2 c_2 s_3} - s_1^2 s_2 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 - s_1^2}{s_1 c_1 c_2}) + m_t^2 (s_1 c_1 c_2 c_3 \frac{s_2^2 c_3^2 - s_3^2}{s_2 c_2 s_3} - c_1^2 s_2 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 - s_1^2}{s_1 c_1 c_2})] \sin \delta \\
& + \frac{m_b^2 + m_d^2}{m_b^2 - m_d^2} [m_u^2 (-s_2 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 - s_1^2}{s_1 c_1 c_2}) + m_c^2 (s_1 c_1 c_2 s_3 \frac{s_2^2 s_3^2 - c_3^2}{s_2 c_2 c_3} + s_1^2 s_2 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 - s_1^2}{s_1 c_1 c_2}) + m_t^2 (-s_1 c_1 c_2 s_3 \frac{s_2^2 s_3^2 - c_3^2}{s_2 c_2 c_3} + c_1^2 s_2 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 - s_1^2}{s_1 c_1 c_2})] \sin \delta \\
& + \frac{m_s^2 + m_d^2}{m_s^2 - m_d^2} [\frac{s_1 c_1 s_2}{s_3 c_3} (-m_c^2 + m_t^2)] \sin \delta \\
& - \frac{m_t^2 + m_c^2}{m_t^2 - m_c^2} [\frac{s_2 s_3 c_3}{s_1 c_1} (m_d^2 - m_s^2)] \sin \delta \\
& - \frac{m_t^2 + m_u^2}{m_t^2 - m_u^2} [m_d^2 (-s_1 c_2 s_3 c_3 \frac{s_1^2 s_2^2 - c_1^2}{c_1 s_2 c_2} + s_1 c_1 s_2 c_2 c_3^2 \frac{c_3^2 - s_3^2}{c_2 s_3 c_3}) + m_s^2 (s_1 c_2 s_3 c_3 \frac{s_1^2 s_2^2 - c_1^2}{c_1 s_2 c_2} + s_1 c_1 s_2 c_2 s_3^2 \frac{c_3^2 - s_3^2}{c_2 s_3 c_3}) + m_b^2 (-s_1 c_1 s_2 c_2 \frac{c_3^2 - s_3^2}{c_2 s_3 c_3})] \sin \delta \\
& - \frac{m_c^2 + m_u^2}{m_c^2 - m_u^2} [m_d^2 (c_1 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 s_2^2 - s_1^2}{s_1 s_2 c_2} - s_1 c_1 s_2 c_2 c_3^2 \frac{c_3^2 - s_3^2}{c_2 s_3 c_3}) + m_s^2 (-c_1 c_2 s_3 c_3 \frac{c_1^2 s_2^2 - s_1^2}{s_1 s_2 c_2} - s_1 c_1 s_2 c_2 s_3^2 \frac{c_3^2 - s_3^2}{c_2 s_3 c_3}) + m_b^2 (s_1 c_1 s_2 c_2 \frac{c_3^2 - s_3^2}{c_2 s_3 c_3})] \sin \delta.
\end{aligned}$$

Annexe D

Le modèle sigma linéaire

On considère le modèle sigma linéaire dans sa phase symétrique¹, c'est à dire gouverné par le lagrangien (2.1) dont on modifie le signe du terme de masse des scalaires : $\mu^2 \rightarrow -\mu^2$. Le potentiel est minimal en $\boldsymbol{\pi} = \sigma = 0$; il n'y a pas brisure spontanée de la symétrie. Puisqu'on s'intéresse au comportement ultraviolet du modèle, les corrections radiatives à la constante de couplage g_y peuvent être calculées dans l'une ou l'autre phase, indistinctement. En outre, on négligera de considérer les éventuelles divergences infrarouges occasionnées par l'absence de terme de masse pour les fermions dans la phase symétrique du modèle.

On examine la renormalisation, à l'ordre d'une boucle, de la constante de couplage g_y . On a le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\partial^\mu\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 + \bar{\Psi}i\not{\partial}\Psi - g_y\bar{\Psi}(\sigma + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\Psi.$$

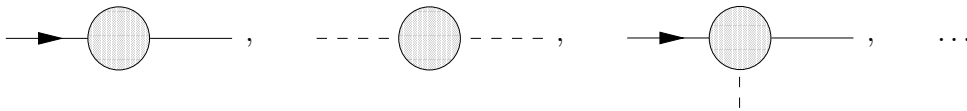
Les champs fermioniques et scalaires sont renormalisés :

$$\begin{aligned}\Psi &\longmapsto \Psi' = Z_\Psi^{-\frac{1}{2}}\Psi, \\ \boldsymbol{\pi} &\longmapsto \boldsymbol{\pi}' = Z_\phi^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\pi}, \\ \sigma &\longmapsto \sigma' = Z_\phi^{-\frac{1}{2}}\sigma,\end{aligned}$$

ainsi que la constante de couplage

$$g_y \longmapsto g'_y = \frac{Z_\Psi Z_\phi^{\frac{1}{2}}}{Z_V} g_y,$$

où les constantes de renormalisation Z_Ψ , Z_ϕ et Z_V (divergentes) sont calculées à partir des diagrammes



¹Le lagrangien (2.1) décrit le modèle sigma linéaire dans la phase dite de Goldstone, i.e. conduisant à la brisure spontanée de la symétrie.

respectivement. On ne s'attardera pas sur Z_ϕ , l'intérêt porté à la renormalisation de la constante de couplage se limitant au calcul de Z_Ψ et Z_V . A l'ordre d'une boucle, on a pour les parties divergentes des diagrammes concernés :

$$\begin{aligned}
 \text{---} \blacktriangleright \text{---} \text{---} \text{---} &= ig_y^2 \not{p} \epsilon + \text{t.f.}, \\
 \text{---} \blacktriangleright \text{---} &= -ig_y^3 \epsilon + \text{t.f.}
 \end{aligned}$$

avec $\epsilon = \left(\frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)$ où Λ est un *cut-off* et μ une échelle d'énergie arbitraire. Et les constantes de renormalisation recherchées s'écrivent alors

$$Z_\Psi = Z_V = 1 - \frac{g_y^2}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}. \quad (\text{D.1})$$

On peut trouver confirmation de ces résultats dans [94, 93]. L'identité $Z_\Psi = Z_V$ est valable à l'ordre d'une boucle; elle ne semble pas protégée par la présence d'une symétrie qui en garantirait la validité à tous les ordres en théorie de la perturbation.

Annexe E

Théorèmes

E.1 Système d'équations différentielles

On résoud le système (6.9) d'équations différentielles aux dérivées partielles. Il se réécrit

$$\begin{aligned}\frac{1+x^2}{1-x^2}u - xu_{,x} + \frac{1+y^2}{1-y^2} &= 0, \\ \frac{1+y^2}{1-y^2}u - yu_{,y} + \frac{1+x^2}{1-x^2} &= 0,\end{aligned}\tag{E.1}$$

avec $u(x, y) = G(r_u, r_d)$. Sa résolution se ramène à la résolution de deux équations différentielles ordinaires identiques :

$$\frac{1+z^2}{1-z^2}f - z\frac{df}{dz} + C = 0,\tag{E.2}$$

où $f(z) = u(z, y)$ et $C = C(y) = (1+y^2)/(1-y^2)$ (ou bien $f(z) = u(x, z)$ et $C = C(x) = (1+x^2)/(1-x^2)$). La solution générale de l'équation homogène ($C = 0$) s'écrit :

$$f(z) = \alpha \frac{z}{1-z^2},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation inhomogène (E.2) admet la solution particulière

$$f(z) = -C \frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

On obtient la solution générale de l'équation inhomogène en additionnant la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation inhomogène :

$$f(z) = \alpha(y) \frac{z}{1-z^2} - \frac{1+y^2}{1-y^2} \frac{1+z^2}{1-z^2},$$

où on a remplacé C par $C(y)$ et α par $\alpha(y)$. On revient alors au système (E.1), dont on exprime les solutions

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \alpha(y) \frac{x}{1-x^2} - \frac{1+y^2}{1-y^2} \frac{1+x^2}{1-x^2}, \\ u(x, y) &= \alpha(x) \frac{y}{1-y^2} - \frac{1+y^2}{1-y^2} \frac{1+x^2}{1-x^2},\end{aligned}$$

que l'on peut identifier l'une à l'autre afin de déterminer α . On obtient finalement la solution générale du système (E.1) :

$$u(x, y) = \frac{-(1+x^2)(1+y^2) + 2\lambda xy}{(1-x^2)(1-y^2)},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration du système.

E.2 Invariants et valeurs propres

On montre, sous forme de proposition, l'équivalence entre l'égalité des rapports de valeurs propres de la matrice A , et l'égalité des constantes Λ_1 et Λ_2 .

Proposition. Soit une matrice A , 3×3 , hermitienne et définie positive. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, ses valeurs propres. Alors

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr } A \cdot (\det A^{-1})^{\frac{1}{3}} = \text{tr } A^{-1} \cdot (\det A)^{\frac{1}{3}} .$$

La condition est nécessaire. On montre aisément que le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$ de la matrice A s'écrit au signe près :

$$\lambda^3 - \text{tr } A \cdot \lambda^2 + \text{tr } A^c \cdot \lambda - \det A ,$$

où A^c est la matrice des cofacteurs de A . Or $A^{cT} = A^{-1} \cdot \det A$. Donc $\text{tr } A^c = \text{tr } A^{-1} \cdot \det A$. On réécrit le polynôme caractéristique :

$$\lambda^3 - \text{tr } A \cdot \lambda^2 + \text{tr } A^{-1} \cdot \det A \cdot \lambda - \det A .$$

Si $\text{tr } A \cdot (\det A^{-1})^{\frac{1}{3}} = \text{tr } A^{-1} \cdot (\det A)^{\frac{1}{3}}$, alors on a :

$$\lambda^3 - \text{tr } A \cdot \lambda^2 + \text{tr } A \cdot (\det A)^{\frac{1}{3}} \cdot \lambda - \det A .$$

Définissant $a \equiv \text{tr } A$ et $b^3 \equiv \det A$, on résoud l'équation

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + ab\lambda - b^3 = 0 .$$

Les trois solutions, réelles et positives, s'écrivent

$$\lambda_1 = \frac{(a-b) - \sqrt{a^2 - 2ab - 3b^2}}{2} \leq \lambda_2 = b \leq \lambda_3 = \frac{(a-b) + \sqrt{a^2 - 2ab - 3b^2}}{2} ,$$

si $4b \leq a$; sinon, la hiérarchie est inversée¹. On a immédiatement :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} .$$

La condition est suffisante. On exprime les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A en fonction de ses valeurs propres :

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 , \\ \text{tr } A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \\ \text{tr } A^{-1} &= 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + 1/\lambda_3 . \end{aligned}$$

¹Les solutions de l'équation doivent être réelles puisque la matrice A dont elles sont les valeurs propres est hermitienne. Elles sont réelles pour $a \leq -b$ ou $3b \leq a$. En outre, on sait que a et b sont strictement positifs par construction (trace et déterminant d'une matrice définie positive). Donc $3b \leq a$. Si $3b \leq a \leq 4b$, alors la hiérarchie est inversée, i.e. $\tilde{\lambda}_1 \equiv \lambda_3 \leq \tilde{\lambda}_2 \equiv \lambda_2 \leq \tilde{\lambda}_3 \equiv \lambda_1$, avec, bien entendu $\tilde{\lambda}_1/\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_2/\tilde{\lambda}_3$.

Définissant $\Theta_{12} \equiv \lambda_1/\lambda_2$ et $\Theta_{23} \equiv \lambda_2/\lambda_3$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A \cdot (\det A^{-1})^{\frac{1}{3}} &= (\Theta_{12}^2 \Theta_{23})^{\frac{1}{3}} + (\Theta_{23}/\Theta_{12})^{\frac{1}{3}} + (\Theta_{12} \Theta_{23}^2)^{-\frac{1}{3}} , \\ \operatorname{tr} A^{-1} \cdot (\det A)^{\frac{1}{3}} &= (\Theta_{12} \Theta_{23}^2)^{\frac{1}{3}} + (\Theta_{12}/\Theta_{23})^{\frac{1}{3}} + (\Theta_{12}^2 \Theta_{23})^{-\frac{1}{3}} . \end{aligned}$$

En identifiant Θ_{12} à Θ_{23} dans ces expressions, on obtient :

$$\operatorname{tr} A \cdot (\det A^{-1})^{\frac{1}{3}} = \operatorname{tr} A^{-1} \cdot (\det A)^{\frac{1}{3}} .$$

Conclusion. On a montré que

$$\Theta_{12} = \Theta_{23} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 ,$$

où $\Lambda_1 \equiv \operatorname{tr} A \cdot (\det A^{-1})^{\frac{1}{3}}$ et $\Lambda_2 \equiv \operatorname{tr} A^{-1} \cdot (\det A)^{\frac{1}{3}}$. Dans ces conditions, si $\Lambda \equiv \Lambda_1 = \Lambda_2 \gg 1$, alors $\Theta \equiv \Theta_{12} = \Theta_{23}$ est approximativement identifié à Λ ou $1/\Lambda$. Or on a défini $r \leq 1$. Alors on a

$$\Theta \simeq \frac{1}{\Lambda} .$$

Bibliographie

- [1] Aristote, *Métaphysique* (4ème siècle A.C.N.), Librairie Philosophique J. Vrin, **I**, 1 (1991).
- [2] Y. Nambu, Phys. Rev. **117**, 648 (1960).
- [3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [4] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [5] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [6] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [7] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
- [8] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).
- [9] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
- [10] P. W. Higgs, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [11] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [12] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [13] A. Salam, in *Proceedings Of the Nobel Symposium*, Lerum, Sweden, 367-377 (1968)
- [14] M. J. G. Veltman, *Reflections on the Higgs system*, CERN-97-05, (1997).
- [15] J. S. Schwinger, Annals Phys. **2**, 407 (1957).
- [16] M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).
- [17] B. W. Lee, Nucl. Phys. **B9**, 649 (1969).
- [18] J.-L. Gervais and B. W. Lee, Nucl. Phys. **B12**, 627 (1969).
- [19] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model*, Cambridge University Press (1992).

- [20] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, Phys. Rev. **110**, 1178 (1958).
- [21] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford Science Publications (1989).
- [22] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. **D6**, 2977 (1972).
- [23] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **29**, 1698 (1972).
- [24] D. A. Ross and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B95**, 135 (1975).
- [25] G. B. Gelmini and M. Roncadelli, Phys. Lett. **B99**, 411 (1981).
- [26] M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B123**, 89 (1977).
- [27] J. J. van der Bij and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. **B231**, 205 (1984).
- [28] J. J. van der Bij and F. Hoogeveen, Nucl. Phys. **B283**, 477 (1987).
- [29] D. C. Kennedy and P. Langacker, Phys. Rev. Lett. **65**, 2967 (1990).
- [30] D. C. Kennedy and P. Langacker, Phys. Rev. **D44**, 1591 (1991).
- [31] P. Langacker and M.-x. Luo, Phys. Rev. **D44**, 817 (1991).
- [32] K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. **D66**, 010001 (2002).
- [33] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **46**, 255 (1974).
- [34] S. Weinberg, Trans. New York Acad. Sci. **38**, 185 (1977).
- [35] H. Georgi and A. Pais, Phys. Rev. **D10**, 539 (1974).
- [36] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Lett. **B70**, 418 (1977).
- [37] H. Fritzsch, Phys. Lett. **B70**, 436 (1977).
- [38] S. Pakvasa and H. Sugawara, Phys. Lett. **B73**, 61 (1978).
- [39] H. Harari, H. Haut, and J. Weyers, Phys. Lett. **B78**, 459 (1978).
- [40] D. Wyler, Phys. Rev. **D19**, 330 (1979).
- [41] R. Barbieri, R. Gatto, and F. Strocchi, Phys. Lett. **B74**, 344 (1978).
- [42] R. Gatto, G. Morchio, and F. Strocchi, Phys. Lett. **B83**, 348 (1979).
- [43] R. Gatto, G. Morchio, and F. Strocchi, Phys. Lett. **B80**, 265 (1979).
- [44] A. Rasin, Preprint hep-ph/9708216 (1997).

- [45] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963).
- [46] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [47] G. C. Branco, L. Lavoura, and J. P. Silva, *CP violation*, Oxford Science Publications (1999).
- [48] H. Fusaoka and Y. Koide, Phys. Rev. **D57**, 3986 (1998).
- [49] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976).
- [50] R. D. Peccei, Preprint hep-ph/9606475 (1996).
- [51] V. Baluni, Phys. Rev. **D19**, 2227 (1979).
- [52] R. J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano, and E. Witten, Phys. Lett. **B88**, 123 (1979).
- [53] R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).
- [54] R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. **D16**, 1791 (1977).
- [55] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
- [56] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978).
- [57] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **40**, 279 (1978).
- [58] A. E. Nelson, Phys. Lett. **B136**, 387 (1984).
- [59] S. M. Barr, Phys. Rev. Lett. **53**, 329 (1984).
- [60] L. Bento and G. C. Branco, Phys. Lett. **B245**, 599 (1990).
- [61] L. Bento, G. C. Branco, and P. A. Parada, Phys. Lett. **B267**, 95 (1991).
- [62] A. J. Buras and R. Fleischer, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **15**, 65 (1998).
- [63] A. J. Buras, Preprint hep-ph/9806471 (1998).
- [64] F. Abe *et al.*, Phys. Rev. **D57**, 3811 (1998).
- [65] J. Pestieau and P. Roy, Phys. Rev. Lett. **23**, 349 (1969).
- [66] C. Deom, Z. Fang, and J. Pestieau, Phys. Lett. **B151**, 417 (1985).
- [67] G. C. Branco and J. M. Gerard, Phys. Lett. **B124**, 415 (1983).
- [68] M. Buysse, Preprint hep-ph/0205213 (2002).
- [69] P. Q. Hung, A. J. Buras, and J. D. Bjorken, Phys. Rev. **D25**, 805 (1982).

- [70] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).
- [71] A. J. Buras, J. R. Ellis, M. K. Gaillard, and D. V. Nanopoulos, Nucl. Phys. **B135**, 66 (1978).
- [72] H. Georgi, H. R. Quinn, and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **33**, 451 (1974).
- [73] T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford Science Publications (1984).
- [74] R. Gatto, G. Sartori, and M. Tonin, Phys. Lett. **B28**, 128 (1968).
- [75] N. Cabibbo and L. Maiani, Phys. Lett. **B28**, 131 (1968).
- [76] S. K. Oh and J. K. Kim, Phys. Lett. **B102**, 312 (1981).
- [77] C. Balzereit, T. Mannel, and B. Plumper, Eur. Phys. J. **C9**, 197 (1999).
- [78] M. Buysse, à paraître (2002).
- [79] P. Ramond, *Journeys beyond the standard model*, Perseus Books, 1999.
- [80] P. H. Chankowski and S. Pokorski, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 575 (2002).
- [81] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [82] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2644 (1999).
- [83] S. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3999 (2000).
- [84] J. N. Bahcall, P. I. Krastev, and A. Y. Smirnov, Phys. Rev. **D58**, 096016 (1998).
- [85] J. N. Bahcall, P. I. Krastev, and A. Y. Smirnov, JHEP **05**, 015 (2001).
- [86] J. N. Bahcall, M. C. Gonzalez-Garcia, and C. Pena-Garay, JHEP **07**, 054 (2002).
- [87] Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002).
- [88] Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002).
- [89] R. D. Peccei, AIP Conf. Proc. **490**, 80 (1999).
- [90] J. R. Ellis and M. K. Gaillard, Nucl. Phys. **B150**, 141 (1979).
- [91] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley (1995)
- [92] C. Q. Geng and R. E. Marshak, Phys. Rev. **D39**, 693 (1989).

- [93] H. J. Strubbe, Nucl. Phys. **B38**, 299 (1972).
- [94] D. Lurie and G. B. Tupper, Phys. Rev. **D47**, 3580 (1993).
- [95] S. Narison, Phys. Lett. **B358**, 113 (1995).
- [96] J. F. Donoghue, B. R. Holstein, and D. Wyler, Phys. Rev. Lett. **69**, 3444 (1992).
- [97] V. Barger, D. Marfatia, K. Whisnant, and B. P. Wood, Phys. Lett. **B537**, 179 (2002).
- [98] F.-S. Ling and P. Ramond, Phys. Lett. **B543**, 29 (2002).
- [99] K. Eguchi *et al.*, Preprint hep-ex/0212021 (2002).
- [100] J. N. Bahcall, M. C. Gonzalez-Garcia, and C. Pena-Garay, Preprint hep-ph/0212147 (2002).