



UCL - Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences
Département de Physique
Institut de Physique Nucléaire

Configurations de vortex magnétiques
dans des cylindres mésoscopiques supraconducteurs

Geoffrey Stenuit
Sous la direction du Professeur **Jan Govaerts**

*Dissertation présentée en vue de l'obtention du titre de
Docteur en sciences*

Juillet 2004

Remerciements...

Je tiens avant tout à exprimer toute ma gratitude à mon Promoteur, le Professeur Jan Govaerts. Ses conseils scientifiques et ses qualités humaines m'ont été indispensables pour concrétiser cette recherche. Merci pour votre confiance témoignée tout au long de ces six années.

Ce travail est aussi le fruit d'une étroite collaboration avec Sébastien Michotte. La qualité et la rigueur apportées à ses données expérimentales, ainsi que les nombreuses discussions et réponses octroyées, sont autant d'atouts nécessaires pour une coopération stimulante. Merci à toi Seb.

Je remercie également les Professeurs François Peeters, Luc Piraux, René Prieels, Vincent Bayot et Jean-Pierre Antoine pour avoir accepté d'être membres de mon Jury. Leurs commentaires constructifs ont été prédominants lors de la rédaction finale de cette thèse.

Plus simplement, mais non sans sentiments, merci à Ben, Chris, Dam, Fab, Frank, Isa, Mano, Romu, Vincent,... pour tous les moments inoubliables de bonne humeur, de fous rires, de victoires (!), d'aides à la fois scientifiques, informatiques ou humaines... Merci à vous.

Bien au delà de ces six années et de la thèse, cela fait près de vingt-sept ans que mes parents me conseillent et me soutiennent. Cette thèse est aussi le fruit de leur aide et de leur présence. Merci Papa et Maman.

Tout aussi barbare probablement qu'un texte en ancien français, c'est non sans difficultés que tu as lu avec attention cette dissertation. Les vortex magnétiques sont peut-être un peu moins mystérieux pour toi maintenant. Ne t'en fais pas, je n'en parlerai "presque" plus. Let's go to Cork and the dilute nitride class of semiconductors now ! Mes interrogations quotidiennes vont quelque peu changer, mais je sais que tu continueras toujours à me rassurer. Merci Phine.

Table des matières

Introduction	1
1 Introduction historique à la Supraconductivité	3
1.1 Conductivité parfaite $R = 0$ (1911)	3
1.1.1 La loi de Mathiessen	3
1.1.2 Matériaux supraconducteurs	3
1.2 Effet Meissner $\vec{B} = \vec{0}$ (1933)	4
1.3 Les équations de London (1935)	5
1.3.1 Décroissance exponentielle de l'induction magnétique	7
1.4 L'électrodynamique non locale de Pippard (1953)	9
1.4.1 L'effet micro-onde dans un métal	9
1.4.2 L'équation de Pippard	11
1.5 La théorie BCS (1957)	12
1.6 La théorie de Ginzburg-Landau (1950)	13
1.6.1 La théorie de Landau des transitions de phase	14
1.6.2 L'énergie libre de Ginzburg et Landau	16
1.6.3 Equations du mouvement	19
1.6.4 Les longueurs caractéristiques	20
1.6.5 Les champs magnétiques critiques et types de transition	21
1.6.6 La quantification du flux (1961)	26
1.6.7 La supraconductivité de type-II (1957)	27
1.7 La supraconductivité HTc (1986)	29
2 Modèle covariant de la supraconductivité	31
2.1 Modèle covariant	31
2.2 Lagrangien de Higgs	32
2.2.1 Equations du mouvement	32
2.2.2 Détermination des facteurs de normalisation	33
2.2.3 Cas stationnaires purement magnétiques	34

3	Etude des états stationnaires à symétrie cylindrique: Modèle 1D	37
3.1	Introduction	37
3.2	Equations du mouvement, énergie libre et magnétisation	39
3.3	Résolution analytique et numérique du modèle 1D	41
3.3.1	Solution triviale	41
3.3.2	Problème linéarisé	41
3.3.3	Solutions numériques	41
3.4	Hystérèse et ordre de la transition	44
3.4.1	Hystérèse	45
3.5	Résumé	48
4	Etude des états stationnaires à symétrie cylindrique libre: Modèle 2D	51
4.1	Equations du mouvement, énergie libre et magnétisation	51
4.2	Résolution numérique du modèle 2D	53
4.2.1	Variables de lien	53
4.2.2	Discrétisation du plan (u, ϕ) et ses variables associées	54
4.2.3	Energie libre discrétisée	56
4.2.4	Le principe de moindre action comme résolution numérique du modèle	57
4.3	Les solutions obtenues: Vortex Entiers	57
4.3.1	Les configurations du type MultiVortex	64
4.4	Résumé	68
5	Etude de la magnétisation d'un réseau de nanofils en plomb	73
5.1	Expérience	73
5.1.1	Fabrication du réseau de nanofils	73
5.1.2	Mesures de magnétisation	74
5.2	Modélisation de l'expérience de magnétisation	75
5.3	Analyse du premier échantillon, R116nm	76
5.3.1	Réponse paramagnétique de l'alumine et du plomb	76
5.3.2	Courbes de magnétisation	77
5.3.3	Magnétisation à l'échelle mésoscopique: Trois comportements distincts	82
5.4	Unicité de la solution	83
5.4.1	Influence des paramètres libres sur l'hystérèse ΔB_c^I du réseau	83
5.4.2	Influence des paramètres libres sur le champ critique B_c du réseau	85
5.4.3	Non-unicité de μ à $T > 4.5$ K	87
5.4.4	Unicité de μ à $T < 4.5$ K	87
5.4.5	Résumé	88
5.5	Analyse du deuxième échantillon, R120nm	89
5.5.1	Réponse paramagnétique de R120nm	89

5.5.2	Dispersion en rayon du réseau "R120nm"	91
5.5.3	Courbes de magnétisation	92
5.5.4	Nombres de nanofils	96
5.6	Barrière de Bean-Livingston	98
5.7	Résumé	101
6	Dépendance en température des paramètres phénoménologiques λ et ξ du plomb	105
6.1	Estimation de la longueur de pénétration λ	105
6.1.1	Théorie de London	106
6.1.2	Théorie de Pippard	107
6.2	Dépendances en température de λ	109
6.3	Dépendances en température de $\xi(T)$	111
6.4	Dépendance en température de la longueur de pénétration du plomb	112
6.5	Dépendance en température des longueurs caractéristiques du plomb	113
6.6	Comparaison entre les deux échantillons	117
6.6.1	Température critique	117
6.6.2	Détermination du libre parcours moyen	117
6.6.3	Les valeurs connues de ξ_0 et $\lambda_L(0)$ du plomb	119
6.7	Résumé	120
	Conclusion	121

Introduction

En regard avec la définition proposée par le Petit Robert [1], une thèse en tant que “proposition ou théorie particulière qu’on tient pour vraie et qu’on s’engage à défendre par des arguments”, semble inviter à énoncer en introduction, la ou les assertions débattues dans la rédaction. Préalablement plus interrogatives qu’affirmatives, c’est sous leur forme initiale qu’elles devraient par conséquent être énoncées. De multiplicité supérieure à l’unité, ces interrogations évoluent néanmoins au gré des différentes publications et compréhensions sur le sujet abordé. C’est donc sur ces réflexions, que je succombe à la tentation d’énumérer en guise d’introduction, *a posteriori* de ma rédaction, les interrogations les plus importantes du présent sujet défendu.

Parmi ces problèmes rencontrés, la miniaturisation des composants électroniques soulève la question de l’extrapolation à l’échelle nanoscopique des propriétés établies avec des échantillons macroscopiques. En particulier, les développements en nanotechnologie permettent l’étude expérimentale dans un régime mésoscopique des propriétés thermodynamiques et magnétiques de la supraconductivité. Par mésoscopique, on entend un matériau dont les dimensions géométriques sont comparables aux longueurs caractéristiques de décroissance du champ magnétique, λ , et de cohérence du condensat des paires de Cooper, ξ . Sous ces dimensions, les expériences ont prouvé que l’expulsion de l’induction magnétique devient incomplète, et réfute par conséquent l’hypothèse d’induction nulle présente à grande échelle. De plus, la frontière $\kappa = 1/\sqrt{2}$ observée à l’échelle macroscopique entre les deux types de propriétés magnétiques (type-I: Effet Meissner et type-II: Vortex d’Abrikosov) devient inappropriée à l’échelle mésoscopique. Le paramètre phénoménologique κ exprime ici le rapport des longueurs caractéristiques λ et ξ . Dès lors, les questions attachées à l’existence ou non de frontières entre les deux types de supraconducteurs à l’échelle mésoscopique, ou encore à la reproductibilité dans de nouvelles expériences de magnétisation (d’un réseau de nanofils de plomb) des propriétés magnétiques récemment constatées, viennent à l’esprit.

La motivation principale de cette dissertation peut maintenant être révélée. **Sur base du modèle phénoménologique de Ginzburg-Landau (GL), est-il possible de comprendre et de reproduire les magnétisations expérimentales à toutes les températures d’un réseau de nanofils de plomb électrodéposés ? En particulier, malgré la restriction sur sa validité d’utilisation au voisinage de la température critique (T_c), est-il concevable d’appliquer les équations de GL bien en deçà de la limite en température imposée ?**

Partant de ces interrogations, c’est en étroite collaboration avec des données expérimentales obtenues par le groupe du Professeur Luc Piraux (Sébastien Michotte en particulier), que les différentes approches théoriques seront élaborées.

L’introduction à la supraconductivité du Chapitre 1 propose principalement d’identifier dans une démarche chronologique les différentes propriétés thermodynamiques et magnétiques liées à la supraconductivité. Une part importante est consacrée au modèle de Ginzburg-Landau. Présentant un avantage considérable en simplicité par rapport à la théorie microscopique BCS, ce modèle sera en effet largement employé pour répondre aux questions relatives aux échantillons supraconducteurs étudiés. Cette introduction historique s’articule également autour de la familiarisation avec les longueurs caractéristiques

attachées à cet état de la matière.

A la fois une généralisation de la théorie de London et une limite de la théorie microscopique BCS, la théorie phénoménologique de Ginzburg et Landau n'en demeure pas moins un cas particulier du modèle abélien de Higgs (chapitre 2). Bien que pratique de part la clarté des équations et des paramètres proposés, elle nécessite néanmoins fréquemment une approche numérique pour la résolution de ses équations du mouvement associées. Les chapitres 3 et 4 aborderont ce sujet pour des géométries à symétries cylindriques. Soucieux, afin de simplifier les équations à résoudre, d'invoquer un maximum de symétries présentes dans le problème, les nanofils expérimentalement étudiés seront donc assimilés à des cylindres de hauteur infinie. L'hypothèse d'invariance sous rotation imposée dans un premier temps (chapitre 3) aux solutions stationnaires sera relaxée dans le chapitre 4 pour vérifier la validité d'une telle restriction. Plus spécifiquement, cette démarche sera appliquée dans le cadre de l'étude des nanofils de plomb.

Le chapitre 5 propose une modélisation des magnétisations expérimentales de réseaux de nanofils de plomb examinés au laboratoire PCPM¹. Essentiellement axée sur l'inclusion des résultats numériques issus des équations de GL (chapitres 3 et 4) et de l'indépendance d'interaction magnétique entre les nanofils, cette confrontation entre la théorie et l'expérience propose un test de validité évident pour la théorie phénoménologique de GL appliquée à un matériau (non local) fait de plomb et de dimensions mésoscopiques. Les hypothèses invoquées dans la construction du modèle, et surtout la question relative à la validité loin de T_c de GL pourront alors être critiquées. Les discussions relatives aux longueurs caractéristiques associées à cette théorie seront ensuite débattues dans le chapitre 6. L'étude des dépendances en température de ces quantités, et leurs corrélations avec les expressions microscopiques issues des théories BCS et Pippard seront également abordées. En particulier, leurs dépendances avec le libre parcours moyen seront étudiées.

La conclusion synthétisera toutes les réponses proposées à ces différentes interrogations énumérées.

¹Unité de Physico-Chimie et de Physique des Matériaux, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

Chapitre 1

Introduction historique à la Supraconductivité

Ce premier chapitre propose un survol non exhaustif des différentes propriétés découvertes et des théories élaborées au cours du 20^{ème} siècle dans le domaine de la supraconductivité. Au delà de ce survol historique, une attention particulière sera portée sur le modèle phénoménologique de Ginzburg et Landau (GL). Plus pragmatique pour l'étude des propriétés thermodynamiques et magnétiques que la théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS), les équations de GL seront par conséquent plus largement développées et employées dans le cadre de cette thèse.

Chacune des sections développées est inspirée des références [2, 3, 4, 5, 6, 7].

1.1 Conductivité parfaite $R = 0$ (1911)

1.1.1 La loi de Mathiessen

Au voisinage du “zéro absolu”, la conductivité électrique des métaux est limitée par les impuretés et par les défauts statiques du réseau cristallin. Expérimentalement, la résistivité totale ρ peut s'écrire (*loi de Mathiessen*):

$$\rho(T) = \rho_r + \rho_i(T),$$

où ρ_r est la résistivité résiduelle indépendante de la température due aux défauts et impuretés, et où ρ_i est la résistivité idéale due aux collisions électrons-phonons. Les processus résistifs liés d'une part aux défauts et d'autre part aux phonons sont donc décorrélés. Seule la résistivité idéale, par opposition à la résistivité résiduelle, est une propriété intrinsèque aux métaux, indépendante de la perfection cristalline du solide (Figure 1.1). La découverte en 1908 de la liquéfaction de l'hélium (K. Onnes, Leiden) autorisa son investigation expérimentale aux très basses températures ($T \simeq 4.2$ K).

1.1.2 Matériaux supraconducteurs

La résistivité électrique des matériaux, même au zéro degré absolu, semble donc non nulle, et fixée par la diffusion des électrons sur les impuretés et les défauts dans le métal (loi de Mathiessen). Cependant, certains métaux présentent une résistivité nulle en dessous d'une température T_c , appelée la température critique de transition supraconductrice. Ce changement de phase fut observé pour la première fois par Kammerlingh Onnes [9] en 1911 avec du mercure (Figure 1.2). La table 1.1 présente quelques températures critiques de transition pour des métaux élémentaires. Sur le plan purement historique, il

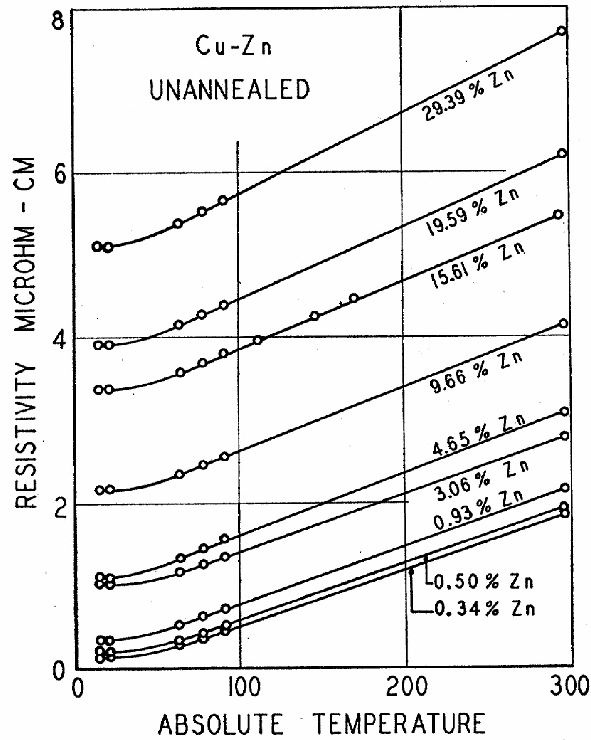


Figure 1.1— Dépendance en température de la résistivité dans des alliages Cu-Zn [8]. Illustration de la loi de Mathiessen.

Métaux :	Niobium	Plomb	Etain	Indium	Aluminium
$T_c(K)$:	9.25	7.20	3.72	3.41	1.18

Tableau 1.1— Sources: R. J. Donnelly, “Cryogenics”, in Physics Vade Mecum, edited by H.L. Anderson.

convient de retenir que la plus haute température critique atteinte jusqu’en 1986 était de 23.2 K pour le Nb_3Ge . Au delà de cette date, une nouvelle gamme de matériaux “céramiques” (cuprates) présentèrent des températures critiques records excédant les 77 K, la température de liquéfaction de l’azote [11]. Les cristaux de C_{60} (fullerenes), normalement isolants à température ambiante, enregistrèrent en 1991 des températures de transition au delà de 40 K. Enfin, récemment (2000), des mesures de résistivité électrique établirent une température de transition de 39 K pour le MgB_2 , l’élément non cuprate et non fullerene possédant la plus haute température critique actuellement.

1.2 Effet Meissner $\vec{B} = \vec{0}$ (1933)

En analysant les propriétés magnétiques issues du caractère non résistif d’un matériau supraconducteur, l’expérience devrait présenter les résultats proposés dans la Figure 1.3 (a). Cependant, les observations de Meissner et Ochsenfeld [12] en 1933 contredirent cette assertion théorique en identifiant le supraconducteur comme un matériau “diamagnétique parfait”, $\vec{B} = \vec{0}$ ¹ (Figure 1.3 (b)), ou encore l’effet Meissner.

¹Pour rappel, l’induction magnétique \vec{B} , le champ magnétique \vec{H} et la magnétisation \vec{M} sont trois grandeurs corrélées au travers de la relation constitutive $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, où μ_0 est la perméabilité du vide dans les unités du Système

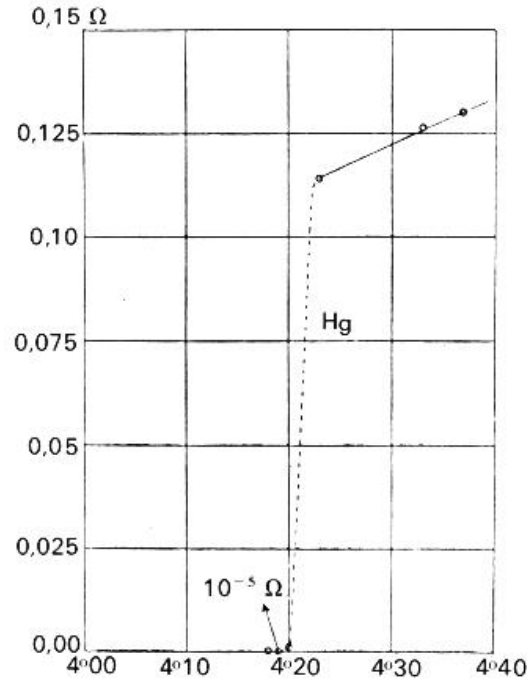


Figure 1.2— Résistance électrique du Mercure en fonction de la température (kelvin) [10].

Cette propriété, réversible, implique l'existence d'un champ magnétique critique H_c , au delà duquel la phase supraconductrice est détruite. En effet, dans cette limite, l'énergie électromagnétique par unité de volume luttant contre la pression magnétique, $\frac{\mu_0}{2}H_c^2$, doit égaier l'énergie de condensation. On écrira²,

$$\frac{\mu_0}{2}H_c^2 = f_n(T) - f_s(T),$$

où f_n et f_s représentent les énergies libres de Helmholtz par unité de volume dans les phases normales et supraconductrices respectivement. Expérimentalement (Figure 1.4), $H_c(T)$ est bien approximé par la loi parabolique,

$$H_c(T) = H_c(0)\left(1 - (T/T_c)^2\right).$$

1.3 Les équations de London (1935)

Une approche macroscopique de ces deux propriétés électrodynamiques, résistivité nulle et diamagnétisme parfait, spécifiques donc à la supraconductivité, fut proposée pour la première fois en 1935 par les frères F. et H. London [13], en incluant deux équations constitutives aux équations de Maxwell,

$$\vec{E} = \partial_t(\Lambda\vec{J}), \quad (1.1)$$

et,

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \times (\Lambda\vec{J}), \quad (1.2)$$

¹International.

²Voir la section 1.6 sur la Théorie de Ginzburg et Landau pour plus de détails.

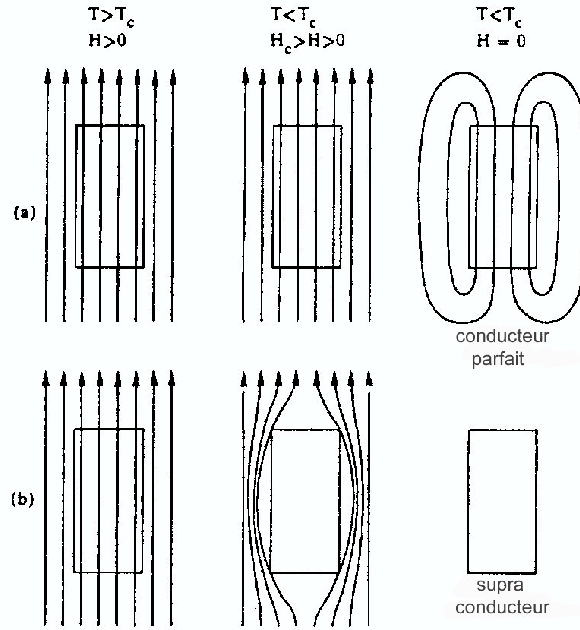


Figure 1.3— Diagramme schématisant le comportement de l'induction magnétique d'un (a) conducteur électrique parfait défini comme possédant une résistance électrique nulle en dessous d'une température critique T_c , et (b) d'un métal qui devient supraconducteur en dessous de T_c . Bien que le métal dans l'état normal n'expulse pas le flux magnétique, par opposition, un supraconducteur l'éjectera totalement.

où $\Lambda = \frac{m}{\rho q^2}$ est un paramètre phénoménologique, spécifique à chaque matériau³.

La justification heuristique de la première équation, exprimant la conductivité parfaite, est évidente. En effet, l'équation du mouvement d'un conducteur parfait, c'est-à-dire d'un gaz d'électrons libres possédant un libre parcours moyen (l.p.m.) infini, soumis à un champ électrique uniforme s'écrit,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}.$$

En la combinant avec l'expression du courant de Drude

$$\vec{J} = \rho q \vec{v},$$

il s'en suit immédiatement la première équation de London (1.1),

$$\vec{E} = \partial_t \left(\frac{m}{\rho q^2} \vec{J} \right).$$

La justification de la seconde équation est obtenue en prenant le rotationnel de (1.1), couplé à l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{B} + \vec{\nabla} \times (\Lambda \vec{J}) \right] = \vec{0},$$

et en restreignant, par la justification expérimentale de Meissner et Ochsenfeld, l'espace des solutions à l'équation homogène $\vec{B} + \vec{\nabla} \times (\Lambda \vec{J}) = \vec{0}$ ou encore, (1.2). La sous-section suivante propose une démonstration de cette assertion.

³Pour des raisons justifiées dans la suite de ce chapitre, m représente la masse, ρ la densité et q la charge électrique d'une paire d'électrons.

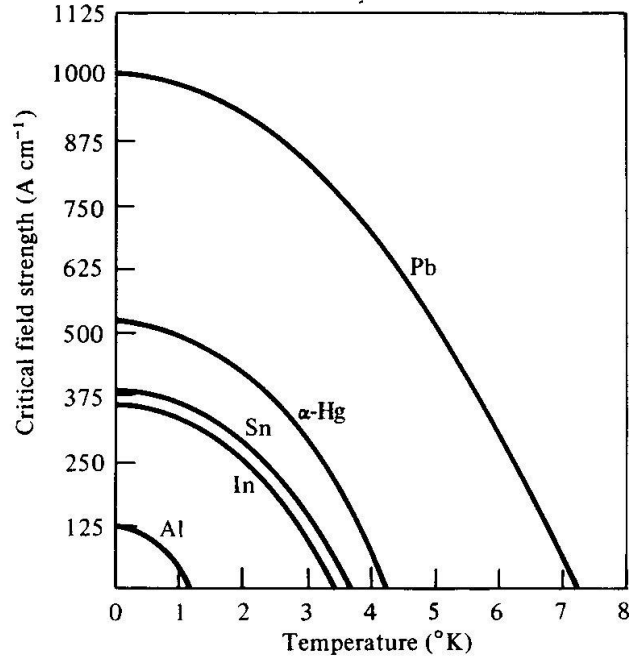


Figure 1.4— Dépendance en température des champs magnétiques critiques H_c dans certains matériaux supraconducteurs purs et métalliques [5].

1.3.1 Décroissance exponentielle de l'induction magnétique

Dans la matière, les équations de Maxwell (S.I.) s'écrivent [14],

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}, \quad (1.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (1.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.6)$$

où

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.7)$$

et

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (1.8)$$

établissent les liens entre d'une part le champ de déplacement électrique \vec{D} , le champ électrique \vec{E} et le champ de polarisation du matériau \vec{P} , et d'autre part le champ magnétique \vec{H} , l'induction magnétique \vec{B} et la magnétisation du matériau \vec{M} . Par conséquent, pour décrire le comportement magnétique d'un supraconducteur de hauteur infinie (Figure 1.5) plongé dans un champ magnétique externe homogène \vec{H}_{ext} dirigé dans le sens de la hauteur (les effets démagnétisants sont donc nuls), on obtient, à partir des équations (1.4) et (1.8),

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_{ext} = \vec{0} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \times \vec{M},$$

ou encore,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s, \quad (1.9)$$

si l'on pose,

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_s, \quad (1.10)$$

c'est-à-dire que la magnétisation d'un supraconducteur est générée par un courant de "superélectrons" (cette terminologie sera justifiée dans la section sur la théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS)). Dès lors, en couplant le rotationnel de (1.9) à l'équation de London (1.2), où le terme de courant désigne également ces mêmes "superélectrons" ($\vec{J} = \vec{J}_s$), on parvient à

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{\mu_0 \rho_s q^2}{m}, \quad (1.11)$$

où ρ_s représente la densité de ces superélectrons, et l'indice L fait référence aux frères London. L'équation

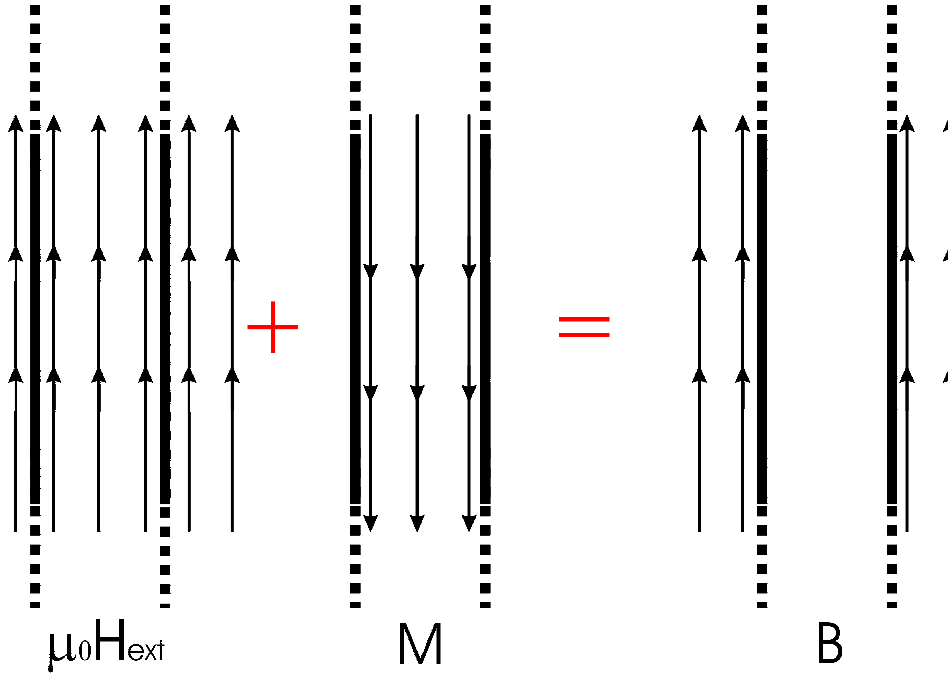


Figure 1.5— Illustration de l'équation constitutive $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$ dans le cas d'un supraconducteur plongé dans un champ magnétique externe de hauteur infinie.

de London décrit donc bien une induction magnétique écrantée exponentiellement à la surface des matériaux. Cette décroissance est effective sur une longueur caractéristique λ , appelée longueur de pénétration. Empiriquement, la dépendance en température de cette longueur caractéristique peut être approximée par la relation de Gorter et Casimir [15],

$$\lambda(T) \approx \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)^4}}. \quad (1.12)$$

Quoique la longueur de pénétration proposée par London laisse la question sur la densité de "superélectrons" ouverte, il est naturel de penser que cette dernière possède une limite supérieure, correspondant à la densité maximale d'électrons de conduction: $\rho_s = \rho$. Par conséquent, on obtient une limite inférieure pour la longueur de pénétration,

$$\lambda_L(0) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 \rho q^2}}, \quad (1.13)$$

où la valeur nulle de l'argument de λ indique simplement que cette frontière ne peut être atteinte que lorsqu'on approche du zéro degré absolu, c'est-à-dire quand la densité de "superélectrons" devient maximale.

Pour terminer cette section, notons qu'une motivation plus pertinente de la seconde équation de London s'obtient facilement dans le cadre de la Mécanique Quantique. En effet, pour une particule de masse m plongée dans une induction magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, la densité de courant de probabilité \vec{J} s'écrit,

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \frac{q}{2m} \left[\Psi^*(\vec{x}, t) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \Psi(\vec{x}, t) + \Psi(\vec{x}, t) \left(\frac{-\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right) \Psi^*(\vec{x}, t) \right], \quad (1.14)$$

où $\Psi(\vec{x}, t)$ est la fonction d'onde des "superélectrons". Par conséquent, en interprétant son module comme la densité de "superélectrons" $|\Psi(\vec{x}, t)|^2 = \rho_s(\vec{x}, t)$ au point \vec{x} à l'instant t , c'est-à-dire $\Psi(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho_s(\vec{x}, t)} \exp(i\theta(\vec{x}, t))$, (1.14) devient,

$$\vec{J}_s = \frac{\rho_s q}{m} (\hbar \vec{\nabla} \theta - q\vec{A}), \quad (1.15)$$

où le rotationnel de cette dernière relation correspond à la seconde équation de London (1.2).

1.4 L'électrodynamique non locale de Pippard (1953)

L'analyse de la section précédente montre qu'un supraconducteur plongé dans un champ magnétique externe constant développe des courants d'écrantage à sa surface sur une longueur de pénétration λ . Cependant, la nature des équations décrivant ce phénomène dépend de la grandeur de λ par rapport au libre parcours moyen l (l.p.m.) des électrons dans l'état normal. Pour s'en convaincre, laissons-nous guider par l'étude d'un phénomène analogue à l'effet Meissner, "l'effet de peau micro-onde dans un métal" où la radiation micro-onde est atténuée à la surface du métal sur une longueur de peau δ , et où les relations entre la densité de courant \vec{J} et le champ électrique micro-onde \vec{E} dépendent de la grandeur de δ par rapport au l.p.m. des électrons.

1.4.1 L'effet micro-onde dans un métal

Soit une radiation micro-onde se propageant dans la direction z , et incidente sur la surface d'un métal située dans le plan xy (Figure 1.6). Par simplification, nous supposons que l'onde incidente est polarisée

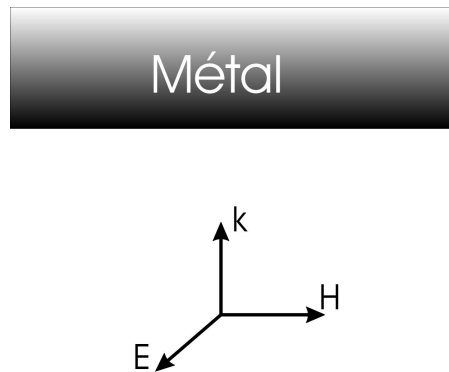


Figure 1.6 — Géométrie du problème.

linéairement dans la direction x , $\vec{E} = (E, 0, 0)$. La propagation dans le métal est gouvernée par les

équations de Maxwell, ainsi que par l'équation constitutive $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (Loi d'Ohm). Nous verrons plus loin que cette dernière est inadéquate pour les basses fréquences. En supposant maintenant que le métal est un matériau non magnétique de constante diélectrique ϵ , c'est-à-dire que sa permittivité magnétique est celle du vide $\mu = \mu_0$, on obtient comme équation du mouvement pour la composante selon x du champ électrique $E = E_x(z, t)$,

$$\partial_z^2 E = \sigma \mu_0 \partial_t E + \epsilon \mu_0 \partial_t^2 E. \quad (1.16)$$

Par conséquent, pour une onde de fréquence angulaire ω , les deux termes du membre de droite de l'équation (1.16) ont des amplitudes relatives $\sigma : \omega \epsilon$. Comme dans un métal, σ est de l'ordre de $10^4 (\Omega \text{ m})^{-1}$, ω de 10^{10} rad/sec et ϵ de 10^{-11} F/m, on a $\sigma \gg \omega \epsilon$ et l'équation (1.16) peut se simplifier en,

$$\partial_z^2 E = \sigma \mu_0 \partial_t E. \quad (1.17)$$

En travaillant avec une onde monochromatique de fréquence ω , dont la solution testée serait du type,

$$E = E_0 \exp(ikz - i\omega t) \exp(-z/\delta),$$

c'est-à-dire l'expression d'une onde plane atténuée sur une longueur caractéristique δ , on obtient par substitution de cette relation dans (1.17),

$$(ik - 1/\delta^2)^2 = -i\omega \sigma \mu_0.$$

En égalant les parties réelles et imaginaires de part et d'autre de l'égalité précédente, la longueur δ devient,

$$\delta = (2/\sigma \mu_0 \omega)^{1/2},$$

et correspond à la définition de la longueur de peau δ , caractéristique du métal de conductivité σ , de permittivité magnétique μ_0 et de fréquence ω .

Cette dérivation où δ diminue quand la conductivité σ et la fréquence ω augmentent, suppose que la loi d'Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ soit satisfaite. Cependant, aux températures de l'hélium liquide, comme la conductivité électrique σ et le l.p.m. l des électrons deviennent maximaux, il n'est pas interdit d'avoir des longueurs de peau δ plus petites que l . La loi d'Ohm, comme nous le verrons plus bas, n'est alors plus valable dans ces conditions extrêmes. Les gammes de fréquences pour lesquelles $\delta > l$ et $\delta < l$ sont appelées respectivement les gammes "d'effet peau normal" et "anormal". L'analyse suivante approfondit les conséquences du second effet.

L'effet de peau "anormal"

En écrivant la loi d'Ohm $\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$, on suppose que la valeur du courant au point \vec{r} est déterminée par la valeur du champ électrique en ce même point (à la constante de conductivité électrique σ près). Cependant, dans le cas de "l'effet de peau anormal" où $\delta < l$, le champ électrique varie de manière significative sur le trajet de l'électron entre deux collisions (voir Figure 1.7). Le courant n'est donc plus seulement gouverné par $\vec{E}(\vec{r}, t)$, mais plutôt par sa valeur dans un volume de rayon l entourant la position \vec{r} de l'électron. La loi d'Ohm est alors modifiée par une relation non locale,

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int K(\vec{r} - \vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') d^3 \vec{r}', \quad (1.18)$$

où le noyau $K(\vec{r} - \vec{r}')$ doit avoir une portée proche du l.p.m. l , c'est-à-dire tomber à zéro pour des distances $|\vec{r} - \vec{r}'| > l$. Il est important de préciser à ce stade que dans la limite inverse où $l \ll \delta$, le champ électrique est constant sur la portée du noyau K et peut donc "sortir" de l'intégrale (1.18) et la loi d'Ohm se réduit comme il se doit à l'expression locale connue,

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}),$$

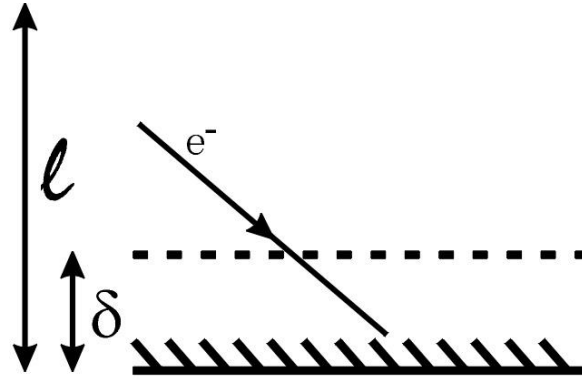


Figure 1.7— Dans l'effet peau anormal ($\delta < l$), le champ électrique rencontré par l'électron entre deux collisions varie significativement pour des trajectoires proches de la surface.

où,

$$\sigma = \int K(\vec{r} - \vec{r}') d^3 \vec{r}'.$$

Dans leur analyse théorique de l'effet de peau anormal, Reuter et Sondheimer [16] proposèrent comme extension non locale de la loi d'Ohm,

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi l} \int \frac{\vec{R} [\vec{R} \cdot \vec{E}(\vec{r}')] }{R^4} \exp(-R/l) d^3 \vec{r}', \quad (1.19)$$

où $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ et $R = |\vec{R}|$. Cette équation, de la forme (1.18) avec un noyau d'une portée l comme attendu, guidera Pippard dans son étude de l'électrodynamique non locale dans un supraconducteur.

1.4.2 L'équation de Pippard

Par analogie avec les travaux de Reuter et Sondheimer [16] sur l'effet de peau anormal, Pippard [17] développa en 1953 une généralisation non locale de l'équation de London (1.15) ⁴

$$\vec{J}_s = -\frac{1}{\Lambda} \vec{A}. \quad (1.20)$$

Dans ses développements, il associe une longueur de cohérence à la fonction d'onde des superélectrons. Un équivalent donc du l.p.m. dans l'extension non locale de la loi d'Ohm (1.19). Il proposa cette longueur, ξ_0 , sur base du principe d'incertitude: Seuls les électrons endéans une énergie $\sim kT_c$ du niveau de Fermi participent à la supraconductivité à la température proche de T_c . Ces derniers possèdent par conséquent une quantité de mouvement s'étalant sur $\Delta p \approx kT_c/v_F$, où v_F est la vitesse de Fermi. Dès lors, leur incertitude sur la position se disperse sur $\Delta x \gtrsim \hbar/\Delta p \approx \hbar v_F/kT_c$, définit par Pippard comme une longueur de cohérence,

$$\xi_0 = a \frac{\hbar v_F}{kT_c},$$

où a est un facteur numérique à déterminer⁵.

Si ξ_0 représente une longueur de cohérence pour la fonction d'onde des "superélectrons", il est naturel

⁴Exprimée dans la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

⁵Pippard estima expérimentalement $a = 0.15$ pour reproduire les données sur l'impédance de surface micro-onde dans des supraconducteurs [18] comme l'étain et de l'aluminium. Deux ans plus tard, la théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer [19] la fixera théoriquement à $a = 0.18$.

Etats	champs	portée	fluide	portée
Normal	\vec{E}	δ	électrons	l
Supra	\vec{A}	λ	“superélectrons”	ξ_0

Tableau 1.2— Parallélisme entre les travaux de Reuter et Sondheimer [16] sur l’effet de peau anormal dans un métal et la théorie de Pippard [17] pour les supraconducteurs.

de l’identifier aux l.p.m. des électrons normaux. Par conséquent, la réponse du supercourant dans un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ doit s’étendre sur cette distance de cohérence ξ_0 jouant donc un rôle semblable au l.p.m. dans l’électrodynamique non locale d’un métal. Bien sûr, toujours par analogie avec les métaux, l’effet de peau “anormal” des métaux possède son équivalent en supraconductivité lorsque la portée du potentiel vecteur λ est inférieure à ξ_0 . Le Tableau 1.2 résume les parallélismes entre ces deux théories. Sur ces bases, Pippard proposa donc le remplacement de (1.19) par,

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi\xi_0\Lambda} \int \frac{\vec{R} [\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{r}')] }{R^4} \exp(-R/\xi_p) d^3\vec{r}', \quad (1.21)$$

où à nouveau $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, et où la définition de la longueur de cohérence ξ_0 est étendue à ξ_p ⁶, fonction à la fois de ξ_0 (matériau pur) et du l.p.m. l ,

$$\frac{1}{\xi_p} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l}.$$

L’équation de Pippard (1.21) se réduit bien évidemment à une réponse locale entre \vec{J}_s et \vec{A} lorsque la portée du noyau, ξ_p , est petite comparée à la distance caractéristique λ de variation du potentiel vecteur \vec{A} . Autrement dit, l’équation de London (1.20) est valable lorsque,

$$\lambda(T) \gg \xi_p, \quad (1.22)$$

avec λ dépendant de la température par opposition à ξ_p . L’équation de London locale est donc valable

- proche de la température critique T_c , puisque λ possède la divergence (1.12) à la transition, $\lambda \rightarrow \infty$;
- dans la limite “sale”, c’est-à-dire $l \ll \xi_0$, puisque lorsque l diminue, ξ_p diminue également tandis que λ augmente. Par conséquent, dans des matériaux impurs, il est possible que la condition de localité (1.22) soit satisfaite pour toutes les températures. Dans cette limite impure, où $l \ll \xi_0$, ou encore $\xi_p \simeq l$, l’équation (1.21) se réduit bien à une forme locale,

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = -\frac{\rho q^2}{m} \frac{l}{\xi_0} \vec{A}(\vec{r}), \quad (1.23)$$

qui accentue l’augmentation de λ lorsque l diminue ($\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 \rho_s q^2} \frac{\xi_0}{l}$).

Pour résumer cette section sur base du dernier constat, notons qu’au delà de la reproduction théorique des données expérimentales, l’équation de Pippard anticipe les propriétés électrodynamiques découvertes plus tard dans la théorie microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS).

1.5 La théorie BCS (1957)

Basée sur la notion de *paires de Cooper*, la théorie microscopique de la supraconductivité de Bardeen, Cooper et Schrieffer fut énoncée 46 ans après la découverte de K. Onnes. Un an auparavant, Cooper

⁶L’indice “p” fait référence à Pippard.

[20] montra que la Mer de Fermi des électrons était instable face à la formation d'au moins une paire de ceux-ci, en présence d'une interaction *attractive*, aussi faible soit elle. La problématique se résumait donc à trouver cette interaction attractive, qui s'opposerait à la répulsion coulombienne entre deux électrons. L'article de Bardeen, Cooper et Schrieffer [19] répond à la question en proposant une interaction électron-phonon comme candidat principal à l'appariement. Qualitativement, sur son passage, un électron déforme le réseau cristallin localement en augmentant la concentration de charges positives. Un électron voisin sera dès lors attiré par cette déformation. L'énergie d'une paire de Cooper sera par conséquent plus basse que celle associée à deux électrons isolés. L'énergie de Fermi peut être considérée comme plus petite que celle dans l'état normal, et est séparée de l'état normal par un gap d'énergie E_g (Figure 1.8). Ce gap stabilise les paires de Cooper en les préservant de leurs séparations qui nécessitent, au minimum, de franchir cette énergie E_g . Cette barrière, nulle au delà de la température critique T_c , augmente de façon monotone quand la température diminue (Figure 1.9) et atteint la valeur limite à zéro degré kelvin de

$$E_g(0) = 3.528kT_c. \quad (1.24)$$

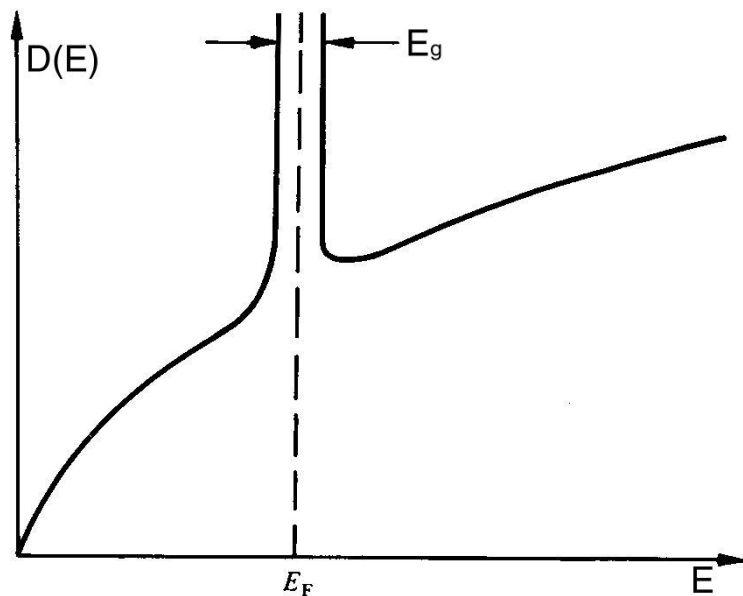


Figure 1.8— Densité d'états $D(E)$ d'un métal dans l'état supraconducteur. E_f représente le niveau de Fermi de l'état normal [5].

1.6 La théorie de Ginzburg-Landau (1950)

Précédent l'approche microscopique de Bardeen, Cooper et Schrieffer, Ginzburg et Landau [22] proposèrent en 1950 l'un des développements les plus remarquables en supraconductivité pour son aspect pratique. Phénoménologique, leur théorie généralise les équations de London et présente un lien direct avec la théorie BCS pour les températures proches de T_c [23]. Sa simplicité permet notamment d'étudier facilement les cas où l'inhomogénéité spatiale de la densité de paires de Cooper est importante. L'étude de la structure des vortex dans des nano-fils de plomb en est un bon exemple. Ce modèle, application de la théorie de Landau sur les transitions de phase du second ordre, associe comme paramètre d'ordre de la transition, la densité de paires de Cooper n_s , les "superélectrons" invoqués précédemment.

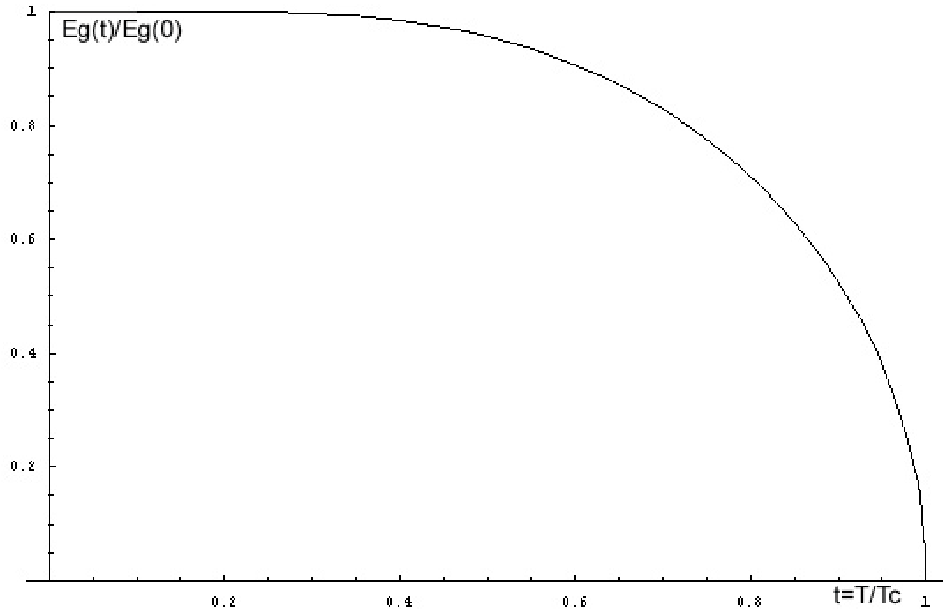


Figure 1.9— Dépendance en température du gap d'énergie dans la théorie BCS [21].

1.6.1 La théorie de Landau des transitions de phase

L'idée de base de Landau est de considérer la transition de phase comme un changement d'ordre du système (passage ordonné \leftrightarrow désordonné). Comme exemple, considérons un système magnétique à trois dimensions constitué d'un réseau de dipôles magnétiques. Si l'interaction entre ces dipôles est ferromagnétique, ces derniers tendent alors à s'aligner. En particulier, à la température absolue $T = 0$ K, ils pointent tous dans la même direction. Quand la température augmente, l'agitation thermique engendre une perte d'orientation de certains dipôles. Thermodynamiquement, à une température finie T , le système tend à minimiser l'énergie libre de Helmholtz $\mathcal{F} = U - TS$, où U est l'énergie interne, et S son entropie. Pour $T > 0$, certains spins s'orientent différemment de telle sorte qu'ils augmentent à la fois U et S , mais minimisent \mathcal{F} . On peut définir pour ce système un paramètre d'ordre ϕ , égal à la fraction,

$$\phi = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-}, \quad (1.25)$$

où respectivement n_+ et n_- sont les nombres de spins "up" et "down". A $T = 0$, choisissons n_- nul (arbitraire), et donc $\phi = 1$. Quand T augmente, ϕ décroît et devient nul à une certaine température critique T_c . Au delà, dans la phase paramagnétique, $n_+ = n_-$ et $\phi = 0$. Cette dépendance en température est assez générale dans des systèmes accompagnant un changement de phase. Le paramètre d'ordre dans le cas de la supraconductivité sera associé à la densité de paires de Cooper. Le Tableau 1.3 illustre cette suggestion par d'autres exemples.

La théorie de Landau étudie les transitions proches de la température critique T_c , c'est-à-dire quand ϕ est petit. Comme il vient d'être énoncé, l'état stable est celui qui minimise l'énergie libre \mathcal{F} . Landau proposa donc un développement en série de puissances de ϕ pour l'énergie libre,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n + \lambda\phi + \alpha\phi^2 + \gamma\phi^3 + \frac{1}{2}\beta\phi^4, \quad (1.26)$$

puisque ϕ est petit autour de T_c . Cette description ne peut évidemment pas généraliser tous les phénomènes de transition, mais cela fonctionne dans le cas de la supraconductivité.

La deuxième hypothèse importante de Landau est de supposer que tous les coefficients peuvent être

Phénomène	Paramètre d'ordre	Exemple	T_c
Ferromagnétisme	moments magnétiques	fer	1044 K
Ferroélectrique	dipôles électriques	sulfate de triglycine	322.5 K
Liquide-gaz	volume molaire	eau ($P = 22.1$ MPa)	647.05 K
Superfluidité	densité de superfluide	hélium	2.1 K
Supraconductivité	densité de paires de Cooper	plomb	7.19 K

Tableau 1.3— Exemples de transitions du second ordre, caractérisées par leur paramètre d'ordre et leur température de transition [24].

développés en puissance de $T - T_c$. A nouveau, ce raisonnement non valide pour certains systèmes, semble d'application dans le cas de la supraconductivité. Sur ces postulats, une simplification de l'énergie libre de Helmholtz (1.26) peut s'opérer.

Premièrement, la condition d'équilibre,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} = 0,$$

impose que dans la phase normale, le paramètre λ soit nul pour atteindre un minimum quand $\phi = 0$, à $T > T_c$. Comme on suppose que les coefficients ne dépendent que de la température relative $T - T_c$, λ doit être nul pour tout T .

Deuxièmement, comme dans la plupart des systèmes présentant des propriétés telles que la supraconductivité, la superfluidité ou le ferromagnétisme, le terme impair ϕ^3 n'intervient pas. A titre d'exemple, dans le ferromagnétisme, la valeur de l'énergie libre doit évidemment être indépendante de l'orientation initiale "up" ($\phi = +1$ dans (1.25)) ou "down" ($\phi = -1$) des moments magnétiques. Par conséquent, conserver ce terme cubique violerait cette assertion.

On peut donc maintenant simplifier significativement (1.26),

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n + \alpha(T)\phi^2 + \frac{1}{2}\beta(T)\phi^4. \quad (1.27)$$

L'énergie libre (1.27) est donc minimale pour $\phi_0 = 0$ et $\phi_0^2 = -\alpha/\beta$ (on identifiera toujours par ϕ_0 la valeur de ϕ à l'équilibre, minimum dans l'énergie libre \mathcal{F}). Pour définir les dépendances en température de α et β , on veut que $\phi_0 = 0$ soit la seule solution lorsque $T > T_c$, et que $\phi_0 \neq 0$ puisse exister pour $T < T_c$. Ces propriétés peuvent être atteintes si la dépendance de α/β est négative pour $T < T_c$, et positive pour $T > T_c$. De plus, β doit rester positif à toutes les températures, sinon \mathcal{F} décroîtrait indéfiniment quand ϕ augmente. Dès lors, les dépendances en puissance de $T - T_c$ les plus simples sont,

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= A(T - T_c), \\ \beta(T) &= \beta(T_c) = \beta. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Avec ces définitions de α et β , la solution pour ϕ_0 est,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0, & T > T_c \\ \phi_0 &= \sqrt{A(T_c - T)/\beta}, & T < T_c. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Notons que $\phi_0 = 0$ reste toujours une solution pour $T < T_c$, mais elle correspond, contrairement à $\phi_0 \neq 0$, à un maximum local dans l'énergie libre \mathcal{F} (Figure 1.10).

Pour terminer, analysons le comportement du minimum de \mathcal{F} , \mathcal{F}_{min} , obtenu en substituant (1.29) dans l'expression de l'énergie (1.27),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{min} &= \mathcal{F}_n, & T > T_c \\ \mathcal{F}_{min} &= \mathcal{F}_n - \frac{1}{2}\alpha^2/\beta = \mathcal{F}_n - \frac{1}{2}A^2(T_c - T)^2/\beta, & T < T_c. \end{aligned} \quad (1.30)$$

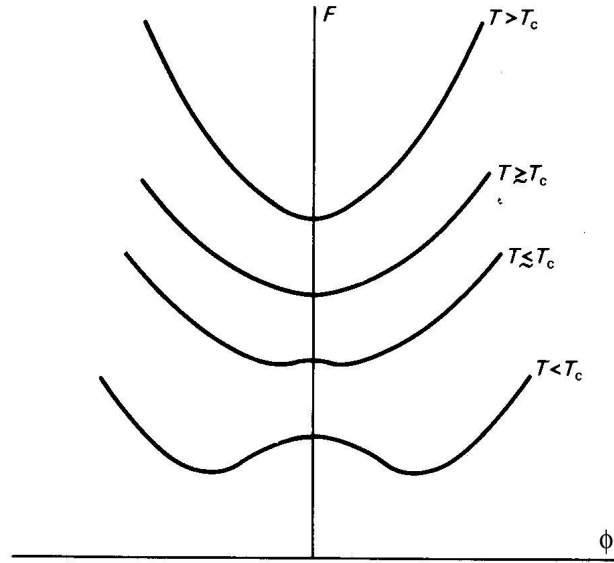


Figure 1.10— Variation de \mathcal{F} en fonction de ϕ à différentes températures. Les courbes ont été déplacées verticalement l'une par rapport à l'autre pour des raisons de lisibilité. On remarquera que $\phi = 0$, extremum à toutes les températures, devient un maximum lorsque $T < T_c$ [6].

La Figure 1.11 illustre la dépendance de l'énergie libre minimale avec la température. Notons en particulier que \mathcal{F}_{min} décroît lentement à partir de \mathcal{F}_n quand la température devient inférieure à la température critique. La solution $\phi_0 = 0$ maintiendrait \mathcal{F} sur la droite \mathcal{F}_n , c'est-à-dire à une énergie supérieure que celle proposée par $\phi_0 \neq 0$. Le fait que \mathcal{F}_{min} , à l'opposé de ϕ_0 , varie lentement avec la température au voisinage de T_c implique qu'une grande variation de ϕ_0 ne nécessite qu'un faible changement d'énergie libre. C'est pour cette raison que les transitions du second ordre sont sensibles aux effets de fluctuations. Le moindre apport d'énergie kT dans \mathcal{F}_{min} implique un changement significatif du paramètre d'ordre ϕ_0 .

1.6.2 L'énergie libre de Ginzburg et Landau

Comme mentionné dans l'introduction de cette section, l'extension de la théorie de Landau pour le cas de la supraconductivité s'obtient en associant la fonction d'onde complexe des paires de Cooper ψ au paramètre d'ordre ϕ . Par conséquent, deux complications majeures surviennent: premièrement, ϕ devient une fonction de la position⁷; deuxièmement, il faut inclure la contribution magnétique, plus précisément le couplage du supercourant avec le champ magnétique et son énergie libre associée.

1. La dépendance spatiale de ψ .

Soit ψ une fonction de la position. L'équation (1.27) peut alors être considérée comme l'expression de la densité d'énergie libre évaluée au point \vec{r} , et dont l'intégration sur tout l'espace représente l'énergie libre totale. Cette dépendance engendre également un terme "d'énergie cinétique" proportionnel à sa variation spatiale $|\vec{\nabla}\psi|^2$. La densité d'énergie libre de Helmholtz peut dès lors s'écrire,

$$f(\vec{r}) = f_n + \alpha(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m}|\vec{\nabla}\psi|^2, \quad (1.31)$$

⁷Notre restriction à l'étude des états stationnaires permet d'éviter une dépendance temporelle supplémentaire de la fonction d'onde ψ , et donc du paramètre d'ordre ϕ .

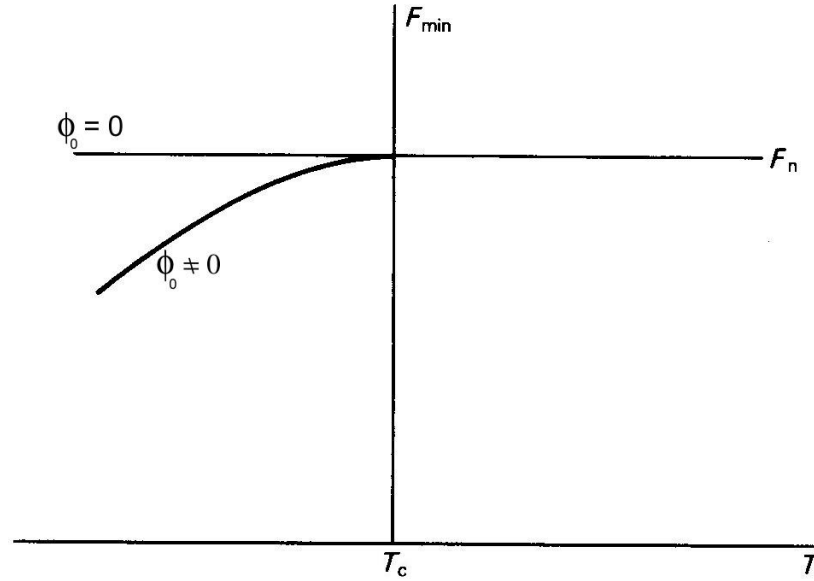


Figure 1.11— Variation de \mathcal{F}_{\min} avec la température [6].

où $|\cdot|^2$ est bien l'expression du module au carré puisque ψ est complexe.

La conséquence majeure du terme de gradient dans l'énergie libre est de préserver ψ contre toute variation rapide dans l'espace. Dans le cas contraire, sa contribution en énergie libre serait trop importante et détruirait la phase supraconductrice. Sur le plan dimensionnel, en normalisant ψ par $\psi_0 = \sqrt{-\alpha/\beta}$ ⁸, sa valeur à l'équilibre (le ϕ_0 dans la théorie de Landau), (1.31) devient,

$$f(\vec{r}) = f_n + |\psi_0|^2 |\alpha| \left(-|u(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} |u(\vec{r})|^4 + \xi(T)^2 |\vec{\nabla} u(\vec{r})|^2 \right), \quad (1.32)$$

où

$$\xi(T) = \sqrt{\hbar^2 / 2m |\alpha(T)|}, \quad (1.33)$$

représente une **longueur de cohérence**, c'est-à-dire une longueur caractéristique de variation du paramètre d'ordre $u(\vec{r}) = \psi(\vec{r})/\psi_0$.

2. La contribution magnétique.

De façon à préserver l'invariance de jauge du groupe $U(1)$ de l'électromagnétisme, l'expression du gradient dans (1.31) devient celle de la dérivée covariante usuelle,

$$\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \psi|^2 \rightarrow \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar \vec{\nabla} - q^* \vec{A}) \psi|^2, \quad (1.34)$$

avec $m^* = 2m_e$ et $q^* = 2e$ représentant respectivement la masse et la charge d'une paire de Cooper. De plus, en ajoutant d'une part l'énergie de l'induction magnétique $\vec{B}^2/2\mu_0$, et d'autre part en soustrayant la contribution $\mu_0 \vec{H}_{ext}^2/2$ due aux sources de courant produisant le champ externe, on obtient comme densité d'énergie libre de Helmholtz,

$$f(\vec{r}) = f_n + \alpha(T) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi(\vec{r})|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar \vec{\nabla} - 2e \vec{A}) \psi|^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} - \frac{\mu_0 \vec{H}_{ext}^2}{2}. \quad (1.35)$$

⁸Où $|\psi_0|^2 = |\alpha/\beta| = -\alpha/\beta > 0$ car α est négatif pour $T < T_c$.

Son intégrale sur tout l'espace représente l'énergie libre totale de Helmholtz, $\mathcal{F} = U - TS$. Par conséquent, au même titre que de devoir retrancher l'énergie $-TS$ engendrée par la variation de l'entropie due à la modification de température externe T , il faut soustraire également de l'expression (1.35) la contribution $-\mu_0 \vec{H}_{ext} \cdot \vec{M}$ engendrée par une variation de la magnétisation due au champ externe \vec{H}_{ext} . L'état stable sera alors celui qui minimise non plus l'énergie libre de Helmholtz \mathcal{F} , mais bien l'énergie libre de Gibbs $\mathcal{G}(T, \vec{H}_{ext}) = U - TS - \mu_0 \vec{H}_{ext} \cdot \vec{M}$. Sa densité d'énergie s'écrit,

$$g(\vec{r}) = g_n + \alpha(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})\psi|^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{\mu_0\vec{H}_{ext}^2}{2} - \vec{H}_{ext} \cdot \vec{B}, \quad (1.36)$$

puisque $\mu_0\vec{M} = \vec{B} - \mu_0\vec{H}_{ext}$, et que $f_n = g_n$ car la magnétisation du matériau dans l'état normal est négligeable $-\mu_0\vec{H}_{ext} \cdot \vec{M} \approx 0$.

Dans le vide, $\vec{B}_{ext} = \mu_0\vec{H}_{ext}$, l'expression finale (1.36) devient,

$$g(\vec{r}) = g_n + \alpha(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})\psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\vec{B}(\vec{r}) - \vec{B}_{ext})^2. \quad (1.37)$$

L'énergie libre totale de Gibbs d'un supraconducteur de volume Ω s'écrit donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s(T, \vec{B}_{ext}) &= \mathcal{G}_n + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} (\vec{B}(\vec{r}) - \vec{B}_{ext})^2 d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \alpha(T)|\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi(\vec{r})|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A})\psi|^2 \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (1.38)$$

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes,

$$f(\vec{r}) = \frac{\psi(\vec{r})}{\psi_0}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{r}}{L}, \quad \vec{\partial} = L\vec{\nabla}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{\Phi/(2\pi L^2)}, \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{\vec{A}}{\Phi/(2\pi L)}, \quad (1.39)$$

avec L et Φ qui possèdent les dimensions d'une longueur et d'un flux d'induction magnétique respectivement et $|\psi_0|^2 = |\alpha|/\beta$ avec $\alpha = -|\alpha|$, la différence d'énergie libre de Gibbs, $\Delta\mathcal{G}(T, \vec{B}_{ext}) = \mathcal{G}_s(T, \vec{B}_{ext}) - \mathcal{G}_n$, s'écrit,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi}{2\pi L^2} \right)^2 \int (\vec{b} - \vec{b}_{ext})^2 d\Omega + \\ &+ |\alpha||\psi_0|^2 \int \left\{ -|f|^2 + \frac{1}{2}|f|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|L^2} \left| (-i\vec{\partial} - \frac{2e\Phi}{2\pi\hbar}\vec{a})f \right|^2 \right\} d\Omega. \end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, il est naturel d'identifier Φ au rapport $2\pi\hbar/q = h/2e$, l'unité Φ_0 de quantum de flux magnétique⁹. Par conséquent, en utilisant la définition (1.33) de la longueur de cohérence ξ , on obtient,

$$\frac{|\alpha|\hbar^2}{\beta 2m^*L^2} \int \left\{ \frac{\beta m}{4e^2\mu_0|\alpha|L^2} (\vec{b} - \vec{b}_{ext})^2 + \left| (-i\vec{\partial} - \vec{a})f \right|^2 \right\} d\Omega + |\alpha||\psi_0|^2 \int \left(-|f|^2 + \frac{1}{2}|f|^4 \right) d\Omega, \quad (1.40)$$

où il est également naturel d'identifier L à une deuxième longueur caractéristique telle que,

$$L^2 = \frac{m\beta}{4e^2\mu_0|\alpha|} = \lambda(T)^2. \quad (1.41)$$

Ce paramètre λ représente la longueur de pénétration de Ginzburg-Landau du champ magnétique dans la matière supraconductrice. En introduisant le paramètre de Ginzburg-Landau κ ,

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}, \quad (1.42)$$

⁹Son interprétation physique sera discutée plus en détail dans la section 1.6.6 sur la quantification du flux.

l'énergie libre dans les variables adimensionnelles se simplifie,

$$\Delta\mathcal{G} = \frac{|\alpha|^2}{\beta\kappa^2} \int \left\{ \left(\vec{b} - \vec{b}_{ext} \right)^2 + \left| (-i\vec{\partial} - \vec{a})f \right|^2 + \kappa^2 \left(-|f|^2 + \frac{1}{2}|f|^4 \right) \right\} d\Omega, \quad (1.43)$$

avec la constante $\frac{|\alpha|^2}{\beta\kappa^2} \stackrel{(1.33),(1.41)}{=} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2$.

1.6.3 Equations du mouvement

Par comparaison avec la théorie de Landau où l'énergie libre est une fonction d'une seule variable ϕ , l'énergie libre totale de Gibbs (1.38) est une intégrale impliquant deux fonctions $\psi(\vec{r})$ et $\vec{A}(\vec{r})$ (pour rappel, $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$). Par conséquent, pour atteindre un équilibre thermodynamique, le système doit minimiser son énergie libre par rapport à ces deux fonctions.

La première équation

En minimisant (1.38) par rapport au complexe conjugué de ψ , ψ^* , on obtient la première équation de GL et sa condition frontière,

$$\begin{aligned} \alpha\psi(\vec{r}) + \beta|\psi(\vec{r})|^2\psi(\vec{r}) + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A} \right)^2 \psi(\vec{r}) &= 0, \\ \vec{n} \cdot \left(-i\hbar\vec{\nabla} - 2e\vec{A} \right) \psi(\vec{r}) \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (1.44)$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface $\partial\Omega$ du supraconducteur de volume Ω . En introduisant à nouveau les variables adimensionnelles (1.39), l'expression ci-dessus se réduit à,

$$-f(\vec{r}) + |f(\vec{r})|^2 f(\vec{r}) + \frac{1}{\kappa^2} \left(-i\vec{\partial} - \vec{a} \right)^2 f(\vec{r}) = 0, \quad (1.45)$$

avec la condition frontière,

$$\vec{n} \cdot \left(-i\vec{\partial} - \vec{a} \right) f \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

La seconde équation

La deuxième équation se dérive en minimisant (1.38) par rapport au potentiel vecteur \vec{A} :

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{J}_s(\vec{r}) = -\frac{ie\hbar}{m^*} \left(\psi^*(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\vec{\nabla}\psi^*(\vec{r}) \right) - \frac{4e^2}{m^*} |\psi(\vec{r})|^2 \vec{A}(\vec{r}). \quad (1.46)$$

Exprimée également en fonction des variables adimensionnelles (1.39), où le courant \vec{J}_s est normalisé par $\Phi_0/(2\pi\lambda^3\mu_0)$, l'équation du courant devient,

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{i}{2} \left(f^*(\vec{r})\vec{\partial}f(\vec{r}) - f(\vec{r})\vec{\partial}f^*(\vec{r}) \right) - |f(\vec{r})|^2 \vec{a}(\vec{r}).$$

Au même titre que l'équation de London (1.20), cette dernière est une expression locale. La valeur du courant \vec{J}_s au point \vec{r} est donnée par les valeurs de la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$, de son gradient $\vec{\nabla}\psi(\vec{r})$, et du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ évalués tous au même point de coordonnée \vec{r} . Par conséquent, le caractère **local** de la théorie de GL restreint son domaine de validité au cas¹⁰ où \vec{A} varie lentement sur une distance de l'ordre de ξ_0 ($\lambda(T) \gg \xi_0$), c'est-à-dire pour

- les matériaux purs proches de la température critique T_c ,
- les matériaux impurs où le libre parcours moyen des électrons l satisfait la relation $l \ll \xi_0$.

¹⁰Ce point a déjà été discuté à la fin de la section 1.4 consacrée à l'équation de Pippard.

1.6.4 Les longueurs caractéristiques

Les analyses dimensionnelles proposées dans la section consacrée à l'énergie libre aboutissent à l'existence de deux longueurs caractéristiques, $\lambda(T)$ et $\xi(T)$. Leur interprétation physique est esquissée sur la Figure 1.12. En combinant leur définition aux dépendances en température (1.28) des paramètres $\alpha(T)$ et $\beta(T)$,

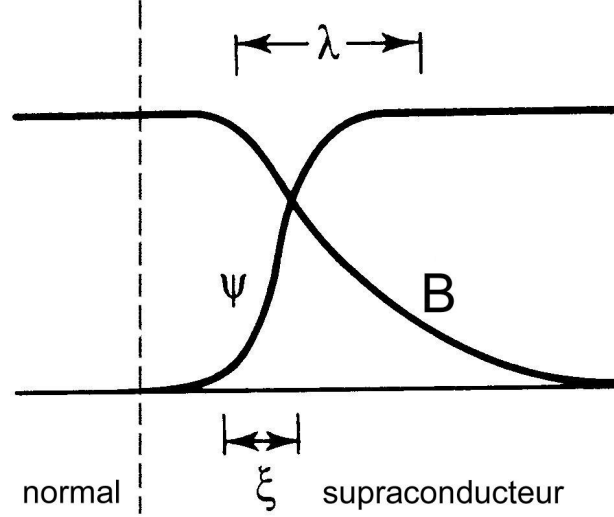


Figure 1.12— Dépendance en fonction de la position du paramètre d'ordre ψ et de l'induction magnétique B à l'interface conducteur normal-supraconducteur [2].

on montre facilement que

$$\xi(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|} \propto (1-t)^{(-1/2)}, \quad (1.47)$$

et

$$\lambda(T) = \frac{m^*\beta}{4e^2\mu_0|\alpha(T)|} \propto (1-t)^{(-1/2)}, \quad (1.48)$$

avec $t = T/T_c \lesssim 1$ proche de l'unité. Divergeant à la température critique, la signification physique de $\xi(T)$ n'est certainement pas la même que dans le cadre des théories de Pippard et de BCS, où $\xi_0 = \hbar v_F/\pi\Delta(0)$ est essentiellement constant. Cependant, la confusion entre ces deux quantités est fréquente, d'autant plus que $\xi(T) \approx \xi_0$ pour des matériaux purs loin de T_c . Proche de T_c , la relation entre ces deux quantités dépend de la pureté du matériau, définie en terme du libre parcours moyen des électrons l [2]:

$$\xi(T) = 0.74 \frac{\xi_0}{\sqrt{(1-t)}} \quad \text{lorsque } l \gg \xi_0 \quad (\text{pur}), \quad (1.49)$$

$$\xi(T) = 0.855 \frac{\sqrt{\xi_0 l}}{\sqrt{(1-t)}} \quad \text{lorsque } l \ll \xi_0 \quad (\text{sale}). \quad (1.50)$$

Les mêmes remarques sont applicables pour les longueurs de pénétration de Ginzburg-Landau $\lambda(T)$ et London $\lambda_L(T)$ en (1.13). Les liens entre ces deux quantités, proches de T_c , sont [2]:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} \quad \text{lorsque } l \gg \xi_0 \quad (\text{pur}), \quad (1.51)$$

$$\lambda(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} \sqrt{\frac{\xi_0}{1.33l}} \quad \text{lorsque } l \ll \xi_0 \quad (\text{sale}). \quad (1.52)$$

Bien que la dépendance en température de λ soit différente de celle proposée par Gorter et Casimir [15] dans leur modèle des deux fluides, $\lambda \approx (1 - t^4)^{-1/2}$, il ne faut pas perdre de vue que le domaine de validité de la théorie de GL se restreint à $T \approx T_c$. Par conséquent, en développant $(1 - t^4)^{-1/2} = (1 + t^2)^{-1/2}(1 + t)^{-1/2}(1 - t)^{-1/2}$, il s'en suit immédiatement que proche de T_c ($t \approx 1$), seul le dernier terme domine, et l'on retrouve bien les dépendances (1.51) et (1.52) proposées par Ginzburg et Landau.

1.6.5 Les champs magnétiques critiques et types de transition

Le champ critique thermodynamique: H_{cb}

A ce stade des développements, il est possible de définir un champ magnétique critique \vec{B}_{cb} , au delà duquel la phase supraconductrice est détruite, même lorsque $T < T_c$. Les indices c et b font références aux termes “critique” et “bulk”. Ce dernier désigne des matériaux dont les dimensions physiques sont beaucoup plus grandes que les deux longueurs caractéristiques λ et ξ précédemment définies. Cette limite permet de négliger les effets de surface et par conséquent de considérer une induction magnétique \vec{B} nulle, et une valeur du paramètre d'ordre ψ constante, en particulier égale à sa valeur à l'équilibre $|\psi|^2 = |\alpha|/\beta$, partout dans l'échantillon macroscopique. Dès lors, en appliquant la définition du champ magnétique thermodynamique critique \vec{B}_{cb} : la différence entre les énergies libres supraconductrices et normales, $\Delta\mathcal{G} = 0$, est nulle au champ critique thermodynamique; on obtient, dans les variables adimensionnelles,

$$\Delta\mathcal{G} = \frac{|\alpha|^2}{\beta\kappa^2}\Omega \left(b_{ext}^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 \right) = 0,$$

où Ω est le volume du supraconducteur. Par conséquent, en identifiant b_{ext} à b_{cb} ,

$$b_{cb} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}},$$

ou encore, dans les variables dimensionnelles,

$$B_{cb}(T) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{2} 2\pi\lambda(T)\xi(T)}. \quad (1.53)$$

Sa dépendance en température, proportionnelle à $(1-t)$ au voisinage de $t \lesssim 1$, est en accord avec celle de la proposition de Gorter et Casimir variant comme $(1 - t^2)$, et donc conforme aux données expérimentales. Ginzburg et Landau utilisèrent ce constat comme une preuve majeure des définitions en température (1.28) des coefficients α et β dans l'énergie libre.

Dans le cadre de la théorie de Landau, l'ordre du changement de phase se définit à partir du comportement à la transition du paramètre d'ordre $\phi = \psi$. Si ce dernier s'annule de façon discontinue à la transition, le changement de phase se qualifie de **premier ordre**. Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour une modification continue vers une valeur nulle, on emploiera le qualificatif de **second ordre**. Par conséquent, le changement de phase à B_{cb} est du premier ordre. Le paramètre d'ordre ψ “saute” bien de $|\alpha|/\beta$ à 0 à la transition supraconductrice \leftrightarrow normale. Ce comportement est représenté à la Figure 1.13.

Sur le plan magnétique, ces deux types de transition manifestent également un comportement différent pour la magnétisation $\mu_0\vec{M}(\vec{H}_{ext}) = \vec{B} - \mu_0\vec{H}_{ext} = \vec{B} - \vec{B}_{ext}$. A titre d'exemple, la Figure 1.14 illustre la distinction. En étudiant la magnétisation de l'alliage Pb-In avec un contrôle sur la proportion d'indium, Livingston [25] modifie le libre parcours moyen (l.p.m.) des électrons l , et donc λ (1.52) et ξ (1.50). En particulier, lorsque la proportion d'indium augmente, le l.p.m. l diminue, et donc λ augmente pendant que ξ diminue. Cette procédure permet ainsi d'étudier l'influence du paramètre de Ginzburg-Landau $\kappa = \lambda/\xi \propto 1/l$ sur la magnétisation et d'isoler les deux types de transition. Dans le cas du plomb pur, κ est minimal, et la courbe exhibe un effet Meissner complet, $\vec{B} = 0$, jusqu'au champ magnétique thermodynamique critique H_{cb} , où s'opère une transition du premier ordre dans la magnétisation (et le paramètre d'ordre). Dans les alliages, l'effet Meissner complet survit tant que H_{ext} est inférieur

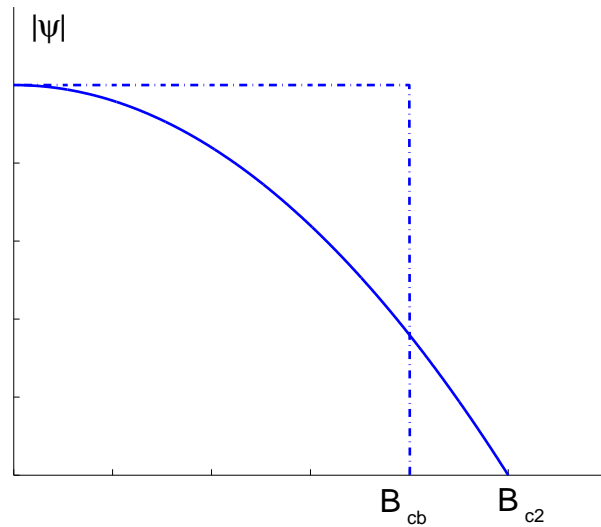


Figure 1.13— Variation attendue de $|\psi|$ en fonction du champ externe appliqué dans un supraconducteur bulk type-I (ligne discontinue) et type-II (ligne continue).

à une valeur H_{c1} , toujours plus petite que H_{cb} . Au delà de ce premier champ critique H_{c1} , l'état supraconducteur subsiste et effectue une transition du second ordre au deuxième champ critique H_{c2} . Nous verrons plus loin que le système se laisse pénétrer progressivement par des vortex magnétiques d'Abrikosov dans cette seconde partie de la magnétisation.

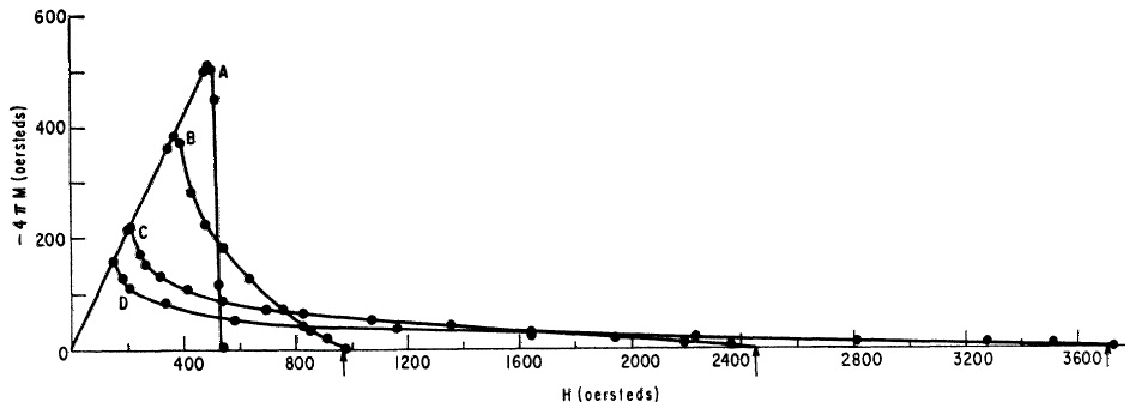


Figure 1.14— Courbes de magnétisation du plomb polycristallin et d'alliages de plomb-indium en mode champ magnétique croissant à 4.5 kelvin. A—plomb, B—plomb avec 2.08% d'indium, C—plomb avec 8.23% d'indium, D—plomb avec 20.4% d'indium [25].

Le second champ critique: H_{c2}

Empiriquement, à l'opposé de la transition à H_{cb} , la magnétisation diminue progressivement jusqu'à une valeur nulle à H_{c2} . Par conséquent, le supercourant $J_s \propto M$, et le paramètre d'ordre $\psi \propto J_s$ suivent le même comportement. Proche de H_{c2} ,

1. le terme non linéaire $\beta|\psi|^2\psi$ peut donc être négligé dans l'équation de GL (1.44);
2. l'induction magnétique dans l'échantillon "bulk" est non nulle et proche de $\vec{B}_{ext} = \mu_0\vec{H}_{ext}$ puisque $\vec{M} \approx 0$. En imposant que le champ magnétique externe \vec{H}_{ext} soit uniforme et parallèle à l'axe z , il reste encore une infinité de choix possibles pour le potentiel vecteur \vec{A} . Fixons $\vec{A}_{ext} = (0, \mu_0 H_{ext} x, 0)$. Une autre alternative serait bien évidemment $\vec{A}_{ext} = (-\mu_0 H_{ext} y, 0, 0)$, ou toutes autres combinaisons linéaires de cette dernière avec la précédente dont la somme des coefficients vaut l'unité. Toutes satisfont la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{ext} = 0$ et donnent bien $\mu_0\vec{H}_{ext} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{ext}$.

Sous ces hypothèses, l'équation de GL (1.44) se linéarise sous la forme,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - 2e\mu_0 H_{ext} x \right)^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi = |\alpha| \psi.$$

Par séparation des variables $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, les solutions pour $Y(y)$ et $Z(z)$ sont du type ondes planes ($Y(y) = \exp(ik_y y)$ et $Z(z) = \exp(ik_z z)$), et $X(x)$ doit satisfaire l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m^* , de charge $q = 2e$, se déplaçant dans un potentiel harmonique centré en x_0 ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \frac{4e^2 \mu_0^2 H_{ext}^2}{2m^*} (x - x_0)^2 X(x) = (|\alpha| - \hbar^2 k_z^2 / 2m^*) X(x), \quad (1.54)$$

où $\hbar k_y = 2e\mu_0 H_{ext} x_0$.

Dans le cas d'un potentiel du type $V(x) = \frac{1}{2} m \omega_c^2 (x - x_0)^2$, les valeurs propres de l'énergie sont $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega_c$. Par similitude, les valeurs propres de (1.54) sont,

$$\epsilon_n = (|\alpha| - \hbar^2 k_z^2 / 2m^*) = (n + 1/2) \frac{\hbar 2e\mu_0 H_{ext}}{m^*},$$

puisque $\omega_c = 2e\mu_0 H_{ext} / m^*$ (la fréquence de résonance cyclotron). En isolant le champ magnétique externe,

$$H_{ext} = \frac{m^*}{(n + 1/2)\hbar 2e\mu_0} \left(|\alpha| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right), \quad (1.55)$$

sa plus grande valeur permise, identifiée à H_{c2} , correspond à $n = 0$ et $k_z = 0$,

$$H_{c2} = \frac{m^* |\alpha|}{\hbar e \mu_0} \stackrel{(1.33)}{=} \frac{\Phi_0}{2\pi \mu_0 \xi^2(T)} \stackrel{(1.53)}{=} \kappa \sqrt{2} H_{cb}. \quad (1.56)$$

La fonction propre associée à cette valeur propre n'est autre que l'état fondamental de l'oscillateur harmonique à une dimension,

$$X_{n=0, k_z=0}(x) = \exp \left\{ -(x - x_0)^2 / 2\xi^2(T) \right\}, \quad (1.57)$$

où l'on retrouve la définition de la longueur de cohérence de GL, $\xi(T) = \hbar^2 / 2m|\alpha|$, comme une longueur caractéristique de variation du paramètre d'ordre ψ .

Pour $\kappa > 1/\sqrt{2}$, l'interprétation physique du champ H_{c2} est assez triviale. Il représente la frontière entre l'état mixte constitué de vortex d'Abrikosov et l'état normal. Au delà de H_{c2} , ce supraconducteur de type-II effectue une transition continue vers l'état normal.

Pour $\kappa < 1/\sqrt{2}$, H_{c2} est inférieur au champ thermodynamique critique H_{cb} et génère une hystérèse dans la magnétisation suivant que le champ externe est croissant ou décroissant. Dans ces supraconducteurs qualifiés de type-I, l'état normal survit en mode champ magnétique externe décroissant en deçà du champ thermodynamique H_{cb} , idéalement jusqu'à atteindre H_{c2} . A cette valeur, la nucléation apparaît ($\psi \neq 0$, mais toujours petit), suivie rapidement par une discontinuité et un saut irréversible de $|\psi|^2$ à sa valeur à l'équilibre $|\psi_0|^2 = |\alpha|/\beta$ (Figure 1.15). A titre d'exemple, Feder et McLachlan [26] observèrent cette hystérèse ("supercooling" dans la littérature) pour l'indium avec $\kappa = 0.062$ et $H_{c2} \approx 0.09 H_{cb}$.

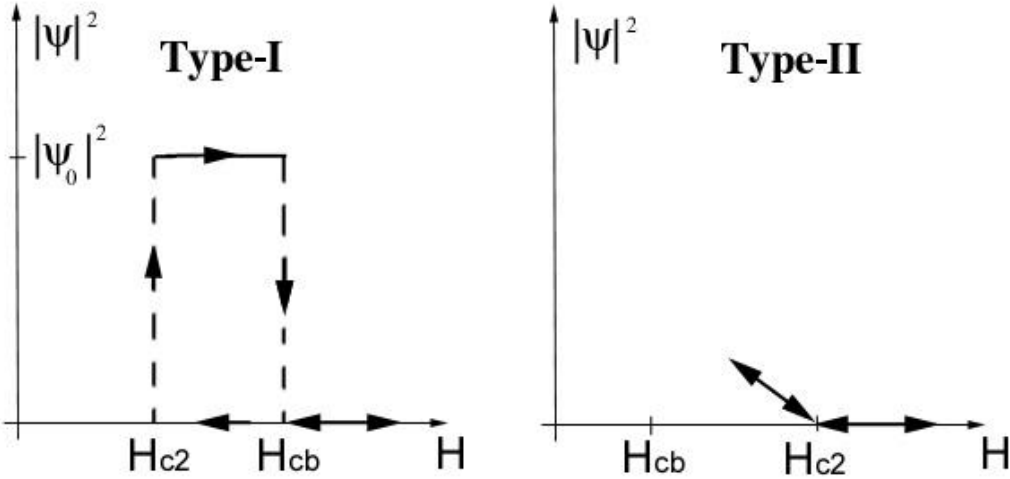


Figure 1.15— Comportement du paramètre d'ordre à H_{c2} dans des supraconducteurs type-I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) et type-II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$).

Nucléation à la surface: H_{c3}

Les champs calculés précédemment concernaient des échantillons de dimension infinie. Les effets de bords, négligeables quoique présents, furent donc complètement omis. De façon à remédier à cette lacune, considérons maintenant le cas d'un supraconducteur semi-infini, possédant une frontière (plan yz) avec le vide en $x = 0$, et plongé dans un champ magnétique externe H_{ext} dirigé selon z (Figure 1.16).

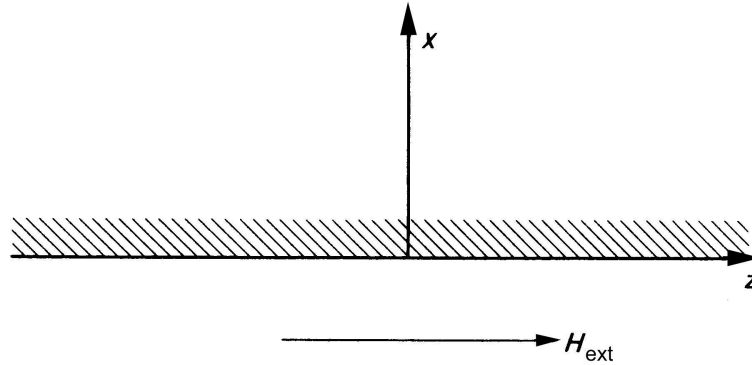


Figure 1.16— Système de coordonnées pour le calcul du champ critique H_{c3} .

Sous les mêmes hypothèses que dans le calcul du champ H_{c2} , c'est-à-dire ψ et la magnétisation proche de zéro, on retrouve bien sûr l'équation de Schrödinger dans un potentiel harmonique à une dimension à résoudre¹¹,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \frac{4e^2 \mu_0^2 H_{ext}^2}{2m^*} (x - x_0)^2 X(x) = |\alpha| X(x), \quad (1.58)$$

¹¹Dans la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, où $\vec{A} = (0, \mu_0 H_{ext} x, 0)$

où le terme k_z est annulé puisqu'il décroît la valeur maximale du champ (1.55), mais avec une condition frontière supplémentaire tenant compte de l'effet de surface,

$$\left. \frac{d}{dx} X(x) \right|_{x=0} = 0.$$

Saint-James et de Gennes [27], les premiers à formuler et à résoudre ce problème, proposèrent d'utiliser une méthode des images pour tenir compte de l'effet de bords supplémentaire. Cette dernière consiste simplement à remplacer (1.58), valable uniquement pour $x > 0$, par une équation dont le domaine de définition s'étend sur tout l'intervalle $-\infty < x < \infty$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + V(x)X(x) = |\alpha|X(x), \quad (1.59)$$

où le potentiel $V(x)$ coïncide avec celui de (1.58) pour les x positifs, et est continué symétriquement pour les x négatifs (Figure 1.17 (b)),

$$V(x) = \begin{cases} \frac{4e^2 \mu_0^2 H_{ext}^2}{2m^*} (x - x_0)^2 & x > 0 \\ V(-x) & x < 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

La fonction propre correspondant à la plus faible valeur propre ne possède aucun noeud et est paire

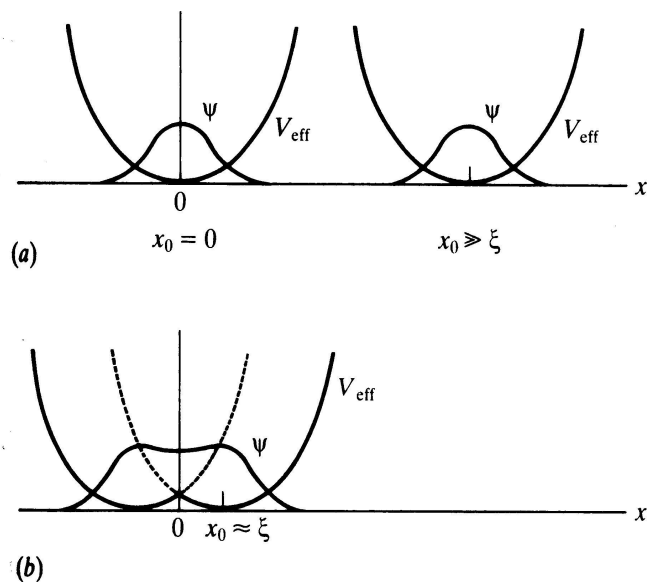


Figure 1.17— (a) Nucléation à la surface et à l'intérieur au champ H_{c2} , (b) Nucléation à la surface au champ H_{c3} [2].

en x . Elle satisfait donc automatiquement la condition frontière. Pour $x < 0$, le potentiel $V(x)$ (1.60) est toujours inférieur à $4e^2 \mu_0^2 H_{ext}^2 / (2m^*) (x - x_0)^2$. Par conséquent, la plus petite valeur propre de $V(x)$ est inférieure au cas sans frontière (Eq.(1.58) seule). La nucléation est donc favorisée par la présence de la surface. Un calcul plus détaillé montre que $x_0 = 0.59\xi(T)$ correspond à la valeur propre la plus faible, $-\alpha = |\alpha| = 0.59(1/2\hbar\omega_c)$, où ω_c est la fréquence cyclotron déjà définie précédemment. Le champ magnétique critique obtenu est dès lors augmenté et vaut,

$$H_{c3} = 1.69H_{c2} = 1.69\kappa\sqrt{2}H_{cb}. \quad (1.61)$$

Pour résumer, au champ critique H_{c3} , une supraconductivité de “surface” apparaît sur la forme d’une feuille d’épaisseur $\pm\xi(T)$ parallèle à ce champ externe appliqué.

1.6.6 La quantification du flux (1961)

Après avoir étudié quelques solutions liées à la première équation de GL linéarisée, en particulier les champs critiques H_{c2} et H_{c3} , la présente section s’attarde sur une des conséquences majeures de la seconde, (1.46), la quantification du flux magnétique.

Le quantum de flux

En développant le paramètre d’ordre ψ en une fonction réelle $f(\vec{r})$ et exponentielle imaginaire $\exp(i\theta(\vec{r}))$, $\psi(\vec{r}) = f(\vec{r}) \exp(i\theta(\vec{r}))$, la seconde équation de GL s’écrit,

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \frac{2ef^2(\vec{r})}{m^*} (\hbar \vec{\nabla}\theta(\vec{r}) - 2e\vec{A}).$$

Par conséquent, dans un anneau supraconducteur (Figure 1.18) dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que la longueur de pénétration du champ magnétique $\lambda(T)$, l’intégrale sur le contour C du

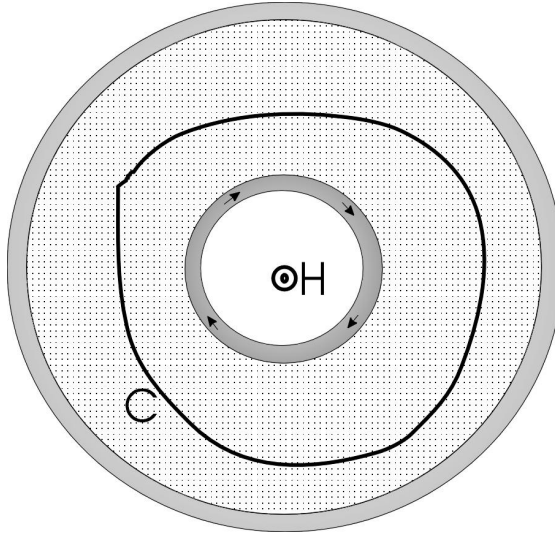


Figure 1.18— Flux magnétique piégé dans un anneau supraconducteur dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que $\lambda(T)$. Les parties foncées, à l’inverse de la zone hachurée, représentent les zones où le champ magnétique (et donc le supercourant) est présent. Le chemin C proposé est donc libre de toute induction magnétique (supercourant).

supercourant est nulle puisque ce dernier tombe à zéro loin des surfaces. Mathématiquement, cette relation implique,

$$\oint_C \vec{J}_s \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{2ef_0^2}{m^*} \left\{ \hbar \oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{s} - 2e \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \right\},$$

où $f^2(\vec{r}) = f_0^2$ puisque loin des parois, le condensat atteint sa valeur à l’équilibre. Par conséquent, le flux d’induction magnétique traversant la surface S délimitée par le contour C est quantifié et vaut,

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \Phi_S = \frac{\hbar}{2e} \oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{s} = \frac{2\pi n \hbar}{2e} = n\Phi_0, \quad (1.62)$$

avec $\Phi_0 = h/2e = 2.07 \times 10^{-15}$ Wb = 2.07×10^{-7} G cm², le quantum de flux, et

$$\oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{s} = 2\pi n, \quad (1.63)$$

pour garantir au paramètre d'ordre d'être univalué après un transport sur le contour C .

1.6.7 La supraconductivité de type-II (1957)

Comme la figure de magnétisation (Figure 1.14) le suggère, un matériau supraconducteur exhibe un comportement différent que l'effet Meissner complet lorsque $\kappa > 1/\sqrt{2}$ et que $H_{ext} > H_{c1}$. Abrikosov [28] fut le premier en 1957 à décrire cette phase.

Le réseau de vortex d'Abrikosov dans un champ magnétique élevé $H_{ext} \sim H_{c2}$

Soit un supraconducteur "bulk"¹² de type-II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$) plongé dans un champ magnétique externe H_{ext} décroissant. Pour $H_{ext} = H_{c2}$, l'état supraconducteur apparaît dans le volume du matériau. Le paramètre d'ordre ψ est petit et résout l'équation de Ginzburg-Landau (1.44) linéarisée,

$$\frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi_L = -\alpha\psi_L. \quad (1.64)$$

Si H_{ext} continue à diminuer, ψ s'accroît et devra satisfaire l'équation non linéarisée (1.44). L'obtention du diagramme de phase *Energie libre - Champ magnétique externe* complet, ainsi que les solutions associées représentent alors un problème numérique important. Abrikosov palliera cette contrainte en étudiant les solutions dans un champ externe H_{ext} proche de H_{c2} .

Par continuité, la solution ψ de l'équation non linéaire de GL doit être proche de la solution ψ_L à $H_{ext} \lesssim H_{c2}$. En reprenant les résultats déjà établis dans le calcul du champ H_{c2} , on sait que la solution de (1.64) dans la jauge ($A_x = A_z = 0, A_y = \mu_0 H_{c2} x$) est,

$$\psi_k = \exp(iky) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2(T)}\right), \quad (1.65)$$

où

$$x_0 = \frac{\hbar k}{2e\mu_0 H_{c2}}, \quad (1.66)$$

et k est un paramètre arbitraire. Les fonctions propres de l'équation linéarisée sont donc fortement dégénérées. Par conséquent, un grand nombre de solutions pour le même champ de transition H_{c2} existe. De plus, la nucléation de la supraconductivité apparaît sur une largeur de bande $\xi(T)$ perpendiculaire à l'axe des x dont la position moyenne x_0 dépend du paramètre (lié à la dégénérescence) k . Dès lors, la solution générale ψ_L doit donc être une combinaison linéaire des ψ_k . Comme hypothèse supplémentaire à invoquer pour simplifier le problème, il est naturel de penser qu'une structure ordonnée des vortex soit plus favorable sur le plan énergétique qu'une disposition aléatoire dans le plan $x-y$. On peut par conséquent imposer une périodicité spatiale dans la direction y , de période $2\pi/q$, aboutissant à la combinaison linéaire,

$$\psi_L = \sum_n C_n \exp(inqy) \exp\left(-\frac{(x-x_n)^2}{2\xi^2(T)}\right), \quad (1.67)$$

avec,

$$x_n = \frac{nq\hbar}{2e\mu_0 H_{c2}}.$$

¹²Pour rappel, "bulk" désigne un matériau dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que les longueurs caractéristiques λ et ξ .

De manière à garantir également une périodicité selon l'abscisse x , les coefficients C_n doivent satisfaire la condition d'Abrikosov,

$$C_{n+p} = C_n, \text{ où } p \text{ est un entier.}$$

Avec $p = 1$, choix d'Abrikosov dans son article de 1957¹³, le réseau de vortex est carré et chaque cellule du réseau périodique supporte l'équivalent d'un quantum de flux magnétique Φ_0 . En effet, la période Δy selon y vaut $2\pi/q$, et Δx selon x vaut $x_{n+1} - x_n = q\hbar/(2e\mu_0 H_{c2})$. Par conséquent,

$$\Delta x \Delta y = \frac{\Phi_0}{\mu_0 H_{c2}},$$

ou encore, le flux d'induction magnétique supporté par une cellule du réseau périodique vaut Φ_0 ,

$$\Delta x \Delta y B_{c2} = \Phi_0.$$

Toutes les solutions de la forme (1.67) sont possibles à H_{c2} . De façon à déterminer laquelle pourrait être observée, il est nécessaire d'inclure le terme non linéaire dans les développements pour lever la dégénérescence. Abrikosov isolera un paramètre important dans cette analyse,

$$\beta_A \equiv \frac{\langle \psi_L^4 \rangle}{\langle \psi_L^2 \rangle^2}, \quad (1.68)$$

indépendant de la normalisation du paramètre d'ordre, et permettant d'identifier les types de réseaux favorables sur le plan de l'énergie libre (pour plus de détails, voir [2] pp. 144-147).

Estimation qualitative du champ de pénétration du premier vortex: H_{c1}

En exploitant la signification physique de λ et ξ , il est possible de simplifier le comportement de l'induction magnétique \vec{B} et de la fonction d'onde ψ autour d'un vortex d'Abrikosov, centré ici en $r = 0$ et dirigé selon l'axe \hat{e}_z . Soient,

$$\begin{aligned} B_z(r) &= \frac{\Phi_0}{\pi\lambda^2} \text{ pour } |r| \leq \lambda, \\ &= 0 \text{ ailleurs et,} \\ \psi(r) &= 0 \text{ pour } |r| \leq \xi, \\ &= \psi_0 \text{ ailleurs.} \end{aligned}$$

La Figure 1.19 illustre cette simplification. Notons que la quantification du flux magnétique dans un vortex d'Abrikosov permet d'estimer la valeur de l'induction magnétique piégée $B(r) = B_v$ avec $B_v = \Phi_0/(\pi\lambda^2)$. Par conséquent, dans les variables adimensionnelles (1.39), l'énergie libre (1.43) par unité de hauteur associée à un tube de flux plongé dans un champ magnétique externe $B_z = B_{ext}$ vaut,

$$\Delta\mathcal{G}_{1Vortex} = (0 - b_{ext})^2 * (S - \pi u_v^2) + (b_v - b_{ext})^2 \pi u_v^2 - \frac{\kappa^2}{2} (S - \pi u_\psi^2), \quad (1.69)$$

avec S qui représente la surface totale du matériau perpendiculaire au tube de flux, $u_v = r_v/\lambda = \lambda/\lambda = 1$, $u_\psi = r_\psi/\lambda = \xi/\lambda = 1/\kappa$, $B_v = \Phi_0/(\pi\lambda^2)/(\Phi_0/(2\pi\lambda^2)) = 2$, $b_{ext} = B_{ext}/(\Phi_0/(2\pi\lambda^2))$ et $\phi = \psi_0/\psi_0 = 1$. Par conséquent, l'expression précédente se simplifie et devient,

$$\Delta\mathcal{G}_{1Vortex} = b_{ext}^2 S + \frac{9\pi}{2} - 4b_{ext}\pi - \frac{\kappa^2}{2} S. \quad (1.70)$$

¹³Kleiner [29] proposera en 1964 le choix d'un réseau triangulaire où $iC_{2n+1} = C_{2n} = C^{ste}$. Ce dernier, observé expérimentalement, est plus favorable que le réseau carré proposé initialement par Abrikosov.

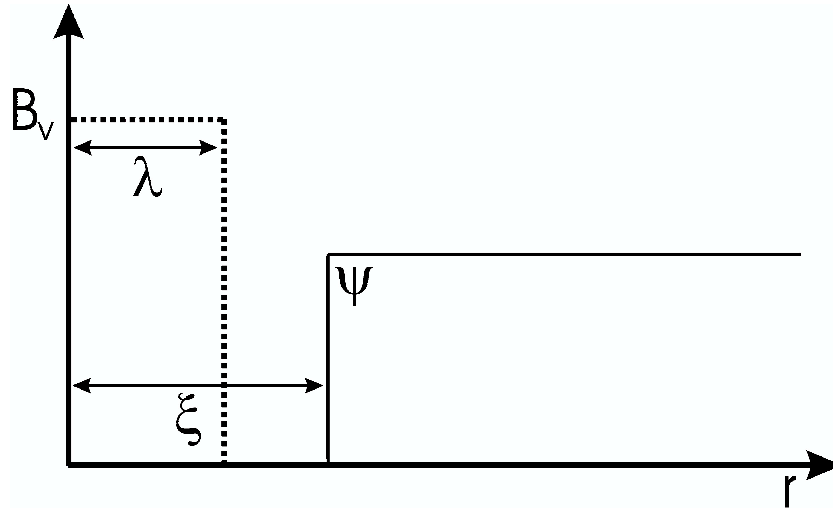


Figure 1.19— Idéalisation du comportement de l'induction magnétique \vec{B} et de la fonction d'onde ψ autour d'un tube de flux magnétique centré à l'origine.

Pour estimer le champ b_{c1} , champ de pénétration du premier vortex d'Abrikosov, il faut égaler ce résultat à l'énergie libre de l'état Meissner, c'est-à-dire,

$$\Delta\mathcal{G}_{0Vortex} = b_{ext}^2 S - \frac{\kappa^2}{2} S. \quad (1.71)$$

On trouve alors immédiatement l'expression du champ b_{c1} ,

$$b_{c1} = \frac{9}{8},$$

ou encore, dans les unités du S.I.,

$$B_{c1} = \frac{9}{8} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}. \quad (1.72)$$

En résumé, dans des supraconducteurs du type-II, le champ thermodynamique critique B_{cb} , est donné qualitativement par la moyenne géométrique des champs B_{c1} et B_{c2} ,

$$B_{cb} \approx \sqrt{B_{c1}B_{c2}}. \quad (1.73)$$

La courbe de magnétisation expérimentale (Figure 1.14) obtenue par Livingston [25] est en accord avec ce raisonnement qualitatif.

1.7 La supraconductivité HTc (1986)

Découverte en 1986 par Bednorz et Müller [11] dans des matériaux principalement constitués de plans d'oxyde de cuivre, la supraconductivité HTc se caractérise par une température critique (allant de ≈ 38 à ≈ 138 K) élevée. La gamme d'application de ces matériaux était alors beaucoup plus large de par l'abolition de la réfrigération à l'hélium liquide au profit de l'azote liquide beaucoup moins onéreuse. Cependant, ces supraconducteurs présentent généralement le désavantage d'être très cassants (types céramiques) et donc plus difficilement usinables que les métaux classiques supraconducteurs refroidis à l'hélium liquide.

Chapitre 2

Modèle covariant de la supraconductivité

Comme énoncé dans le chapitre précédent, les propriétés magnétiques des supraconducteurs peuvent se séparer en deux classes. Dans la première, connue comme *Type-I*, le champ décroît exponentiellement à partir de la surface et disparaît complètement dans un échantillon macroscopique¹. C'est l'effet Meissner. Dans la seconde, le flux magnétique est totalement expulsé, comme dans la situation précédente, mais seulement jusqu'à un certain champ magnétique H_{c1} . Au delà, le matériau toujours supraconducteur, se laisse pénétrer partiellement sous forme de tubes de flux quantifiés. Ce sont les vortex d'Abrikosov. Ces différentes manifestations de la supraconductivité sont très bien expliquées dans le cadre de la théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau (GL, voir chapitre précédent). Cependant, les équations associées ne permettent pas une étude des phénomènes temporels. De plus, les équations existantes qui incluent une telle description ne sont pas covariantes, c'est-à-dire non invariantes sous les transformations de Lorentz.

Bien qu'aucune description temporelle ne sera abordée dans le cadre de cette thèse, il est toujours intéressant de disposer d'un outil qui étend ce modèle dans un formalisme covariant. Dans la limite stationnaire et en absence de champ électrique, son extension "relativiste" devra reproduire les équations de Ginzburg-Landau.

2.1 Modèle covariant

L'énergie libre de Gibbs proposée dans le modèle de Ginzburg et Landau (1.38) est invariante pour une transformation de jauge $U(1)$, à savoir,

$$\begin{cases} \psi(\vec{x}) & \rightarrow e^{i\chi(\vec{x})}\psi(\vec{x}) \\ \vec{A} & \rightarrow \vec{A} + \frac{\hbar}{q}\vec{\nabla}\chi(\vec{x}) \end{cases}$$

Les minima du potentiel $V(|\psi|^2) = \alpha|\psi|^2 + \beta|\psi|^4$ intervenant dans l'énergie libre sont dégénérés, mais distincts lorsque $T < T_c$ (voir Figure 1.10). Le passage de l'un à l'autre s'effectue alors par la transformation de jauge $U(1)$ décrite ci-dessus.

Ces deux caractéristiques, invariance de jauge $U(1)$ et forme du potentiel, se retrouvent également dans l'expression du lagrangien de Higgs pour un champ scalaire complexe. Etant covariant, ce lagrangien est donc le candidat idéal pour une extension relativiste du modèle de Ginzburg-Landau [30].

¹Pour rappel, dont les dimensions sont largement supérieures aux longueurs caractéristiques λ et ξ .

2.2 Lagrangien de Higgs

Une extension covariante pour la supraconductivité peut donc se développer à partir du modèle de Higgs. L'action associée regroupe la contribution du champ électromagnétique $S_{em}(A_\mu)$ et du champ scalaire complexe $S_{scal}(\phi)$. On écrira, $S(A_\mu, \phi) = S_{em}(A_\mu) + S_{scal}(\phi)$, où,

$$S_{em} = -\epsilon_0 c \int_{\infty} d^4x \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

et,

$$S_{scal} = N_0 \int_{\Omega} d^4x \{ |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2) \} \quad (2.2)$$

avec $D_\mu = (\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar} A_\mu)$, Ω et $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ qui définissent la dérivée covariante, le volume du supraconducteur et le tenseur du champ électromagnétique, respectivement. Les grandeurs $x^\mu = (ct, \vec{x})$ et $A^\mu = (\Phi/c, \vec{A})$ forment un quadrivecteur dont leur produit interne dans la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = (+ - - -)$, $x^\mu x_\mu = (ct)^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$ est invariant sous une transformation de Lorentz. Le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ inclut les composantes du champ électrique et magnétique au travers des relations suivantes,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \quad (2.3)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.4)$$

Afin d'adapter ce modèle à la supraconductivité, un facteur de normalisation N_0 a été introduit. Remarquons que les expressions (2.1) et (2.2) sont appropriées aux unités de mesure du Système International, avec les facteurs physiques de c (vitesse de la lumière), ϵ_0 et μ_0 inclus explicitement. C'est en comparant les équations du mouvement issues de ce modèle à celles de Ginzburg-Landau qu'il sera possible de lier les facteurs de normalisation aux longueurs caractéristiques de la supraconductivité, λ et ξ .

Les dimensions du facteur de normalisation N_0 sont justifiées par le choix de la signification physique de ϕ . Dans le cas présent, $|\phi(\vec{x}, t)|^2$ doit représenter une densité de paires de Cooper en \vec{x} et à l'instant t . Sous cette définition, les dimensions de N_0 deviennent $[\text{kg m}^3/\text{s}]$ car $[|\phi|^2] = [1/\text{m}^3]$.

2.2.1 Equations du mouvement

Les équations du mouvement résultant de la minimisation de l'action $S(A_\mu, \phi)$ sont,

- les équations de Maxwell inhomogènes,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J_{em}^\mu$$

avec,

$$J_{em}^\mu = \frac{iqc}{\hbar} N_0 [\phi^* D^\mu \phi - \phi D^{*\mu} \phi^*], \quad (2.5)$$

- l'équation de Ginzburg-Landau covariante,

$$D_\mu D^\mu \phi = -\phi V'(|\phi|^2), \quad (2.6)$$

avec la notation $V'(|\phi|^2) = \frac{\partial}{\partial |\phi|^2} V(|\phi|^2)$ et le terme de surface,

$$N_0 \int d^4x \partial_\mu [\delta\phi^* D^\mu \phi] = 0, \quad (2.7)$$

et les équations de Maxwell homogènes, déduites des relations (2.3) et (2.4).

2.2.2 Détermination des facteurs de normalisation

Afin de relier les facteurs de normalisation aux équations de London, $|\phi|^2 = \rho$ doit être considéré comme constant ($= \rho_0$), c'est-à-dire,

$$\phi(\vec{x}) = \sqrt{\rho_0} e^{i\theta(\vec{x})}. \quad (2.8)$$

En injectant cette définition dans la relation (2.5) du courant électromagnétique, on obtient pour la composante spatiale,

$$\vec{J}_{em} = \frac{2q^2 c}{\hbar^2} N_0 \rho_0 \left[\frac{\hbar}{q} \vec{\nabla} \theta - \vec{A} \right]. \quad (2.9)$$

L'équation de London apparaît alors naturellement en combinant son rotationnel avec l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{em}$, sous la forme,

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{2q^2 c}{\hbar^2} N_0 \rho_0 \vec{B} \stackrel{(1.11)}{=} \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}, \quad (2.10)$$

ce qui fixe le facteur de normalisation N_0 en terme de la longueur de pénétration λ_L ,

$$N_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu_0 q^2 c \lambda_L^2 \rho_0} = \epsilon_0 c \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{q \lambda_L} \right)^2 \frac{1}{\rho_0}.$$

Pour bénéficier de l'analogie avec un potentiel harmonique décrivant une oscillation autour d'une position d'équilibre x_0 , $V(x) \propto (x - x_0)^2$, il est nécessaire de redéfinir le potentiel de Ginzburg-Landau (termes quadratiques dans l'énergie libre (1.31)) comme suit,

$$\begin{aligned} V_{GL}(\phi) &= \alpha |\phi|^2 + \frac{\beta}{2} |\phi|^4 + \frac{\alpha^2}{2\beta} \\ &= \frac{\beta}{2} \left(|\phi|^2 - \frac{-\alpha}{\beta} \right)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire en ajoutant une constante ($\frac{\alpha^2}{2\beta}$) dans l'énergie libre sans conséquence sur les équations du mouvement. Cette représentation suggère dès lors la paramétrisation générale suivante du potentiel dans $S_{scal}(\phi)$,

$$V(|\phi|^2) = \frac{1}{2} N_1 (|\phi|^2 - \rho_0)^2,$$

où N_1 est un facteur de normalisation possédant les dimensions d'une longueur. En effet, dans (2.2), le potentiel V doit avoir les mêmes dimensions que la dérivée covariante, $[V] = [D_\mu \phi]^2 = [\frac{1}{m} \frac{1}{m^{3/2}}]^2 = [\frac{1}{m^5}]$, et donc $[N_1] = [m]$ puisque $[(|\phi|^2 - \rho_0)^2] = [\frac{1}{m^6}]$.

En l'absence de champ électromagnétique, $A_\mu = 0$, l'équation de Ginzburg-Landau covariante (2.6) s'écrit alors dans les variables adimensionnelles $\vec{u} = \vec{x}/\lambda$, $f(\vec{x}) = \psi(\vec{x})/\sqrt{\rho_0}$,

$$-\frac{2}{N_1 \rho_0 \lambda^2} \partial_u^2 f + f|f|^2 - f = 0.$$

En identifiant cette équation à la première équation de GL exprimée dans les même variables adimensionnelles (Eq.(1.45) avec $\vec{a} = 0$), le second facteur de normalisation est déterminé et vaut,

$$N_1 = \frac{1}{\rho_0 \xi^2} \text{ puisque } \frac{1}{\kappa^2} = \frac{1}{N_1 \rho_0 \lambda^2}.$$

Toutes les constantes de normalisation étant établies,

$$N_0 = \epsilon_0 c \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{q \lambda_L} \right)^2 \frac{1}{\rho_0} \text{ et } N_1 = \frac{1}{\xi_{GL}^2 \rho_0},$$

la densité lagrangienne, après normalisation de ϕ par $\sqrt{\rho_0}$, s'écrit,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\epsilon_0 c F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \epsilon_0 c \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{q\lambda} \right)^2 \left(|D_\mu \phi|^2 - \frac{1}{\xi^2} V_0(|\phi|^2) \right), \quad (2.11)$$

avec $V_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

2.2.3 Cas stationnaires purement magnétiques

En restreignant le problème aux seuls cas stationnaires purement magnétiques, la densité hamiltonienne $\mathcal{H}_0 \equiv \partial_0 q_\mu \pi_{q_\mu}^\mu - \mathcal{L}$ avec $\pi_{q_\mu}^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 q_\mu)}$ se simplifie et est alors simplement opposée à la densité lagrangienne,

$$\mathcal{H}_0 = -\mathcal{L}. \quad (2.12)$$

L'hamiltonien $H_0 = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}_0$, ou encore l'énergie associée au lagrangien (2.11) décrivant un cylindre plongé dans un magnétique externe B_{ext} vaut alors [52],

$$\mathcal{E} = \int_\infty d^3\vec{x} \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B} - \vec{B}_{ext})^2 + \int_\Omega d^3\vec{x} \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\hbar}{q\lambda} \right)^2 \left(|(\vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\vec{A})\phi|^2 + \frac{1}{\xi^2} V_0(|\phi|^2) \right), \quad (2.13)$$

puisque $-\frac{1}{4}\epsilon_0 c F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \xrightarrow{(\vec{E}=0, \text{stat.})} \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$, et $|D_\mu \phi|^2 \xrightarrow{(\vec{E}=0, \text{stat.})} |(\vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\vec{A})\phi|^2$. A partir de cette expression, une interprétation qualitative en termes de longueurs caractéristiques λ et ξ devient évidente. Sous cette forme, la première partie de l'intégrale représente la contribution énergétique du champ magnétique, tandis que la seconde peut être assimilée à la contribution en énergie du condensat des paires de Cooper. Dès lors, λ "pèse" leur poids relatif. En d'autres mots, dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$, l'énergie du condensat par rapport à la contribution magnétique devient négligeable. L'énergie totale \mathcal{E} du système se minimise alors dans la situation où $(\vec{B} - \vec{B}_{ext})^2 \rightarrow 0$, c'est-à-dire pour $\vec{B} \approx \vec{B}_{ext}$, la situation où le champ n'est effectivement pas écranté, $\lambda \rightarrow \infty$.

Un raisonnement similaire se déduit de la seconde partie de l'intégrale, où ξ "pèse" les contributions relatives d'une part à l'énergie cinétique des paires de Cooper (terme de gradient), et d'autre part à la variation du potentiel autour de sa position d'équilibre. Dans la limite $\xi \rightarrow \infty$, l'énergie potentielle devient négligeable, et la situation est minimisée lorsque $\vec{\nabla}\phi \rightarrow i\frac{q}{\hbar}\vec{A}\phi$, ou encore $\vec{\nabla}\phi \rightarrow 0$ si $\vec{A} = 0$. L'interprétation de ξ comme un paramètre de rigidité du paramètre d'ordre se confirme une fois de plus au travers de cette analyse qualitative.

Lien avec le Modèle de Ginzburg-Landau

En introduisant les variables adimensionnelles déjà proposées lors de l'analyse des équations de GL,

$$\vec{u} = \frac{\vec{x}}{\lambda}, \quad \vec{\partial} = \lambda \vec{\nabla}, \quad \vec{b} = \frac{B}{\Phi_0/(2\pi\lambda^2)} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{A}{\Phi_0/(2\pi\lambda)}, \quad (2.14)$$

avec $\Phi_0 = 2\pi\hbar/|q|$ et $|q| = -2e$ où e est la charge du positron, l'énergie du système s'écrit,

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^3}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2 \left\{ \int_\infty d^3\vec{u} (\vec{b} - \vec{b}_{ext})^2 + \int_{\Omega/\lambda^3} d^3\vec{u} \left(|\vec{\partial}\phi + i\vec{a}\phi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\phi|^2 - 1)^2 \right) \right\}, \quad (2.15)$$

c'est-à-dire l'énergie libre $\Delta\mathcal{G}$ de Ginzburg-Landau (1.43) à une constante $\frac{\kappa^2}{2}$ près dans l'expression du potentiel, et au signe près devant \vec{a} dans l'expression de la dérivée covariante. Cette différence provient simplement du choix de la définition de l'unité de quantum Φ_0 par $2\pi\hbar/q$ pour les variables adimensionnelles (1.39) et $2\pi\hbar/|q|$ dans le cas présent. Quant au terme $\frac{\kappa^2}{2}$, comme l'ajout d'une constante

dans cette expression ne modifie pas les équations du mouvement, on peut conclure que le modèle de Higgs précédemment développé rejoint celui de Ginzburg-Landau dans la limite stationnaire purement magnétique. Les équations du mouvement et leurs conditions aux bords qui en découlent seront donc identiques aux équations de GL proposées dans la section 1.6.3.

Dans la perspective de l'étude de la magnétisation de nanofils de plomb, ce sont ces derniers qui feront l'objet d'une analyse numérique plus approfondie dans le cadre de cette thèse.

Equations du mouvement

Pour une configuration indépendante du temps plongée dans un champ magnétique externe \vec{b}_{ext} , l'énergie libre (2.15) dans les variables adimensionnelles (2.14) peut se réécrire sous la forme,

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda^3}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2 \left\{ \int_{\infty} d^3\vec{u} (\vec{b} - \vec{b}_{ext})^2 + \int_{\Omega/\lambda^3} d^3\vec{u} \left(|\vec{\partial}\phi + i\vec{a}\phi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\phi|^2 - 1)^2 - \frac{\kappa^2}{2} \right) \right\}, \quad (2.16)$$

où le dernier terme $\frac{\kappa^2}{2}$ a été ajouté de façon à normaliser l'énergie libre à zéro dans l'état normal ($\phi = 0$ et $\vec{b} = \vec{b}_{ext}$), et $\mathcal{E} \neq 0$ dans l'état supraconducteur.

La minimisation de cette énergie libre conduit à l'équation de GL,

$$(\vec{\partial} + i\vec{a})^2 \phi(\vec{u}) = \kappa^2 \phi(\vec{u}) (|\phi(\vec{u})|^2 - 1), \quad (2.17)$$

couplée à l'équation de Maxwell,

$$\vec{\partial} \times \vec{b} = \vec{j}, \quad (2.18)$$

où le courant des paires de Cooper \vec{j} est normalisé par $\Phi_0/(\mu_0 2\pi\lambda^3)$, et est donné en termes du potentiel vecteur \vec{a} et de la fonction d'onde ϕ par,

$$\vec{j} = \frac{i}{2} \left(\phi^* (\vec{\partial}\phi + i\vec{a}\phi) - (\vec{\partial}\phi^* - i\vec{a}\phi^*) \phi \right), \quad \vec{\partial} \cdot \vec{j} = 0. \quad (2.19)$$

En particulier, cette dernière relation implique la seconde équation de London décrivant l'effet Meissner,

$$\vec{\partial} \times \left(\frac{\vec{j}}{|\phi|^2} \right) = -\vec{b}. \quad (2.20)$$

Les équations du mouvement (2.17)-(2.20) définissent un système d'équations non linéaires couplées à résoudre numériquement pour étudier les propriétés magnétiques et thermodynamiques (au travers de l'énergie libre (2.16)) d'un matériau supraconducteur. La condition au bord associée à l'équation (2.17),

$$\vec{n} \cdot (\vec{\partial} + i\vec{a})\phi \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.21)$$

exprime que le courant des paires de Cooper \vec{j} ne peut s'échapper du matériau Ω .

Chapitre 3

Etude des états stationnaires à symétrie cylindrique: Modèle 1D

Dans le but de comprendre la magnétisation dans des nanofils de plomb, il est naturel d'invoquer le maximum de symétrie présent dans le problème pour simplifier les équations du mouvement à résoudre. La restriction du spectre des solutions aux cas stationnaires à symétrie cylindrique apparaît dès lors trivialement. Nous verrons qu'ils conduisent à la résolution d'un système d'équations non linéaires aux dérivées ordinaires à une variable. L'appellation "modèle 1D" fera référence à ces équations.

Le présent chapitre commence par une introduction concernant les propriétés magnétiques à l'échelle mésoscopique, en particulier les résultats expérimentaux de la magnétisation de disques d'aluminium [31, 32]. Par mésoscopique, on entend des échantillons dont les dimensions géométriques sont comparables aux longueurs caractéristiques λ et ξ . Le système d'équations à résoudre et la stratégie numérique employée seront ensuite développés. Au delà des solutions déjà établies [33, 34, 35], une nouvelle classe, appelée "Vortex Annulaires" (VA) sera exposée [36, 37, 38, 39]. Enfin, les diagrammes de phase et les types de transition en fonction des paramètres géométriques et des longueurs caractéristiques seront établis et confrontés aux résultats numériques obtenus récemment par Zharkov [40].

3.1 Introduction

Les récents développements en nanotechnologie et leurs techniques de mesure permettent de sonder les propriétés thermodynamiques et magnétiques de supraconducteurs à l'échelle mésoscopique bien en deçà de la température critique [31, 32, 41]. Au travers de ses expériences de magnétisation, Geim [32] fait apparaître une corrélation entre le type (-I ou -II) de transition, et la taille de l'échantillon analysé. Sur le plan théorique, Ginzburg démontrait déjà en 1958 l'existence d'une telle dépendance à l'échelle mésoscopique. Dans le cas d'un cylindre, il démontra qu'un rayon critique r_c de l'ordre de $\sqrt{3}\lambda$ pour $\kappa \rightarrow 0$ [42] sépare les deux types de transition.

La Figure 3.1 illustre expérimentalement ces manifestations mésoscopiques pour des disques d'aluminium évaporé de rayons variables de l'ordre de 250 à 1200 nm et d'épaisseur de l'ordre de 130 nm. La magnétisation pour les plus petits rayons, en particulier 250 nm (courbe a), présente une transition du second ordre autour du changement de phase. Aucune hystérèse n'est observée à cette taille. En doublant la dimension radiale (courbe b), les propriétés thermodynamiques changent complètement. Le matériau transite de façon discontinue en exhibant une hystérèse de l'ordre de 14 Gauss. Enfin, avec des rayons plus élevés, $r \gtrsim 750$ nm, les deux types de transition deviennent apparents dans une même courbe de magnétisation (courbes c et d). Une série de sauts, caractéristiques d'une transition du premier ordre, s'accomplissent dans l'état supraconducteur, et un passage continu réversible vers l'état normal

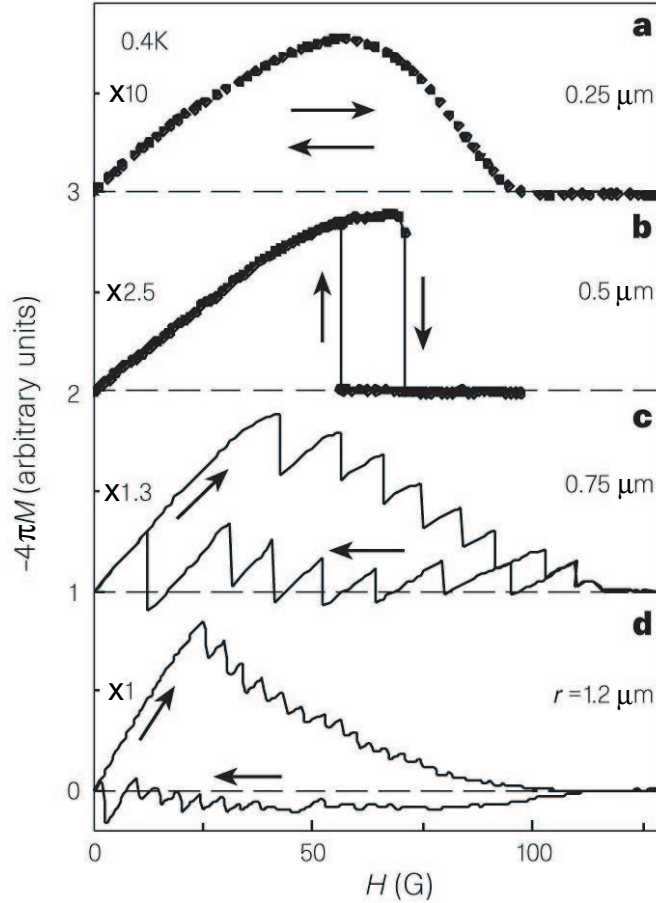


Figure 3.1— Magnétisation [32] de disques d’aluminium de rayons, a. 250 nm, b. 500 nm, c. 750 nm et d. 1200 nm. Les flèches indiquent la direction du champ magnétique externe pour les mesures. Connaissant la résistivité du film d’aluminium évaporé, et donc le libre parcours moyen des électrons ($l \approx 50$ nm ici), les longueurs caractéristiques à zéro kelvin ont été estimées à $\xi(0) \approx 250$ nm et $\lambda(0) \approx 70$ nm. Par conséquent, pour des tailles macroscopiques, cet échantillon devrait se comporter comme un supraconducteur de type-I, c’est-à-dire avec un saut dans la magnétisation lors de la transition supra \leftrightarrow normal (voir Figure 1.14, courbe A). Les quatre courbes ci-dessus témoignent de la forte corrélation entre la taille de l’échantillon et le(s) type(s) de transition observé(s). Par conséquent, la frontière définie par $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ à l’échelle macroscopique entre type-I et type-II perd tout son sens à l’échelon mésoscopique.

s’opère autour du champ critique de transition état normal-supraconducteur. De plus, cet échantillon présente une réponse essentiellement paramagnétique, donc loin de l’effet de Meissner classique, en champ magnétique B_{ext} décroissant lors de la prise de mesures.

Toutes ces propriétés spécifiques à la dimension mésoscopique de l’échantillon sont maintenant bien interprétées au travers des équations de Ginzburg-Landau (GL). En particulier, la transition du premier ordre observée pour les rayons élevés s’explique par un changement du moment angulaire total (L) de la configuration de vortex capturés dans l’échantillon. En proposant un développement du paramètre d’ordre en termes d’une amplitude f à dépendance purement radiale et d’une phase θ contenant l’information topologique de la configuration du vortex piégé, ψ est représenté par [33],

$$\psi(r, \phi) = f(r)e^{iL\phi}, \quad (3.1)$$

avec (r, ϕ) les coordonnées polaires du plan contenant un vortex centré à l'origine en $r = 0$ et de vortacité L . Avec cette description, les travaux du groupe de Moshchalkov ont mis en évidence le caractère dia-ou para-magnétique possible pour des solutions aux équations de GL de type **Vortex d'Abrikosov** ($L = 1$) et **GiantVortex** ($L \geq 2$) (GV) [34]. Peeters *et al.* ont étudié en détail les différentes symétries de configuration de vortex permises en fonction de la géométrie et du paramètre κ de l'échantillon. Des transitions entre topologies différentes de même vortacité (**MultiVortex** \leftrightarrow **GiantVortex**) ont été découvertes et leur type de transition (type-II en particulier) déterminé [43, 44]. Enfin, bien que déjà établi dans des cas particuliers par Ginzburg en 1958 [42], Zharkov [40] proposa en 2002 un diagramme de phase complet sur l'ordre de la transition entre des états à symétrie cylindrique de différents rayons, κ et vortacité L .

Les travaux sur les équations de GL étant nombreux, les références citées précédemment ne sont donc certainement pas exhaustives. Cependant, ces dernières en mentionnent d'autres qui peuvent compléter suffisamment le sujet.

3.2 Equations du mouvement, énergie libre et magnétisation

Soit un cylindre de hauteur infinie, de rayon R , plongé dans un champ magnétique externe B_{ext} dirigé dans le sens de l'axe de rotation \hat{e}_z . Comme mentionné précédemment, seules les solutions à symétrie cylindrique vont être étudiées dans ce chapitre. Par conséquent, la paramétrisation suivante s'applique,

$$\vec{B} = B(r)\hat{e}_z, \quad \vec{A} = A(r)\hat{e}_\phi, \quad \mu_0 \vec{J}_{em} = J(r)\hat{e}_\phi, \quad \psi(r, \phi) = f(r)e^{i\theta(\phi)} \text{ et, } \rho(r) = f^2(r), \quad (3.2)$$

où (r, ϕ) définissent les coordonnées polaires dans un plan perpendiculaire à \hat{e}_z . La fonction d'onde est donc décomposée en termes de deux fonctions $f(r)$ et $\theta(\phi)$. La première, $f(r)$, est réelle, continue et sans restriction sur son signe, tandis que la seconde, $\theta(\phi)$, est supposée simplement continue. Habituellement, $f(r)$ représente la racine de la densité du condensat, $f(r) = \sqrt{\rho(r)}$, et est donc toujours définie positive. Cependant, là où la fonction $f(r)$ s'annule et que son gradient reste différent de zéro, une telle restriction dans le signe de f conduit à une discontinuité de $\pm\pi$ dans la phase θ . En effet, pour maintenir la continuité de la fonction d'onde ψ et de sa dérivée première $\vec{\partial}\psi$, en particulier ici sa dérivée radiale $\partial_r\psi = \partial_r(f(r)e^{i\theta(\phi)}) = e^{i\theta(\phi)}\partial_r f(r)$, il faut que $\theta(\phi)$ effectue un saut de $\pm\pi$ pour garantir $\partial_r\psi$ continu là où la fonction $\partial_r f(r)$ présente une singularité, c'est-à-dire en $r = r_0$ sur la Figure 3.2 a). Par contre, en permettant à $f(r)$ de changer de signe au delà de r_0 , sa dérivée $\partial_r f(r)$ n'est plus singulière en ce point (Figure 3.2 b)), et la phase peut donc changer continûment. La paramétrisation de la fonction d'onde $\psi(r, \phi) = f(r)e^{i\theta(\phi)}$, avec $f(r)$ et $\theta(\phi)$ sans discontinuités, n'impose à $f(r)$ aucune restriction de signe. Cette liberté s'oppose donc à la paramétrisation courante de ψ en termes de la phase θ et d'une fonction définie positive $f(r) = \sqrt{\rho(r)}$.

Dans les variables adimensionnelles (2.14),

$$u = \frac{r}{\lambda}, \quad b(u) = \frac{B(u)}{\Phi_0/(2\pi\lambda^2)}, \quad a(u) = \frac{A(u)}{\Phi_0/(2\pi\lambda)} \text{ et, } j(u) = \frac{J(u)}{\Phi_0/(2\pi\lambda^3)},$$

et en introduisant la fonction $g(u)$ définie comme suit en termes de la densité $f^2(u)$ et du courant $j(u)$,

$$g(u) = u \frac{q\lambda^3}{\hbar} \frac{1}{f^2(u)} J(u) = -\frac{u}{f^2(u)} j(u),$$

les équations du mouvement (2.17)-(2.20) se simplifient sous la forme d'un système de deux équations non linéaires couplées aux dérivées ordinaires,

$$\begin{cases} \frac{1}{u} \frac{d}{du} \left(u \frac{d}{du} f(u) \right) &= \frac{1}{u^2} f(u) g^2(u) + \kappa^2 f(u) (f^2(u) - 1), \\ u \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} g(u) \right) &= f^2(u) g(u), \end{cases} \quad (3.3)$$

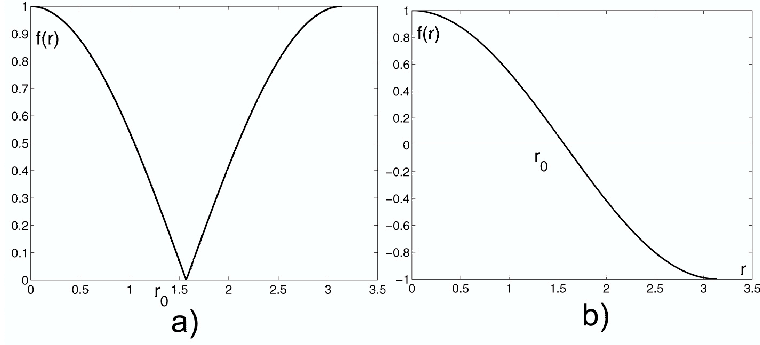


Figure 3.2— Représentation graphique des arguments de continuité de f et θ autour d'un zéro sur l'axe radial en $r = r_0$. La figure a) présente une singularité en r_0 pour la dérivée radiale de f . Par conséquent, la phase θ doit effectuer un saut discontinu de $\pm\pi$ pour garantir la continuité de la dérivée radiale de la fonction d'onde $\psi(r, \phi) = f(r)e^{i\theta(\phi)}$. Sur la figure b), cette discontinuité dans la phase disparaît si on autorise f à changer de signe.

avec l'induction magnétique $b(u)$ définie par,

$$b(u) = \frac{1}{u} \frac{d}{du} g(u). \quad (3.4)$$

Notons qu'en étape intermédiaire pour obtenir ces résultats théoriques, l'équation du supercourant (2.19) s'est simplifiée en,

$$j(u) = -\frac{f^2(u)}{u} \left(\partial_\phi \theta(\phi) + ua(u) \right),$$

ou encore,

$$g(u) = \partial_\phi \theta(\phi) + ua(u). \quad (3.5)$$

En développant la phase par sa représentation classique décrivant un Giant Vortex (GV) centré à l'origine $u = 0$ et de vorticité L [33], $\theta(\phi) = -L\phi$, les conditions frontières associées au système (3.3) à résoudre s'écrivent,

$$g(u)|_{u=0} = -L, \quad \frac{d}{du} g(u) \Big|_{u=u_b} = u_b b_{ext}, \quad (3.6)$$

et,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} f(u) \Big|_{u=0} = 0, \quad \frac{d}{du} f(u) \Big|_{u=u_b} = 0 \quad \text{si } (L = 0), \\ f(u)|_{u=0} = 0, \quad \frac{d}{du} f(u) \Big|_{u=u_b} = 0 \quad \text{si } (L \neq 0). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Finalement, l'énergie libre (2.16) par unité de hauteur d'un cylindre de hauteur infinie, de rayon normalisé $u_b = R/\lambda$, plongé dans un champ magnétique externe b_{ext} normalisé et dirigé selon l'axe \hat{e}_z devient,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{2\pi\lambda^2}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2 \int_0^{u_b} u \, du \left\{ \left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} g(u) - b_{ext} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{d}{du} f(u) \right)^2 + \frac{f^2(u)}{u^2} g^2(u) + \frac{\kappa^2}{2} (f^2(u) - 1)^2 - \frac{\kappa^2}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

et la magnétisation par unité de longueur du même cylindre s'exprime comme,

$$M = \Phi_0 \int_0^{u_b} \left(\frac{1}{u} \frac{d}{du} g(u) - b_{ext} \right) u \, du. \quad (3.9)$$

3.3 Résolution analytique et numérique du modèle 1D

Avant d'exposer les résultats numériques des équations du mouvement (3.3), il est important d'explorer les possibilités analytiques offertes par le problème.

3.3.1 Solution triviale

La solution triviale décrivant l'état normal, $f(u) = 0$ et $g(u) = -L + (u^2/2)b_{ext}$, satisfait comme il se doit le système d'équations non linéaires (3.3) et ses conditions frontières associées. Il est trivial de se convaincre que ce résultat correspond bien à l'état normal puisqu'il décrit une densité de paires de Cooper nulle $\rho(u) = f(u)^2 = 0$, et une induction magnétique égale au champ externe appliqué, $b(u) = \frac{1}{u} \frac{d}{du} g(u) = b_{ext}$.

3.3.2 Problème linéarisé

La paramétrisation suivante,

$$\begin{cases} f(u) = \tilde{f}(u)f_0 & \text{avec } f_0 \rightarrow 0, \\ g(u) = -L, \end{cases}$$

permet de linéariser l'équation de GL, et de résoudre le système (3.3) autour de la solution triviale précédente en l'absence de champ externe appliqué. Chercher les solutions du système (3.3) autour de la solution triviale précédente en l'absence de champ magnétique externe revient à étudier les solutions du même système avec $f(u) = \tilde{f}(u)f_0$ où $f_0 \rightarrow 0$ et $g(u) = -L$. En injectant ces solutions dans (3.3), on obtient immédiatement l'équation de Bessel [45] pour $\tilde{f}(u)$,

$$\frac{d^2}{du^2} \tilde{f}(u) + \frac{1}{u} \frac{d}{du} \tilde{f}(u) + \left(\kappa^2 - \frac{L^2}{u^2} \right) \tilde{f}(u) = 0.$$

Par conséquent, dans cette limite, $f(u)$ est donné en termes des fonctions de Bessel de première espèce J_ν , plus spécialement, $f(u) = f_0 J_{|L|}(\kappa u)$. Les autres solutions $K_\nu(u)$ ne sont pas permises puisqu'elles présentent une singularité à l'origine. Dans une étude qualitative des solutions réelles d'une équation différentielle liée à l'équation de GL, les mathématiciens Hervé et Hervé ont également démontré l'existence de telles solutions oscillantes [46].

L'interprétation physique de cette analyse est immédiate. Autour de la transition vers l'état normal, une solution non triviale possédant un comportement oscillant est possible. Le paramètre d'ordre associé à cette solution s'annule alors sur des cercles (plus précisément des cylindres) concentriques de rayons espacés $\Delta r \simeq \pi\xi$. Un tel comportement n'est dès lors permis que si le rayon du cylindre est supérieur au premier zéro de la fonction de Bessel, c'est-à-dire si $R \gtrsim \pi\xi$, ou encore, dans les unités normalisées, $u_b \gtrsim \pi/\kappa$. Notons une fois de plus que c'est la longueur de cohérence, ξ , qui fixe la "rigidité" du condensat de paires de Cooper au travers des oscillations de $f(r) \propto J_{|L|}(\kappa u = r/\xi)$.

3.3.3 Solutions numériques

Méthode numérique

La technique numérique employée pour la résolution du système (3.3) se base sur la méthode de tir, "Shooting method". Son principe réside dans la construction itérative des solutions par intégration numérique d'un bord à l'autre de leur domaine de définition. La méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre [47] a été appliquée pour cette intégration. Celle-ci résout numériquement les équations aux dérivées ordinaires du type,

$$\vec{Y}'[x] = \vec{f}(\vec{Y}[x], x), \quad (3.10)$$

par itération du schéma numérique suivant,

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3), \quad (3.11)$$

où,

$$\begin{cases} f_0 &= f(Y_n, x_n), \\ f_1 &= f(Y_n + \frac{h}{2}f_0, x_n + \frac{h}{2}), \\ f_2 &= f(Y_n + \frac{h}{2}f_1, x_n + \frac{h}{2}), \\ f_3 &= f(Y_n + hf_2, x_n + h). \end{cases}$$

Pour utiliser cette technique, le système à résoudre doit par conséquent être reformulé sous la forme autonome (3.10), c'est-à-dire,

$$\begin{cases} f'(u) &= F(u), \\ F'(u) &= -\frac{F(u)}{u} + \frac{1}{u^2}f(u)g^2(u) + \kappa^2f(u)(f^2(u) - 1), \\ g'(u) &= G(u), \\ G'(u) &= \frac{G(u)}{u} + f^2(u)g(u). \end{cases}$$

En choisissant l'origine, $u = 0$, comme point de départ du processus itératif (3.11), quatre conditions à ce bord ($f(0), F(0), g(0)$ et $G(0)$) sont nécessaires pour développer une solution unique au problème. Cependant, les quatre conditions frontières associées aux équations de GL (3.6) et (3.7) sont délocalisées sur les deux bords, et seulement deux sur les quatre nécessaires sont disponibles à l'origine. Les deux autres définissent deux contraintes supplémentaires à satisfaire sur le bord externe $u = u_b$. Pour pallier cette difficulté, deux inconnues à l'origine ont donc été introduites, f_0 et g_0 , et définies au travers des paramétrisations suivantes,

$$f(u) = u^{|L|}f_0 \text{ et } g_0 = \frac{1}{u} \frac{d}{du}g(u) = b(u), \quad (3.12)$$

valables dans la limite où $u \rightarrow 0$. La démarche numérique consiste alors à ajuster ces deux paramètres additionnels de façon à satisfaire les deux conditions sur le bord externe, à savoir

$$F(u_b) = \left. \frac{d}{du}f(u) \right|_{u=u_b} = 0 \quad \text{et} \quad b(u_b) = \frac{1}{u_b}G(u_b) = \left. \frac{1}{u_b} \frac{d}{du}g(u) \right|_{u=u_b} = b_{ext}.$$

En pratique, le programme résolvant les équations du mouvement (3.3) fixe une des deux inconnues, g_0 ici, et cherche un f_0 par la méthode de la sécante, qui satisfait $F(u_b) = 0$ avec une erreur absolue de 10^{-10} . En procédant de la sorte, on fixe en quelque sorte la valeur du champ magnétique à l'origine, et le code cherche la configuration $(f(u), g(u))$ à adopter pour satisfaire $F(u_b) = 0$. C'est donc *a posteriori* que l'on connaît la valeur du champ externe dans lequel le cylindre est plongé. Cette démarche est capitale pour générer une figure d'hystérèse complète dans le diagramme de phase $\mathcal{E} - B_{ext}$. En particulier, nous verrons qu'augmenter la valeur du champ à l'origine, n'engendre pas forcément une augmentation du B_{ext} . Des solutions métastables peuvent en effet apparaître au delà d'un certain champ externe appliqué, et engendrer alors une figure d'hystérèse. C'est d'ailleurs ce comportement qui est à l'origine de l'hystérèse expérimentalement observée pour des nanofils de plomb plongés dans une température voisine des 5 kelvins.

Résultats numériques

A titre d'exemple, la Figure 3.3 présente une série de solutions obtenues pour des vorticités imposées et égales à $L = 0$ et $L = 1$. Elle décrit les résultats numériques d'un cylindre de 550 nm de rayon, avec $\lambda = 50$ nm et $\xi = 50$ nm également. Le rayon normalisé prend la valeur $u_b = R/\lambda = 11$ et le paramètre phénoménologique $\kappa = 1$. Les courbes indicées par $n = 0$ sur la figure, correspondent aux solutions connues décrivant l'effet Meissner ($L = 0$, graphes de la ligne supérieure) et un vortex d'Abrikosov centré

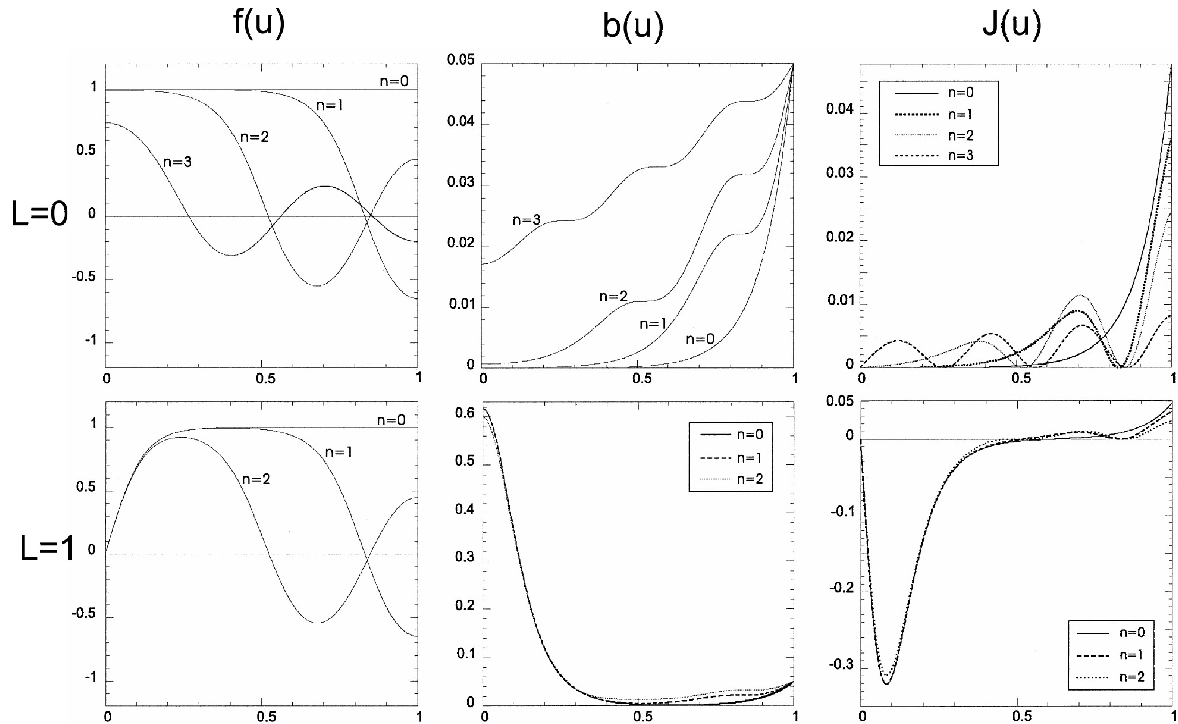


Figure 3.3— Différentes configurations possibles pour un cylindre de rayon normalisé $u_b = 11$, avec $\kappa = 1$, $\lambda = 50$ nm, $B_{ext} = 0.05 \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} = 66$ Gauss et $L = 0$ ou $L = 1$. De gauche à droite, la figure représente les valeurs de $f(u)$, $b(u)$ et $J(u) = -f^2(u)g(u)/u$ comme fonctions de la variable $x = u/u_b = r/r_b$, $0 \leq x \leq 1$. La ligne supérieure correspond à l'effet Meissner, $L = 0$, et la ligne inférieure à un vortex d'Abrikosov centré à l'origine, $L = 1$. Les indices n indiquent les modes de $f(u)$ permis pour ces paramètres u_b , κ et B_{ext} .

à l'origine du cylindre ($L = 1$, graphes de la ligne inférieure). Comme le montre le graphe supérieur gauche, le condensat de paires de Cooper est quasi constant et égal à sa valeur à l'équilibre, $f(u) \approx 1$. Les courants $J(u)$ (même ligne, graphe de droite), proportionnels à cette densité de paires de Cooper, $\rho = f^2$, sont importants sur le bord, et écrantent exponentiellement le champ magnétique externe comme illustré sur le graphe central supérieur ($b(u)$ avec $L = 0$ et $n = 0$). Dans le cas d'un vortex d'Abrikosov centré, $L = 1$, la densité de paire de Cooper s'annule au point d'ancrage, $u = 0$, du vortex. Il existe alors deux types de courants qui circulent à contresens dans le cylindre. Le premier, sur le bord u_b , positif, écrante comme dans l'effet Meissner $L = 0$ le champ externe. Le second, négatif, produit l'induction magnétique $b(u)$ piégée par le vortex (voir graphes inférieurs avec $L = 1$ et $n = 0$).

Une série de nouveaux graphes, indicés $n = 1, 2, 3$ pour $L = 0$ et $n = 1, 2$ pour $L = 1$ sont dessinés. Ils sont obtenus en variant le paramètre libre f_0 introduit dans la procédure de résolution numérique. Pour rappel, ce paramètre (3.12) représente respectivement la valeur à l'origine et la dérivée première de $f(u)$ pour $L = 0$ et $L = 1$. Les nouvelles solutions se caractérisent par des oscillations de périodes $\approx \pi/\kappa$, autour de la solution triviale $f(u) = 0$. Elles correspondent simplement à l'extension non linéaire en présence de champ externe des fonctions de Bessel $J_{|L|}(\kappa u)$ préalablement obtenues. L'indice n fait référence au mode de ces solutions, c'est-à-dire au nombre de zéros rencontrés par l'amplitude $f_n(u)$. Notons qu'au voisinage de ces valeurs nulles, le courant $J(u)$ s'annule (puisque proportionnel à $f^2(u)$), n'écrante par conséquent plus l'induction magnétique $b(u)$. Ceci explique les plateaux visibles pour $b(u)$ au voisinage du domaine où la fonction $f(u)$ s'annule. Ajoutons pour terminer que la solution $n = 3$ ne peut être présente avec $L = 1$. La taille occupée par le vortex magnétique piégé "pousse" en effet les

zéros de la fonction $f_n(u)$ vers le bord du cylindre, et empêche donc l'existence de l'état $L = 1, n = 3$. La Figure 3.4 décrit le profil en trois dimensions du courant $J(u)$ circulant dans le cylindre pour la configuration $L = 0$ avec $n = 3$. Comme établi précédemment, le courant s'annule sur des cercles concentriques de rayons distants de l'ordre de π/κ , c'est-à-dire là où la densité de paires de Cooper $f^2(u)$ s'annule. Cette image a inspiré la dénomination de “**Vortex Annulaires**” pour ce type de solutions oscillantes.

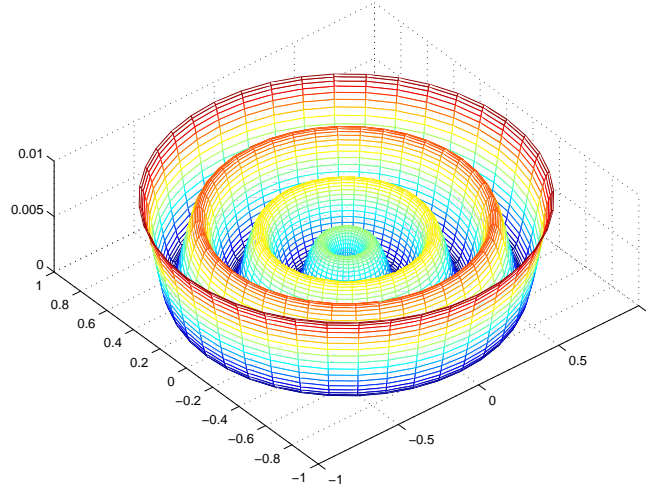


Figure 3.4— Profil à trois dimensions du courant normalisé $J_{n=3}(u)$ circulant dans un cylindre de rayon normalisé $u_b = 11$ avec $\kappa = 1$, $b_{ext} = 0.05$, $L = 0$ et $n = 3$. La structure en anneau a inspiré l'appellation “Vortex Annulaires” pour ce genre de solution.

La Figure 3.5 représente le diagramme de phase (B_{ext}, \mathcal{E}) d'un cylindre de rayon $u_b = 5$ et comme précédemment avec $\lambda = \xi = 50$ nm ($\kappa = 1$). Les états de plus basse énergie correspondent toujours au mode nul, $n = 0$. Pour $n = 1$, en trait foncé sur la figure, seule une vorticité décrivant l'effet Meissner, $L = 0$, permet son existence. Comme mentionné précedemment dans la description de la méthode numérique employée, une figure d'hystérèse apparait clairement sur cette figure. A titre d'exemple, pour $L = 0$, l'énergie libre peut présenter jusqu'  quatre solutions possibles autour de la transition pour un B_{ext} fixé (voir zoom sur la même figure). Trois solutions d'énergie différente de zéro (ligne continue) se rapportent   l'état supraconducteur, et une, d'énergie nulle (ligne en pointillés), correspond comme il se doit   l'état normal. Notons que parmi les trois solutions supraconductrices possibles, deux sont métastables. L'existence de telles solutions engendre un comportement d'hystérèse observé dans la magnétisation expérimentale de nanofils de plomb [48].

3.4 Hystérèse et ordre de la transition

L'hystérèse mise en exergue précedemment dans l'énergie libre \mathcal{E} requiert une analyse plus approfondie, en particulier sur son existence et son importance en fonction des dimensions du cylindre et de l'unique paramètre du modèle de Ginzburg-Landau, κ . L'objectif de cette démarche sera d'identifier l'ordre de la transition normal \leftrightarrow supraconducteur, et l'étendue en champ magnétique de l'éventuelle hystérèse. L'analyse qui suit se restreint   l' tat Meissner $L = 0$, puisque les cas $L \neq 0$ présentent les mêmes caractéristiques physiques. Ajoutons également qu'une étude de ce phénomène d'hystérèse en fonction du rayon et de l'épaisseur d'un disque a été réalisée par V.A. Schweigert et F.M. Peeters [35].

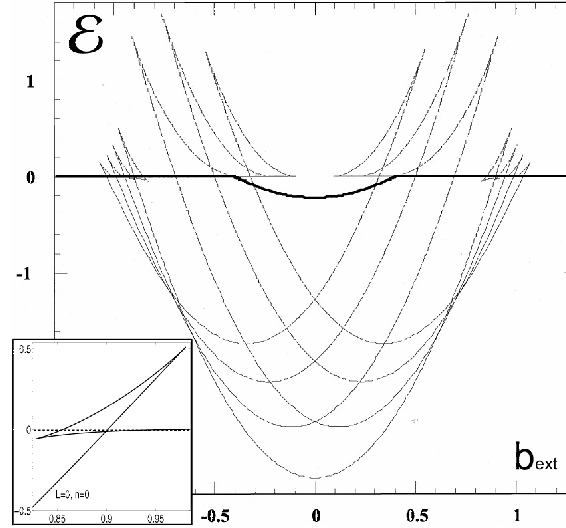


Figure 3.5— Énergie libre \mathcal{E} (en unités $\frac{2\pi\lambda^2}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\right)^2$) en fonction du champ magnétique externe appliqué b_{ext} (en unités $\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}$) pour un cylindre de rayon $u_b = 5$ (en unités λ), $\kappa = 1$ et $\lambda = 50$ nm. Toutes les courbes en trait fin correspondent, de gauche à droite, à l'énergie libre des états $L = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ et $L = 3$ respectivement. Les états de vorticité plus élevée ont été omis de façon à clarifier la figure. La courbe en trait foncé décrit l'énergie libre de l'unique vortex annulaire ($L = 0$ et $n = 1$) possible pour ces paramètres $u_b = 5$, $\kappa = 1$ et $\lambda = 50$ nm. La figure en bas à gauche est un agrandissement de l'hystérèse de l'état $L = 0, n = 0$ autour de la transition normal-supraconducteur. Le trait discontinu, d'énergie $\mathcal{E} = 0$, décrit l'état normal. Toujours dans cette sous-figure, pour un champ externe fixé, quatre valeurs d'énergie libre sont possibles pour $0.83 \leq b_{ext} \leq 0.98$. Une correspond à l'état normal ($\mathcal{E} = 0$, trait discontinu), et les trois autres à l'état supraconducteur. Parmi celles-ci, deux sur les trois sont alors métastables et génératrices du comportement d'hystérèse dans l'énergie libre.

3.4.1 Hystérèse

Soit $\lambda = 50$ nm, $\kappa = 0.2$ fixés, et le rayon normalisé u_b du cylindre laissé libre. Pour cette valeur de κ , tant que $u_b \leq 1.74$, l'énergie libre \mathcal{E} ne présente aucune hystérèse autour du champ de transition normal-supraconducteur, B_c^{II} (Figure 3.6-a avec u_b fixé à 1.5 à titre d'exemple). L'indice c ici fait référence au terme critique, et l'exposant à l'ordre de la transition, en l'occurrence II puisque cette dernière est continue. Au delà de $u_b = 1.74$, par exemple pour $u_b = 3$, l'énergie exhibe une hystérèse. Deux champs critiques, dénommés B_{cup}^I et B_{cdown}^I , peuvent alors être définis et délimitent la largeur en champ magnétique où \mathcal{E} contient des solutions métastables supplémentaires. Ces deux champs critiques sont illustrés sur la Figure 3.6, graphes d-f, et leur différence, ou encore la largeur de l'hystérèse,

$$\Delta B_c^I = B_{cup}^I - B_{cdown}^I, \quad (3.13)$$

croît avec le rayon u_b (Figure 3.7). Sur le plan thermodynamique, on suspecte que la transition du premier ordre dans la magnétisation apparaît à la valeur B_{cup}^I (B_{cdown}^I) en mode champ magnétique externe croissant (décroissant). Cette propriété, motivant entre autre les appellations B_{cup}^I et B_{cdown}^I , est justifiée en regard du comportement du paramètre d'ordre autour de la transition (Figure 3.6-f). En dessinant la valeur maximale de ψ en fonction du champ magnétique externe, une hystérèse apparaît également entre B_{cdown}^I et B_{cup}^I . Dans le cas d'un cylindre dans l'état Meissner ($L = 0$), ψ_{max} est évidemment atteint à l'origine du cylindre, là où l'induction magnétique est la plus faible ($\psi_{max} = f(u = 0)$). Lorsque B_{ext} croît, ψ_{max} diminue tant que B_{cup}^I n'est pas rejoint. Au delà, seule la solution $\psi = 0$ est permise. Une transition du premier ordre (discontinuité) a donc dû s'opérer. Par contre, lorsque B_{ext} diminue,

l'état normal subsiste jusqu'au point de croisement des deux états, en B_{cdown}^I . La nucléation de la supraconductivité est alors possible, mais la moindre réduction du champ externe autour de ce point impose une discontinuité sur la paramètre d'ordre $\psi \neq 0$ décrivant l'état supra. Ces sauts présents pour ces rayons plus élevés sont absents autour de B_c^{II} lorsque $u_b \leq 1.74$ (Figure 3.6-c). L'état normal et l'état supraconducteur peuvent être atteints avec une variation continue du paramètre d'ordre ψ autour de la transition, peu importe le mode de croissance du champ externe. C'est cette présence ou non de discontinuité dans le paramètre d'ordre qui justifie l'appellation du type de la transition [40]. Notons que la valeur de transition $u_b = 1.74$ est très proche de la valeur $\sqrt{3} \approx 1.732$ prédite par Ginzburg en 1958 pour des cylindres dans la limite $\kappa u_b \ll 1$ [42].

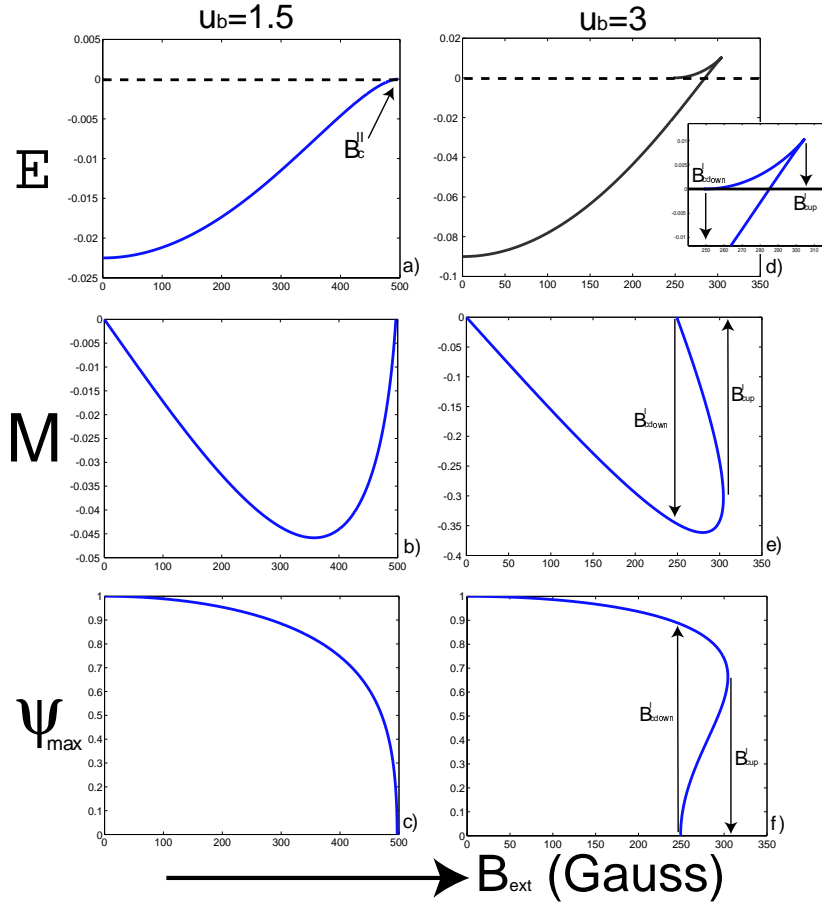


Figure 3.6— $\kappa = 0.2$ et $\lambda = 50$ nm. De haut en bas, l'énergie libre \mathcal{E} , la magnétisation M et le paramètre d'ordre maximal $\psi_{max} = f(u = 0)$, en fonction du champ magnétique externe, B_{ext} (Gauss). La colonne de gauche (graphes a-c) concerne un cylindre de rayon $u_b = 1.5$, et celle de droite (graphes d-f) de rayon $u_b = 3$. Le caractère discontinu du paramètre d'ordre autour de la transition normal \leftrightarrow supraconducteur apparaît clairement en (f), par opposition avec un rayon plus faible en (c). La direction des flèches indiquent le sens présumé de la transition, et justifie les appellations proposées aux champs critiques; *cup* et *cdown* en indices pour le mode de croissance (croissant et décroissant respectivement) du champ magnétique externe, et *I* ou *II* en exposant pour le type (I ou II) de la transition d'ordre.

Pour $\kappa = 1$ et toujours $\lambda = 50$ nm, la limite de Ginzburg $\kappa u_b \ll 1$ n'est plus atteinte, excepté si $u_b \rightarrow 0$. La Figure 3.8 montre à nouveau les variations des champs critiques B_{cup}^I , B_{cdown}^I et B_c^{II} en fonction du rayon normalisé u_b . De nouveau, les valeurs des champs critiques sont amplifiées aux rayons les plus faibles. La limite type-II est également atteinte pour ces rayons. En d'autres termes, les champs B_{cup}^I et

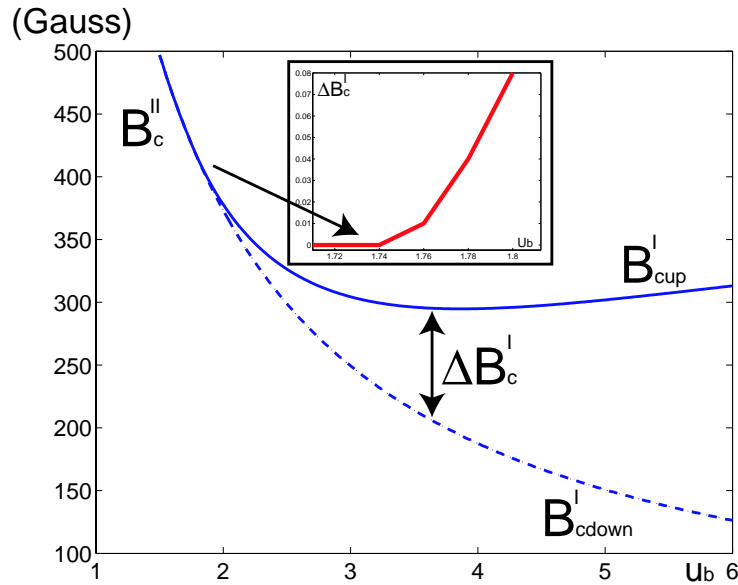


Figure 3.7— $\kappa = 0.2$ et $\lambda = 50$ nm. B_{cup}^I et B_{cdown}^I en fonction du rayon normalisé u_b . Pour $u_b \leq 1.74$, ces deux champs sont identiques, et la largeur de l'hystérèse ΔB_c^I disparaît pour laisser place à une transition du second ordre en B_c^{II} .

B_{cdown}^I disparaissent au profit de l'unique champ B_c^{II} , pour $u_b \leq 2.26$. Cependant, avec un paramètre κ plus élevé, $\kappa = 1$ ici, le champ B_c^{II} ne disparaît pas. Il augmente progressivement par rapport à B_{cdown}^I pour $u_b \geq 2.26$, et excède même B_{cup}^I lorsque $u_b \geq 4.37$. Il s'en suit que pour les rayons plus élevés, la transition normal-supraconducteur redevient continue, donc du second ordre (type-II). Cependant, une transition du premier ordre, génératrice d'une hystérèse, reste présente, mais dans l'état supraconducteur uniquement.

Sur base de ces analyses, on peut définir un diagramme de phase déterminant le type de la transition normal-supraconducteur en fonction du rayon normalisé u_b , et du paramètre de GL κ . Le type de transition reflétera le caractère discontinu ou non du paramètre d'ordre ψ lors de la transition. Pour l'état Meissner, $L = 0$, la frontière entre ces deux types de changement de phase décrit un comportement complexe, repris sur la Figure 3.9. Les courbes de niveau (normalisées par $B_\lambda = \Phi_0/(2\pi\lambda^2)$) dessinées sur la même figure définissent la largeur de l'hystérèse autour de la transition, $\Delta b_c^I = b_{cup}^I - b_{cdown}^I$, où $\Delta b_c^I = \Delta B_c^I/B_\lambda$, $b_{cup}^I = B_{cup}^I/B_\lambda$ et $b_{cdown}^I = B_{cdown}^I/B_\lambda$. Les deux traits discontinus présentent la frontière d'existence des états de vorticités plus élevés $L = 1$ et $L = 2$.

Au travers du diagramme de phase, il est également possible de délimiter une surface (u_b, κ) où l'approximation linéaire des équations de GL est incompatible. En effet, pour $\sqrt{3} \leq u_b \leq 1.34/\kappa$ et $\kappa \leq 1.34/\sqrt{3}$, la zone hachurée sur la figure, l'état Meissner $L = 0$ représente l'unique solution supraconductrice aux équations de GL. Cette dernière possède en plus un comportement d'hystérèse, et par conséquent, une discontinuité dans la variation du paramètre autour de la transition supraconductrice \leftrightarrow normal. L'approximation $\psi \approx 0$ ne peut donc pas être employée, et par corollaire, les équations de GL linéarisées sont à exclure.

L'idée de définir le type de la transition pour ces échantillons mésoscopiques par le caractère continu ou

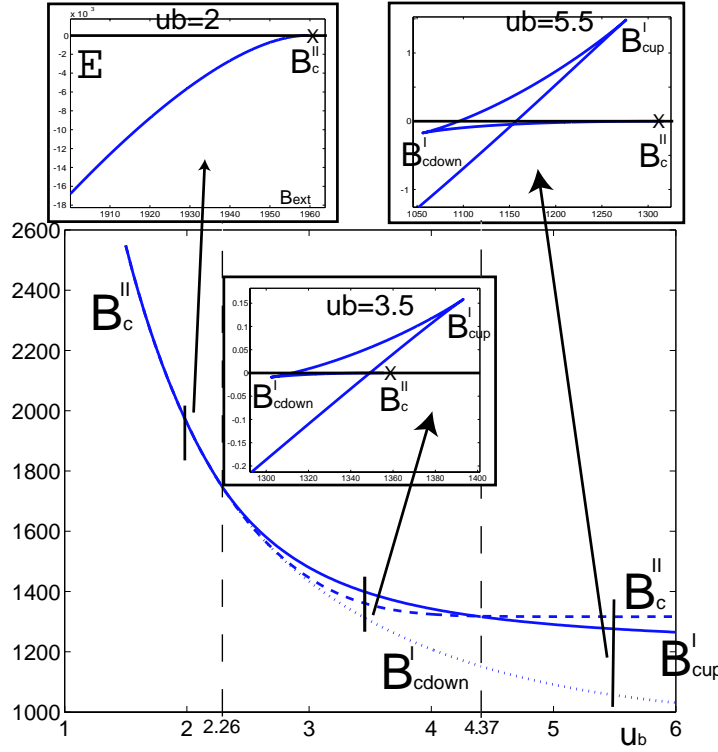


Figure 3.8— $\kappa = 1$ et $\lambda = 50$ nm. B_{cup}^I , B_{cdown}^I et B_c^{II} en fonction du rayon normalisé u_b . Pour $u_b \leq 2.26$, ces deux champs sont identiques, et l’hystérèse ΔB_c^I disparaît pour laisser place à une transition du second ordre en B_c^{II} . Contrairement à $\kappa = 0.2$, le champ critique B_c^{II} ne disparaît pas au delà de cette frontière. Il augmente même par rapport à B_{cdown}^I pour $2.26 \leq u_b \leq 4.37$ et dépasse B_{cup}^I pour $u_b \geq 4.37$.

non du paramètre d’ordre fut déjà formulée en 2002 par Zharkov dans la Ref.[40]. La Figure 3.10 est l’analogie du graphe précédent (Figure 3.9). La terminologie anglaise “tails” est employée lorsque B_c^{II} dépasse B_{cup}^I . Remarquons que les graphes de ψ_{max} et $-4\pi M$ joints au diagramme de phase n’exhibent pas les états métastables. Cette différence doit provenir du schéma numérique employé lors de la résolution des équations de GL. En résolvant par une méthode “self-consistent”, seules les solutions stables ont apparemment pu être atteintes. Les graphes (b) et (c) de la même figure ont servi notamment de test de validation des programmes numériques élaborés ici.

3.5 Résumé

En définissant l’ordre du changement de phase par le caractère continu ou non du paramètre d’ordre ψ (type-II ou -I respectivement), nous sommes en mesure de fournir un diagramme de phase complet des deux types de transition dans le régime mésoscopique des solutions stationnaires à symétrie cylindrique. Une surface paramétrée par (u_b, κ) avec $\sqrt{3} \leq u_b \leq 1.34/\kappa$ et $\kappa \leq 1.34/\sqrt{3}$ fut également isolée de ce diagramme. Elle définit une zone où l’approximation linéaire des équations de GL est prohibée. Au delà de toute l’analyse proposée avec $L = 0$ sur l’origine de l’hystérèse, en particulier ses propriétés et les solutions métastables associées, des configurations des types **Vortex d’Abrikosov** ($L = 1$) et **GiantVortex** ($L \geq 2$) ont également été obtenues. Leur existence, ainsi que leur stabilité, seront néanmoins analysées plus en détails dans les chapitres suivants. Une nouvelle classe de solutions, **Vortex Annulaires**, a également été mise en évidence au travers de ces résolutions numériques. Elle enrichit le

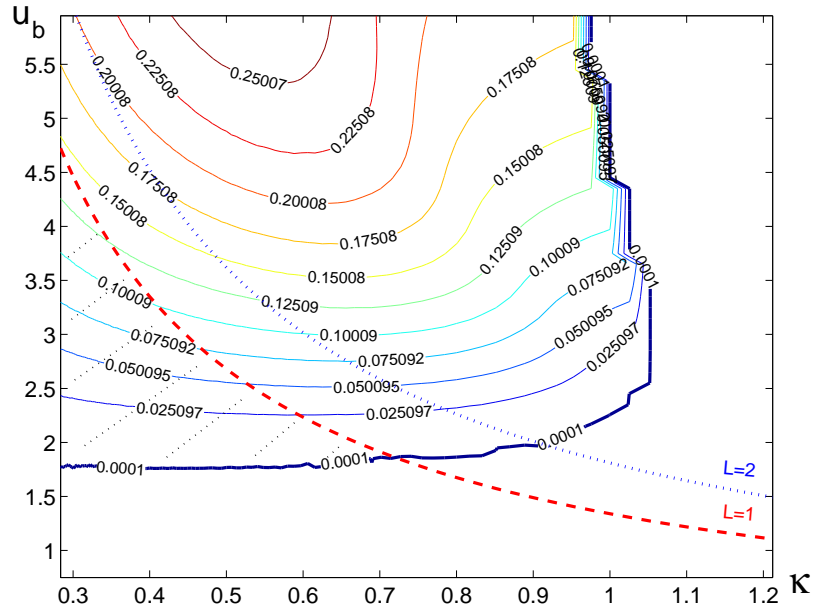


Figure 3.9— Diagramme de phase sur l'ordre de la transition en fonction du rayon normalisé $u_b = r/\lambda$ et du paramètre de Ginzburg-Landau $\kappa = \lambda/\xi$ pour $L = 0$. Les courbes de niveau définissent la largeur $\Delta b_c^I = \Delta B_c^I / (\Phi_0 / (2\pi\lambda^2))$ de l'hystérèse au changement de phase normale \leftrightarrow supraconducteur. Il apparaît clairement que les transitions seront toujours du second ordre, c'est-à-dire avec une variation continue du paramètre d'ordre ψ , pour des rayons $u_b \leq \sqrt{3}$. Ginzburg proposait déjà cette limite pour des cylindres satisfaisant la condition $\kappa u_b \rightarrow 0$ [42]. La discontinuité des courbes de niveau autour de $\kappa = 1$ s'explique par la présence du champ B_c^{II} au delà du champ de transition discontinue B_{cup}^{II} (Figure 3.8 avec $u_b = 5.5$). Un saut dans le paramètre d'ordre est toujours présent, mais uniquement dans l'état supraconducteur. Puisque ce diagramme exhibe uniquement l'ordre de la transition autour du changement de phase, Δb_c^I a dû être identifié à zéro. Ceci explique la discontinuité. Les deux courbes en pointillés, $L = 1$ et $L = 2$, délimitent la frontière d'existence des états avec cette vorticité. Elles suivent une loi en approximation $1.34/\kappa$ pour $L = 1$ et en $1.81/\kappa$ pour $L = 2$ [40]. La zone hachurée ($\sqrt{3} \leq u_b \leq 1.34/\kappa$, $\kappa \leq 1.34/\sqrt{3}$) délimite un domaine pour les paramètres u_b et κ où l'approximation linéaire pour les équations de GL ne peut être appliquée.

diagramme de phase (B_{ext}, \mathcal{E}) par une série de courbes métastables supplémentaires.

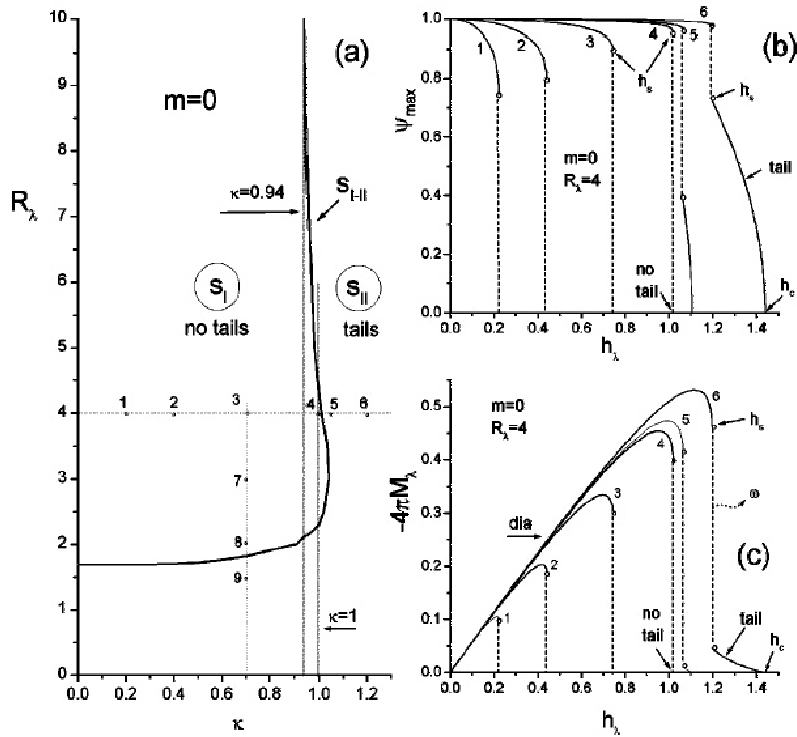


Figure 3.10— Graphe issu de [40], pp. 224513. En (a) Frontière entre les transitions de type-I (S_I) et -II (S_{II}) pour le changement de phase normal-supraconducteur. En (b) Comportement de ψ_{max} en fonction du champ externe normalisé $h_\lambda = b_{ext} = B_{ext}/(\Phi_0/(2\pi\lambda^2))$ pour des valeurs de $R_\lambda = 4$ (R_λ est l'équivalent du rayon normalisé u_b de la Figure 3.9) et κ mentionné par les points 1 à 6 repris dans le graphe (a). En (c) La magnétisation analogue $M(b_{ext})$. Les numéros 1-9 correspondent aux valeurs suivantes de R_λ et κ : 1. $\kappa = 0.2$; 2. $\kappa = 0.4$; 3. $\kappa = 0.7$; 4. $\kappa = 1$; 5. $\kappa = 1.05$; 6. $\kappa = 1.2$ avec $R_\lambda = 4$ et; 7. $R_\lambda = 3$; 8. $R_\lambda = 2$; 9. $R_\lambda = 1.5$ avec $\kappa = 0.7$.

Chapitre 4

Etude des états stationnaires à symétrie cylindrique libre: Modèle 2D

Dans un échantillon mésoscopique possédant une symétrie axiale (disques, cylindres, anneaux), les solutions du modèle de Ginzburg-Landau (GL) peuvent se diviser en deux catégories [51]. Dans la première, le module du paramètre d'ordre local $|\psi|$ adopte cette même symétrie. Les configurations associées correspondent alors aux solutions précédemment exposées et obtenues par le modèle 1D. La fonction ψ peut alors se paramétrer par une amplitude $f(r)$ et une phase $\theta(\phi) = -L\phi$ au travers de la définition $\psi(r, \phi) = f(r) \exp -iL\phi$. On y retrouve les solutions décrivant l'**effet Meissner** ($L = 0$), un **vortex d'Abrikosov** ($L = 1$) ou un **GiantVortex** ($L \geq 2$) centré à l'origine, ainsi que les **Vortex Annulaires**. Dans la seconde catégorie, le module du paramètre d'ordre brise la symétrie sous rotation selon la coordonnée azimuthale ϕ , et des groupes de vortex se forment dans le matériau. Ce sont des solutions du type **MultiVortex**. La vorticité totale L est obtenue en sommant la vorticité L_i de chaque vortex, $L = \sum_i L_i$.

4.1 Equations du mouvement, énergie libre et magnétisation

Pour rappel, les équations du mouvement   résoudre sont,

$$\lambda^2 \left(\vec{\nabla} - i \frac{q}{\hbar} \vec{A} \right)^2 \Psi = \kappa^2 \Psi (|\Psi|^2 - 1), \quad (4.1)$$

c'est- -dire l'équation de Ginzburg-Landau,   coupler   l'équation de Maxwell,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{em}, \quad (4.2)$$

avec la densité de supercourant donnée par,

$$\mu_0 \vec{J}_{em} = \frac{i}{2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right) \left[\Psi^* \left(\vec{\nabla} \psi - i \frac{q}{\hbar} \vec{A} \Psi \right) - \Psi \left(\vec{\nabla} \psi^* + i \frac{q}{\hbar} \vec{A} \Psi^* \right) \right]. \quad (4.3)$$

En relaxant la symétrie sous rotation invoquée dans le chapitre précédent, la paramétrisation (3.2) devient,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B(r, \phi) \hat{e}_z, \quad \vec{A} = A_r(r, \phi) \hat{e}_r + A_\phi(r, \phi) \hat{e}_\phi, \quad \mu_0 \vec{J}_{em} = J_r(r, \phi) \hat{e}_r + J_\phi(r, \phi) \hat{e}_\phi, \\ \psi(r, \phi) &= f(r, \phi) e^{i\theta(r, \phi)}, \quad \text{et } \rho(r, \phi) = |\psi(r, \phi)|^2 = f^2(r, \phi), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où (r, ϕ) définissent les coordonnées polaires du plan perpendiculaire à \hat{e}_z . La fonction d'onde ψ est donc à nouveau décomposée en termes des deux fonctions continues $f(r, \phi)$ et $\theta(r, \phi)$. Celles-ci dépendent maintenant des coordonnées r et ϕ . Dans les variables adimensionnelles (2.14), l'énergie libre par unité de longueur dans la direction \hat{e}_z s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{u_b} u \, dud\phi \left\{ (b(u, \phi) - b_{ext})^2 + \right. \\ & \left. + |(\partial_u + ia_u)\psi(u, \phi)|^2 + \left| \left(\frac{1}{u} \partial_\phi + ia_\phi \right) \psi(u, \phi) \right|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 - \frac{\kappa^2}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le courant adimensionnel $\vec{j}_{em} = \mu_0 \vec{J}_{em} / (\Phi_0 / (2\pi\lambda^3))$ normalisé par la densité de paires de Cooper s'exprime comme suit en termes de la phase θ et du potentiel vecteur \vec{a} ,

$$\vec{j} = -\frac{\vec{j}_{em}}{|\psi|^2} \stackrel{(2.19)}{=} -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\psi} \vec{\partial} \psi - \frac{1}{\psi^*} \vec{\partial} \psi^* \right) + \vec{a}, \quad (4.6)$$

$$= -\frac{i}{2} \vec{\partial} \ln \left(\frac{\psi}{\psi^*} \right) + \vec{a}, \quad (4.7)$$

$$= \vec{\partial} \theta(u, \phi) + \vec{a}(u, \phi) = j_u \hat{e}_r + j_\phi \hat{e}_\phi, \quad (4.8)$$

avec $\vec{\partial} = (\partial_u, \frac{1}{u} \partial_\phi)$ dans les coordonnées cylindriques. Dès lors, l'énergie libre peut se développer en fonction des variables adimensionnelles f , j_u et j_ϕ au travers de la relation,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{\lambda^2}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{u_b} u \, dud\phi \left\{ (b(u, \phi) - b_{ext})^2 + \right. \\ & \left. + (\partial_u f)^2 + \frac{1}{u^2} (\partial_\phi f)^2 + f^2 (j_u^2 + j_\phi^2) + \frac{\kappa^2}{2} (f^2 - 1)^2 - \frac{\kappa^2}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dans la représentation de \mathcal{E} en termes de ψ et \vec{a} , avec $\vec{b} = \vec{\partial} \times \vec{a}$, il apparaît clairement que l'énergie est invariante pour une transformation de jauge $U(1)$ donnée par,

$$\psi' = \psi e^{i\chi} \quad \text{et} \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{\partial} \chi, \quad (4.10)$$

ou encore,

$$\theta' = \theta + \chi \quad \text{et} \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{\partial} \chi, \quad (4.11)$$

où $\chi(u, \phi)$ est une fonction arbitraire régulière définie sur le plan (u, ϕ) . Comme dans le chapitre précédent, le signe de la fonction f n'est pas fixé. Cette liberté est bien sûr sans conséquence sur l'invariance de \mathcal{E} et les équations du mouvement associées. Néanmoins, ce choix de signe est corrélé par un saut de $\pm\pi$ dans θ . C'est pour éviter une telle discontinuité dans la phase que la restriction de f à une fonction définie positive fut abandonnée.

Par conséquent, excepté pour le signe de f , toutes les dépendances de jauge sont reprises dans les variables θ et \vec{a} . Les autres quantités comme \vec{j} , f (au signe près), f^2 ou encore \vec{b} sont invariantes de jauge [52]. La représentation de l'énergie (4.9) présente donc l'avantage de n'être exprimée qu'en termes de ces quantités, sans liberté de choix pour χ .

L'extension à deux dimensions de la magnétisation (3.9) est immédiate et s'écrit,

$$M = \Phi_0 \int_0^{u_b} \int_0^{2\pi} (b(u, \phi) - b_{ext}) u \, dud\phi, \quad (4.12)$$

avec $\vec{b}(u, \phi) = b(u, \phi) \hat{e}_z = \vec{\partial} \times \vec{a} = \frac{1}{u} (\partial_u (u a_\phi) - \partial_\phi a_u) \hat{e}_z \stackrel{(4.8)}{=} \vec{\partial} \times \vec{j} = \frac{1}{u} (\partial_u (u j_\phi) - \partial_\phi j_u) \hat{e}_z$.

4.2 Résolution numérique du modèle 2D

A l'inverse d'une démarche exploitant directement les équations du mouvement, notre approche numérique pour solutionner le modèle de GL à deux dimensions s'est basée sur le "Principe de moindre Action". Plutôt que de résoudre le problème via par exemple un processus itératif basé sur la représentation en différence finie des équations du mouvement (4.1)-(4.3) [35], une technique d'optimisation de l'action associée fut développée. Dans un régime stationnaire purement magnétique, cette démarche revient alors à minimiser l'énergie libre du système (2.12). Une fois un minimum atteint dans l'espace des configurations (ψ, a_u, a_ϕ) pour (4.5), ou (f, j_u, j_ϕ) pour (4.9), l'action est minimisée, ou encore $\delta S = 0$, et les équations de GL associées sont alors vérifiées.

Désirant travailler dans un premier temps sans imposer une configuration particulière de vortex, nous avons développé la stratégie de minimisation sur les variables (ψ, a_u, a_ϕ) de l'énergie libre (4.5). L'objectif au travers de ces variables est double,

- premièrement, étudier la métastabilité de certaines topologies selon le mode de croissance ou de décroissance du champ magnétique externe,
- deuxièmement, vérifier l'existence ou non, pour certaines géométries et certains paramètres κ , de solutions en MultiVortex. Leur présence, brisant la symétrie sous rotation, discrédite alors une approche à une dimension (modèle 1D) du problème.

4.2.1 Variables de lien

Pour préserver les propriétés d'invariance de jauge à l'échelle discrétisée, il est nécessaire d'introduire le concept de variables de lien U [53, 54]. Soit

$$U[C_{\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}}] = \exp \left\{ -i \int_{C_{\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}}} \vec{a}(\vec{\tau}) \cdot d\vec{\tau} \right\}, \quad (4.13)$$

une variable de lien définie sur un chemin C quelconque partant de la coordonnée \vec{x}_0 et allant en \vec{x} . Sous une transformation de jauge $U(1)$ (4.10), le produit $U[C_{\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}}]\psi(\vec{x}_0)$ se modifie comme suit,

$$\begin{aligned} U'[C_{\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}}]\psi'(\vec{x}_0) &= \exp \left\{ -i \int_{C_{\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}}} \vec{a}'(\vec{\tau}) \cdot d\vec{\tau} \right\} \psi'(\vec{x}_0) \\ &\stackrel{(4.10)}{=} \exp(i\chi(\vec{x})) U[C_{\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}}]\psi(\vec{x}_0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Seule la phase $\chi(\vec{x})$ évaluée au point d'arrivée du transport de \vec{a} le long de $C_{\vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}}$ subsiste. Par conséquent, le produit précédent est comparable à la fonction d'onde ψ définie en ce même point d'arrivée \vec{x} . Dès lors, pour maintenir l'invariance $U(1)$ de la dérivée covariante sous une forme de différence finie, on définira dans les coordonnées cylindriques,

$$\left([\partial_u + ia_u] \psi \right) (u, \phi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\psi(u+h, \phi) - U_u(u, \phi)\psi(u, \phi)], \quad (4.15)$$

et, pour la dérivée covariante azimuthale,

$$\left(\left[\frac{1}{u} \partial_\phi + ia_\phi \right] \psi \right) (u, \phi) = \lim_{\delta\phi \rightarrow 0} \frac{1}{u \delta\phi} [\psi(u, \phi + \delta\phi) - U_\phi(u, \phi)\psi(u, \phi)], \quad (4.16)$$

avec les définitions suivantes pour les variables de lien radiale et azimuthale,

$$\begin{aligned} U_u(u, \phi) &= e^{-i \int_u^{u+h} du' a_u(u', \phi)}, \\ U_\phi(u, \phi) &= e^{-i \int_\phi^{\phi+\delta\phi} d\phi' u a_\phi(u, \phi')}. \end{aligned}$$

Sous une transformation $U(1)$, les quantités intervenant dans les dérivées covariantes (4.15) et (4.16), $[\psi(u+h, \phi) - U_u(u, \phi)\psi(u, \phi)]$ et $[\psi(u, \phi + \delta\phi) - U_\phi(u, \phi)\psi(u, \phi)]$, varient avec les facteurs de phase respectifs $\exp(i\chi(u+h, \phi))$ et $\exp(i\chi(u, \phi + \delta\phi))$. Par conséquent, leurs modules au carré $|\cdot|^2$ intervenant dans l'énergie libre à minimiser restent indépendants de jauge sous ces formes discrétisées.

De façon à réduire le nombre de variables présentes dans la procédure de minimisation, il est profitable de travailler dans la jauge radiale $a_u = 0$. Pour construire cette dernière, prenons $\chi(u, \phi) = \chi(u_0, \phi) + \int_{u_0}^u du' a_u(u', \phi)$. Par conséquent, $a'_u = 0$ et donc $U'_u = 1$. On peut donc toujours choisir une jauge radiale telle que

$$U_u(u, \phi) = 1, \text{ et } U_\phi(u, \phi) \neq 0.$$

La seule liberté de jauge restante est une transformation constante χ_0 de la phase $\chi(u, \phi)$.

4.2.2 Discrétisation du plan (u, ϕ) et ses variables associées

Pour se préserver des singularités opérant à l'origine d'un maillage à symétrie cylindrique, les coordonnées radiale u et azimuthale ϕ ont été discrétisées comme suit,

$$\begin{cases} u_i &= \frac{1}{2}h + ih, & \text{avec } i = 0, 1, \dots, BU & \text{et } h = \frac{u_b}{0.5 + BU}, \\ \phi_j &= j d\phi, & \text{avec } j = 0, 1, \dots, BP & \text{et } d\phi = \frac{2\pi}{BP}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Les quantités scalaires comme ψ et θ seront définies sur les noeuds du réseau (voir Figure 4.1). Les quantités vectorielles, $a_u, a_\phi, j_u, j_\phi, U_u$ et U_ϕ , parallèles au plan (u, ϕ) seront spécifiées au milieu des segments reliant deux noeuds, et les quantités vectorielles perpendiculaires à ce même plan comme l'induction magnétique b interviendront au centre d'une plaquette. On écrira,

$$\begin{cases} \psi_{ij} &= \psi(u_i, \phi_j) & \text{avec } i = 0, \dots, BU & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ \theta_{ij} &= \theta(u_i, \phi_j) & \text{avec } i = 0, \dots, BU & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ a_{uij} &= a_u(u_i + h/2, \phi_j) & \text{avec } i = 0, \dots, BU - 1 & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ j_{uij} &= j_u(u_i + h/2, \phi_j) & \text{avec } i = 0, \dots, BU - 1 & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ U_{uij} &= U_u(u_i + h/2, \phi_j) & \text{avec } i = 0, \dots, BU - 1 & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ a_{\phi ij} &= a_\phi(u_i, \phi_j + d\phi/2) & \text{avec } i = 0, \dots, BU & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ j_{\phi ij} &= j_\phi(u_i, \phi_j + d\phi/2) & \text{avec } i = 0, \dots, BU & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ U_{\phi ij} &= U_\phi(u_i, \phi_j + d\phi/2) & \text{avec } i = 0, \dots, BU & \text{et } j = 0, \dots, BP \\ b_{ij} &= b(u_i + h/2, \phi_j + d\phi/2) & \text{avec } i = 0, \dots, BU - 1 & \text{et } j = 0, \dots, BP \end{cases}$$

Par conséquent, dans la jauge radiale $a_u = 0$, les variables de lien peuvent s'écrire, dans la limite où $d\phi, h \rightarrow 0$,

$$U_{uij} = 1, \text{ et } U_{\phi ij} = e^{-iu_i d\phi a_{\phi ij}}. \quad (4.18)$$

En définissant l'induction magnétique $b(u_i, \phi_j)$ à partir de la notion géométrique du rotationnel $\vec{b} = \vec{\partial} \times \vec{a}$, on trouve facilement au centre d'une plaquette élémentaire du maillage (4.17) que,

$$b(u_i + \frac{h}{2}, \phi_j + \frac{d\phi}{2}) = \lim_{d\phi, h \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} [u_{i+1} a_{\phi i+1j} d\phi - u_i a_{\phi ij} d\phi],$$

ou encore, après exponentiation,

$$b_{ij} = -\frac{1}{S_i} \text{Im} [W_{ij}], \quad (4.19)$$

avec $S_i = hd\phi(u_i + h/2)$ qui définit la surface d'une maille délimitée par les quatre coins (i, j) , $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$ et $(i, j+1)$. La variable W_{ij} s'exprime en terme du produit des variables de lien, $W_{ij} = U_{\phi i+1j} U_{\phi ij}^* = \exp(-iu_{i+1} a_{\phi i+1j} d\phi) \exp(iu_i a_{\phi ij} d\phi)$.

L'induction magnétique au centre de la plaquette, $u = 0$, n'est dès lors pas représentée sur ce maillage

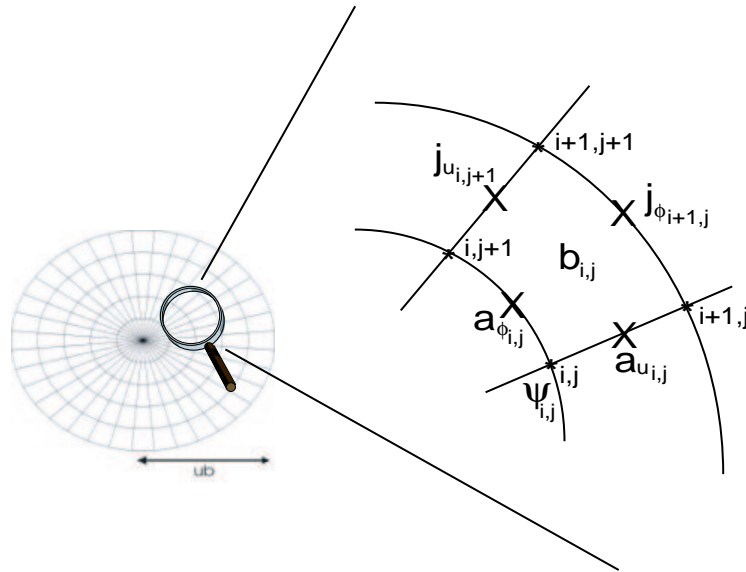


Figure 4.1— Représentation graphique du maillage employé pour la discrétisation du plan (u, ϕ) et des différentes variables définies dans le texte.

(4.17) délocalisé par rapport à l'origine. Elle peut cependant être construite de façon analogue à $b_{i,j}$ et valoir,

$$b(u=0) = -\frac{4}{\pi h^2} \text{Im} \left[\prod_{j=1}^{BP} U_{\phi 0j} \right]. \quad (4.20)$$

A titre d'exemple, sur le plan (u_i, ϕ_j) , la représentation du potentiel vecteur discrétisé définissant un champ magnétique constant, b_{ext} , s'écrit dans la jauge radiale: $a_{uij} = 0$, et $a_{\phi ij} = \frac{1}{2} b_{ext} u_i$. En effet, en appliquant la définition du champ magnétique (4.19), on trouve bien,

$$\begin{aligned} b_{ij}^{ext} &= -\frac{1}{S_i} \text{Im} \left[\exp \left(-i \frac{1}{2} u_{i+1}^2 b_{ext} d\phi \right) \exp \left(i \frac{1}{2} u_i^2 b_{ext} d\phi \right) \right], \\ &= -\frac{1}{S_i} \sin \left(-\frac{1}{2} b_{ext} d\phi (u_{i+1}^2 - u_i^2) \right), \\ &\stackrel{(h, d\phi) \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{hd\phi(u_i + h/2)} \frac{1}{2} b_{ext} d\phi \left((u_i + h)^2 - u_i^2 \right) \\ &= b_{ext}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sa valeur à l'origine est également correctement établie puisque,

$$\begin{aligned} b(u=0) &= -\frac{4}{\pi h^2} \text{Im} \left[\exp \left(-id\phi \frac{1}{2} u_0^2 b_{ext} BP \right) \right] \\ &= -\frac{4}{\pi h^2} \text{Im} \left[\exp \left(-\frac{i}{2} b_{ext} d\phi \frac{1}{4} h^2 BP \right) \right] \\ &\stackrel{(h, d\phi) \rightarrow 0}{\simeq} b_{ext} \quad \text{car } d\phi = \frac{2\pi}{BP}. \end{aligned}$$

On peut rapidement estimer l'erreur Δb_{ext} commise sur l'évaluation de b_{ext} pour un maillage avec u_b , BU et BP fixés. Cette dernière provient de l'approximation linéaire de $\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$ à la troisième

ligne des deux développements précédents. On écrira, $\Delta b_{ext} = x^3/6$ avec $x = b_{ext}hd\phi(u_i + h/2)$. Par conséquent, l'erreur sera maximale sur le bord $u_i = u_{BU} = u_b$ du cylindre, et vaudra,

$$\frac{\Delta b_{ext}}{b_{ext}} = \frac{b_{ext}^2}{6} \left(hd\phi(u_b + \frac{h}{2}) \right)^3. \quad (4.22)$$

La densité de courant $\vec{J} = \frac{1}{2}i \left[\psi^*(\vec{\partial}\psi + i\vec{a}\psi) - (\vec{\partial}\psi^* - i\vec{a}\psi^*)\psi \right] = -\text{Im} \left[\psi^*(\vec{\partial}\psi + i\vec{a}\psi) \right]$ pour la forme continue se discrétise comme suit en termes des variables de lien,

$$J_{uij} = -\text{Im} \left[\psi_{i+1j}^* \left(\frac{\psi_{i+1j} - U_{uij}\psi_{ij}}{h} \right) \right] \text{ (jauge = radiale)} -\text{Im} \left[\psi_{i+1j}^* \left(\frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{h} \right) \right], \quad (4.23)$$

$$J_{\phi ij} = -\text{Im} \left[\psi_{ij+1}^* \left(\frac{\psi_{ij+1} - U_{\phi ij}\psi_{ij}}{u_i d\phi} \right) \right]. \quad (4.24)$$

De par les propriétés de dépendance de jauge précédemment établies, en particulier (4.14), on vérifie facilement que les courants sous cette forme discrétisée sont bien invariants de jauge. Les termes entre crochets représentent les formes discrétisées des dérivées covariantes radiales et azimuthales,

$$(D_u\psi)_{ij} = \frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{h},$$

$$(D_\phi\psi)_{ij} = \frac{\psi_{ij+1} - U_{\phi ij}\psi_{ij}}{u_i d\phi}.$$

La phase θ_{ij} associée au paramètre d'ordre ψ_{ij} , s'obtient par la relation,

$$\theta_{ij} = -\frac{1}{2}i \ln \left(\frac{\psi_{ij}}{\psi_{ij}^*} \right). \quad (4.25)$$

4.2.3 Energie libre discrétisée

Toutes les variables définies sur le réseau (u_i, ϕ_j) étant établies, l'énergie libre (4.5) développée en termes des quantités dépendantes de jauge ψ , a_u et a_ϕ peut se construire sous la forme d'une sommation,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{\frac{\lambda^2}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2} = \bar{\mathcal{E}} = & \sum_{i=0}^{BU-1} \sum_{j=1}^{BP} \left\{ \left[(b_{ij} - b_{ij}^{ext})^2 + |(D_u\psi)_{ij}|^2 \right] S_i + \right. \\ & \left. + \left[|(D_\phi\psi)_{ij}|^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 |\psi_{ij}|^2 (|\psi_{ij}|^2 - 2) \right] u_i hd\phi \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{BP} \left[|(D_u\psi)_{BUj}|^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 |\psi_{BUj}|^2 (|\psi_{BUj}|^2 - 2) \right] (u_{BU} - \frac{h}{4}) hd\phi + \\ & + (b(u=0) - b^{ext}(u=0))^2 \frac{\pi h^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dans cette expression, on a pris soin de distinguer les sommations sur les variables définies sur les noeuds, sur les segments, et au centre des plaquettes. Deux types de surfaces, de tailles $S_i = hd\phi(u_i + h/2)$ et $u_i hd\phi$, ont donc été employées. S_i intervient pour les variables définies en $u = u_i + h/2$ comme b_{ij} et $(D_u\psi)_{ij}$, tandis que $u_i hd\phi$ sera associé à celles évaluées en $u = u_i$ comme ψ_{ij} et $(D_\phi\psi)_{ij}$. Les contributions manquantes liées d'une part au bord externe (troisième sommation) et au champ magnétique à l'origine (quatrième sommation) ont également été ajoutées.

Deux types de conditions frontières interviennent sur les variables ψ_{ij} , $a_{uij} = 0$, $a_{\phi ij}$ à optimiser. La

première, attachée à la condition de périodicité en $\phi = 0, 2\pi$, impose que les variables soient identiques après une rotation de 2π autour de l'axe \hat{e}_z du cylindre. On écrira,

$$\begin{cases} \psi_{i0} &= \psi_{iBP}, \\ a_{\phi i0} &= a_{\phi iBP}, \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq BU.$$

La deuxième, évaluée sur le bord externe $u = u_b$ du cylindre, impose un courant radial nul en $u = u_b$, c'est-à-dire

$$\psi_{BUj} = \psi_{BU-1j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq BP,$$

et une induction magnétique égale à l'induction externe appliquée b_{ext} , ou encore

$$a_{\phi BUj} = a_{\phi BU-1j} \frac{u_{BU-1}}{u_{BU}} + b_{ext} \frac{S_{BU-1}}{u_{BU} d\phi} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq BP.$$

4.2.4 Le principe de moindre action comme résolution numérique du modèle

La méthode numérique développée résout donc les équations de GL en minimisant l'énergie (4.26) dans l'espace des configurations du champ scalaire complexe, $\psi_{ij} = (\psi_{Rij}, \psi_{Iij})$, et de la composante azimuthale du potentiel vecteur, $a_{\phi ij}$. Pour un réseau de dimensions $BU = 20$ et $BP = 20$ points, il faut donc minimiser une fonctionnelle à $3 \times 19 \times 19 = 1083$ dimensions (19 et non 20 grâce aux conditions frontières qui spécifient les variables en $i = BU$ et $j = 0$). La résolution proprement dite peut se résumer par le schéma numérique repris ci-dessous,

- Problème Trouver $\vec{x} = \vec{x}_{min} \in \mathcal{R}^n$ qui optimise $\mathcal{E}(\vec{x})$;
- 1^{ère} étape Soit une configuration aléatoire initiale, $\vec{x}_0 = x_i \hat{e}_i$, où $1 \leq i \leq n$,
et soit δ , une perturbation agissant sur chaque variable x_i individuellement et successivement;
- 2^{ème} étape Pour $1 \leq i \leq n$:
Evaluer le gradient, $\vec{\nabla} \mathcal{E}(x_i) = \frac{\mathcal{E}(x_i+\delta) - \mathcal{E}(x_i-\delta)}{2\delta}$,
la concavité, $\vec{\nabla}^2 \mathcal{E}(x_i) = \frac{\mathcal{E}(x_i+\delta) + \mathcal{E}(x_i-\delta) - 2\mathcal{E}(x_i)}{\delta^2}$,
Si le gradient normalisé par l'énergie est supérieur à une précision fixée p ,
 $\frac{|\vec{\nabla} \mathcal{E}(x_i)|}{|\mathcal{E}(x_i)|} \geq p$, alors x_i est modifié par $x_i = x_i - \frac{\vec{\nabla} \mathcal{E}(x_i)}{\vec{\nabla}^2 \mathcal{E}(x_i)}$;
- 3^{ème} étape Si, $\forall i \in [1, \dots, n]$, le gradient normalisé par l'énergie libre, $\frac{|\vec{\nabla} \mathcal{E}(x_i)|}{|\mathcal{E}(x_i)|}$,
a été inférieur à la précision p , alors STOP,
La configuration atteinte est un extremum de l'énergie libre,
Sinon on recommence la procédure à partir de l'étape 2;

La précision sur la valeur nulle du gradient fut fixée à $p = 10^{-2}$, c'est-à-dire de l'ordre du pourcent par rapport à la valeur de l'énergie libre. Il faut cependant savoir que l'énergie évaluée dans la procédure décrite précédemment est une énergie locale. Elle est obtenue au travers de la sommation (4.26) restreinte aux plus proches voisins de la coordonnée x_i modifiée. Cette technique permet, en plus d'accroître la précision numérique, de diminuer significativement le temps de calcul alloué à une procédure de minimisation.

4.3 Les solutions obtenues: Vortex Entiers

A titre de vérification de la procédure numérique établie, il est intéressant de comparer ces résultats avec les solutions issues du modèle à une dimension. Dès lors, seuls les cylindres possédant un rayon inférieur

ou comparable aux longueurs caractéristiques λ et ξ vont être préalablement pris en considération. Leur configuration finale prenant alors la symétrie cylindrique voulue, ils sont donc confrontables aux résultats du modèle 1D. A titre d'exemple, soit $R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm ($u_b = 3.4$ et $\kappa = 0.714$). La Figure 4.2 représente l'énergie libre et la magnétisation en fonction du champ magnétique externe appliqué, en mode croissant (courbe en trait discontinu) et décroissant (courbe en pointillés). La discrétisation du réseau vaut $(BU = 20) \times (BP = 20)$ points, et la précision p qui fixe l'erreur relative sur le gradient de l'énergie libre par rapport à sa valeur vaut $p = 10^{-2} = 1\%$.

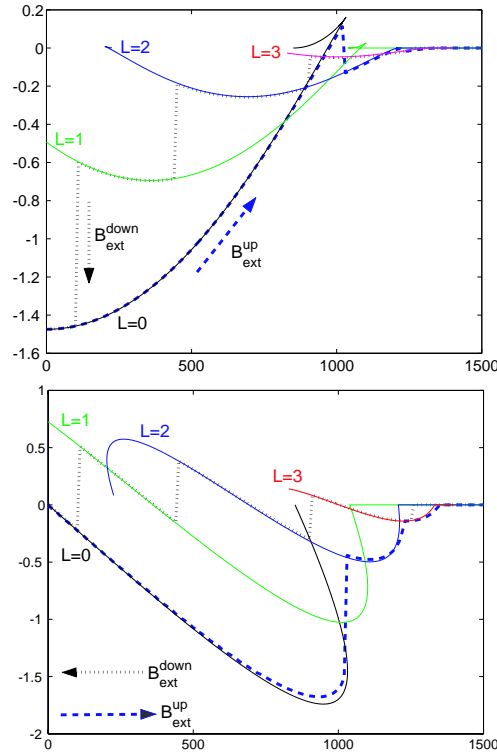


Figure 4.2— Energie libre (figure du haut) et magnétisation (en bas) en fonction du champ magnétique externe appliqué (en Gauss) pour un cylindre de rayon $R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm ($u_b = 3.4$ et $\kappa = 0.714$). Les courbes en traits continus sont issues du modèle 1D pour des vorticités égales à $L = 0, 1, 2$ et 3 (courbes de bas en haut respectivement sur la figure supérieure). Les deux tracés, discontinu et en pointillés, correspondent aux résultats du modèle 2D pour un champ magnétique externe croissant et décroissant respectivement. Le maillage employé est de 20×20 points et p , l'erreur relative sur le gradient est de $p = 10^{-2} = 1\%$. Pour ces paramètres numériques, l'écart ne dépasse pas 3.4% (à $B_{ext} = 950$ Gauss) entre les magnétisations issues des deux modèles.

La Figure 4.3 propose une comparaison, à différentes valeurs de champ externe, du module au carré du paramètre d'ordre et de l'induction magnétique en fonction de la coordonnée radiale. Les paramètres numériques, ici un maillage de 20×20 points et une précision p égale à 1%, sont identiques à ceux employés pour générer le diagramme de phase précédent, repris au centre de la présente figure. Les erreurs relatives aux solutions $b(u)$ et $|\psi(u)|^2$ issues des deux modèles n'excèdent pas 5%. Cette valeur maximale est atteinte lorsque l'effet Meissner est le plus prononcé, c'est-à-dire autour de la valeur extrême de la magnétisation, en $B_{ext} \approx 950$ Gauss. En effet, sous cette condition, les variations de $b(u)$ et $\psi(u)$ sont alors les plus importantes, et la faible discrétisation en rayon dans le modèle 2D induit par conséquent une erreur significative sur la représentation correcte de ces deux solutions.

Les représentations à trois dimensions de ces solutions sont exposées sur les Figures 4.4, 4.5, 4.6 et

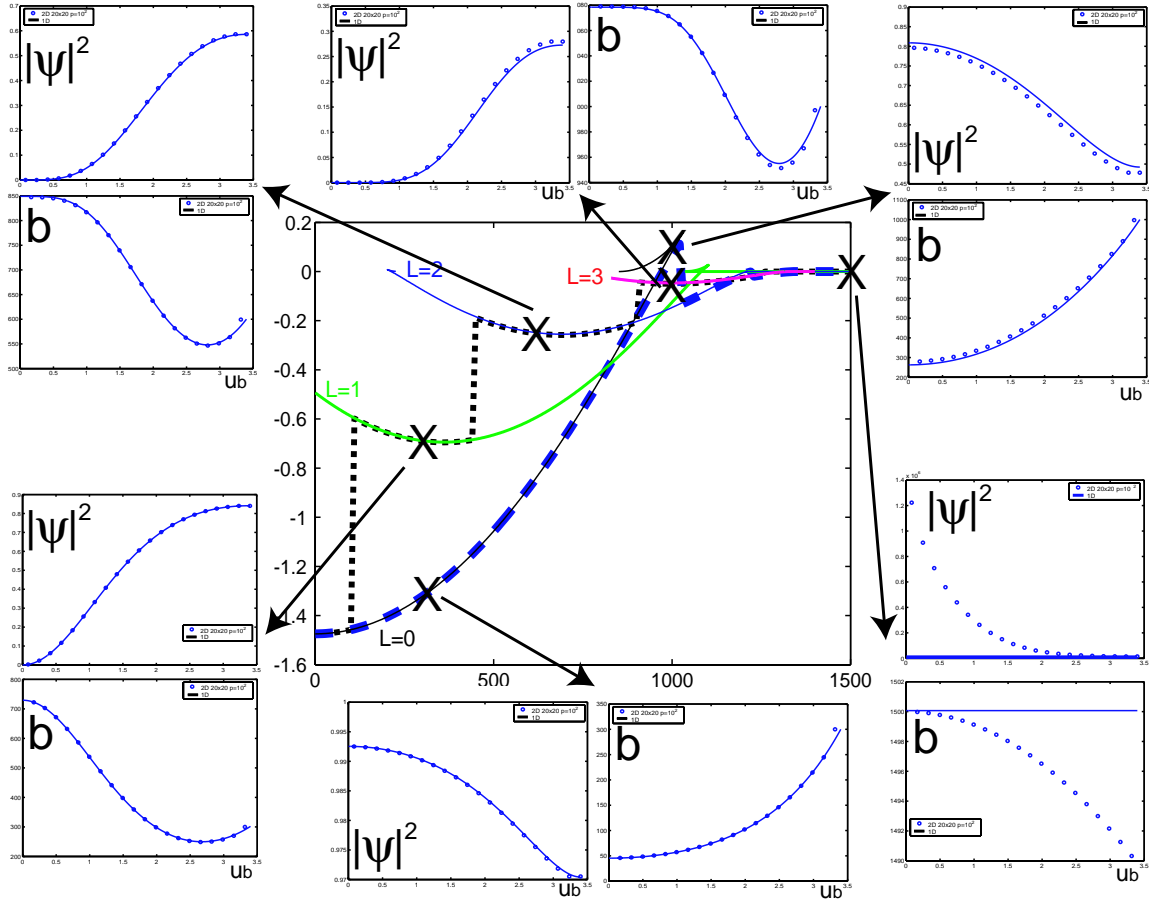


Figure 4.3— Comparaisons entre les deux modèles (1D et 2D) pour $b(u)$ et $|\psi(u)|^2$ à différentes valeurs de champ magnétique externe. Les croix représentées sur le diagramme central de phase indiquent les topologies choisies en guise de comparaison. Pour un maillage toujours de 20×20 points et une précision relative de 1% sur le zéro du gradient, les solutions du modèle 2D ne dépassent pas 5% d'erreurs relatives en comparaison avec le modèle 1D à symétrie cylindrique. Cette valeur est atteinte dans le cas le plus défavorable, $L = 0$ et $B_{ext} \approx 950$ Gauss, c'est-à-dire là où l'effet Meissner est le plus significatif. Les variations importantes de b et ψ imposent alors une meilleure discrétisation radiale du plan (u, ϕ) .

4.7. Pour l'état Meissner, $L = 0$, on retrouve les propriétés physiques déjà établies dans le chapitre précédent. L'induction magnétique $B(u, \phi)$ est écrantée (figure en haut à droite) à partir du bord externe u_b du cylindre par des courants d'écrantage circulant dans le sens rétrograde¹ (figure en bas à droite). La présence d'induction magnétique sur le bord induit donc une diminution du paramètre d'ordre, en particulier ici de son module au carré (figure en haut à gauche). La projection de la phase θ (évaluée modulo 2π) dans le plan (u, ϕ) (figure en bas à gauche)², ne présente aucune discontinuité pour cet état de vorticit   nulle.

Pour les   tats d  crivant un vortex d'Abrikosov, $L = 1$, et un GiantVortex, $L = 2, 3$, on retrouve deux courants antagonistes, circulant en sens oppos  s. Le premier, en sens r  trograde,   crante l'induction magn  tique externe appliqu  e, et l'autre, en sens trigonom  trique, g  n  re l'induction magn  tique pi  g  e par le vortex. L'induction magn  tique $B(u, \phi)$ est donc    la fois   crant  e sur le bord, et amplifi  e   

¹Dans le sens des aiguilles d'une montre.

²Pour rappel, la phase θ est associ  e    la fonction d'onde ψ au travers la relation, $\psi(u, \phi) = f(u, \phi)e^{i\theta(u, \phi)}$.

B_{ext}=300 G & L=0

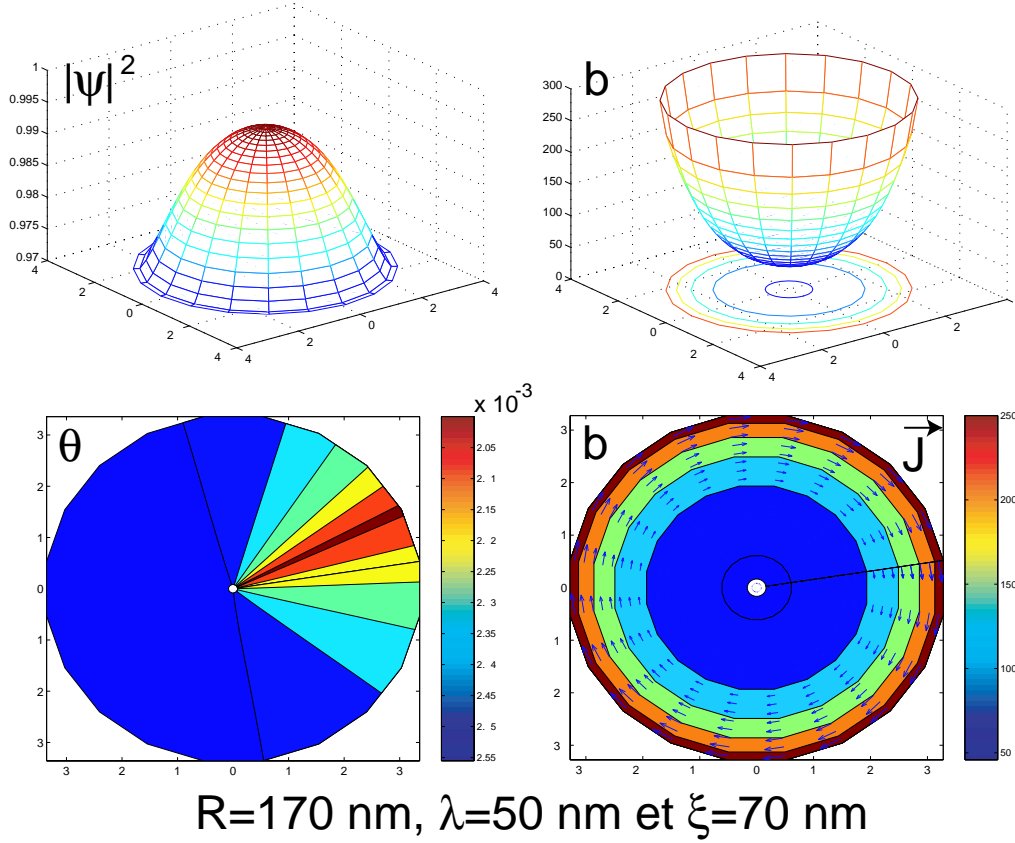


Figure 4.4— Etat Meissner, $L = 0$. De gauche à droite et de haut en bas, représentations graphiques des solutions $|\psi(u, \phi)|^2$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ (vecteurs courants sur fond de projection de l'induction B) pour $L = 0$ et $B_{ext} = 300$ Gauss avec $R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm.

nouveau au centre. La phase θ présente un nombre entier de discontinuités de 2π lors du transport de son gradient sur un chemin C enfermant l'origine. La valeur du paramètre d'ordre doit alors s'annuler en ce point, $u = 0$, pour préserver une fonction d'onde univaluée en cette position de singularité pour la phase. En appliquant la définition de la vorticité ("Winding Number" ou nombre d'enroulement d'une configuration topologique) $L[C]$,

$$L[C] = -\frac{1}{2\pi} \oint_C \vec{\partial}\theta \cdot \vec{dl}, \quad (4.27)$$

on obtient des valeurs entières, spécifiant sur le plan géométrique, le nombre de sauts de 2π rencontrés lors du transport de $\vec{\nabla}\theta$ sur le chemin C . En particulier, pour les solutions décrites aux Figures 4.5, 4.6 et 4.7, la vorticité $L[C]$ évaluée sur tout chemin décrivant un cercle centré à l'origine et de rayon $r > 0$ vaut $L = 1$, $L = 2$ et $L = 3$ respectivement.

Pour les paramètres étudiés, $R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm, l'analyse du diagramme de phase (B_{ext}, \mathcal{E}) (Figure 4.2) conduit à décrire une séquence mentionnant les états quantiques rencontrés en champ magnétique externe croissant (up) et décroissant (down). Spécialement ici, le schéma suivi en mode "up" peut s'écrire:

$$L = 0 \xrightarrow{(B_{ext}^{L=0 \rightarrow 2} = 1020)} L = 2 \xrightarrow{(B_{ext}^{L=2 \rightarrow 3} = 1220)} L = 3 \xrightarrow{(B_{ext}^{L=3 \rightarrow EN} = 1350)} \text{Etat Normal},$$

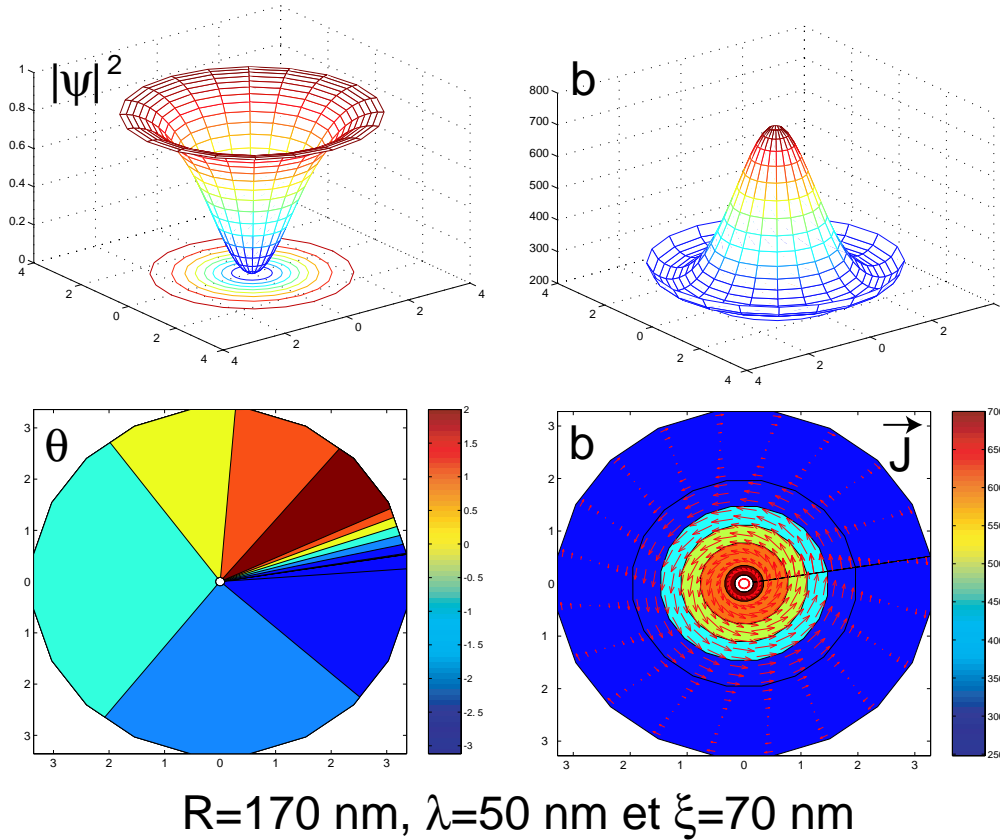
B_{ext}=300 G & L=1

Figure 4.5— Vortex d’Abrikosov. De gauche à droite et de haut en bas, représentations graphiques des solutions $|\psi(u, \phi)|^2$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ (vecteurs courants sur fond de projection de l’induction B) pour $L = 1$ et $B_{ext} = 300$ Gauss avec $R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm.

et en mode “down”:

$$\text{Etat Normal} \xrightarrow{(B_{ext}^{EN \rightarrow L=3}=1260)} L = 3 \xrightarrow{(B_{ext}^{L=3 \rightarrow 2}=910)} L = 2 \xrightarrow{(B_{ext}^{L=2 \rightarrow 1}=450)} L = 1 \xrightarrow{(B_{ext}^{L=1 \rightarrow 0}=110)} L = 0.$$

La variable $B_{ext}^{L=L_1 \rightarrow L_2}$ définit le point de transition (en Gauss) de l’état $L = L_1$ vers l’état $L = L_2$. Les lettres EN font référence à l’état normal.

Un comportement d’hystérèse suivant le mode de croissance du champ externe est donc mis en évidence par le modèle 2D. En mode champ externe croissant, l’état Meissner subsiste jusqu’à la valeur maximale atteinte en champ magnétique de l’état $L = 0$. Ce point correspond à la définition de B_{cup}^I rencontrée au chapitre 3 avec le modèle 1D. Au delà de ce champ, le système transite et capture successivement deux et trois Vortex d’Abrikosov centrés alors à l’origine (états $L = 2$ et $L = 3$), sans passer par l’état $L = 1$. En mode décroissant, une barrière d’énergie, mise en évidence par Bean et Livingston [56], et liée à la présence de la surface, conduit à un comportement d’hystérèse. En particulier, dans la limite “bulk” avec $\lambda \gg \xi$, c’est-à-dire pour des supraconducteurs macroscopiques profondément de type-II, la barrière de potentiel pour l’expulsion d’un vortex d’Abrikosov ne disparaît qu’en l’absence de champ externe, $B_{ext} = 0$ [56]. Dans un régime mésoscopique, cette barrière de potentiel s’avère s’estomper avant que B_{ext} ne s’annule. Ce résultat fut déjà confirmé dans l’analyse proposée en [55] pour un disque mésoscopique ($R = 800$ nm, $d = 134$ nm (épaisseur), $\lambda = 70$ nm et $\xi = 183$ nm) d’apparence type-

Bext=600 G & L=2

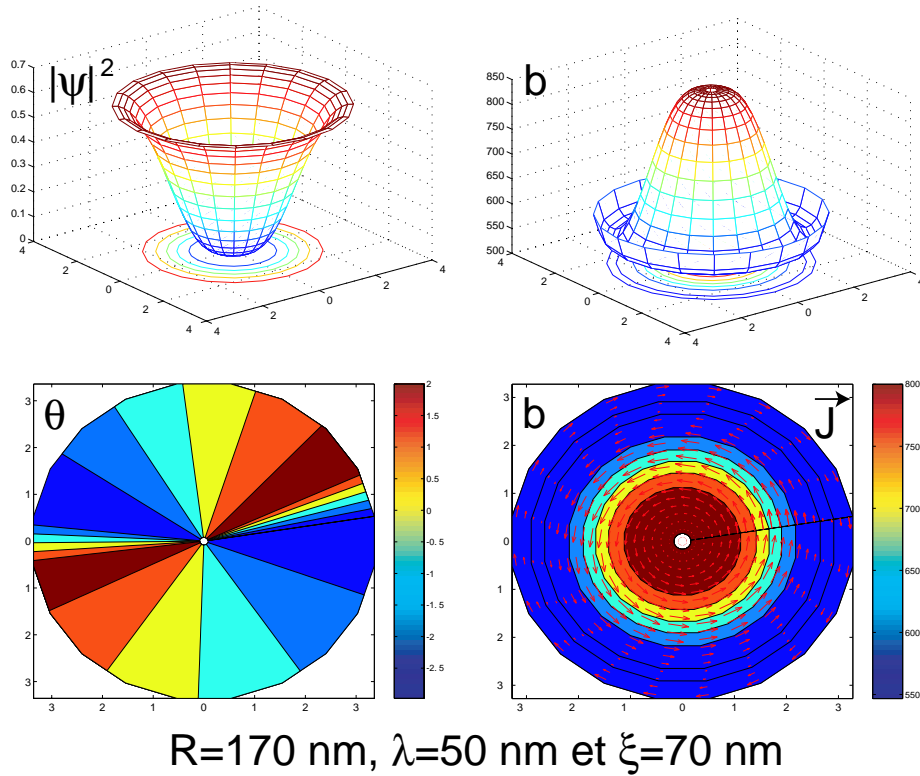


Figure 4.6— GiantVortex de vorticité $L = 2$. De gauche à droite et de haut en bas, représentations graphiques des solutions $|\psi(u, \phi)|^2$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ (vecteurs courants sur fond de projection de l'induction B) pour $L = 2$ et $B_{ext} = 600$ Gauss avec $R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm.

I, où la transition en champ décroissant entre les états $L = 1$ et $L = 0$ s'opère à $B_{ext} \neq 0$ (20 Gauss). Toujours dans cette même Ref.[55], il apparaît également que tous les sauts quantiques entre des vorticités différentes semblent survenir lorsque le système atteint un minimum dans l'énergie libre. En mode "up" par contre, le système ne transite que lorsque l'énergie atteint une valeur nulle. En comparaison avec ces travaux, l'hystérèse paraît ici plus prononcée ($R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm). De façon à dissocier un éventuel effet numérique par rapport à l'existence réelle d'une barrière de potentiel, des diagrammes (B_{ext}, \mathcal{E}) ont été calculés avec des paramètres numériques, $BU \times BP$ et p , différents. En l'occurrence ici, la Figure 4.8 expose les différents résultats pour des valeurs de p et de maillages $BU \times BP$ distincts. Il apparaît alors clairement que la précision p et le maillage influencent le comportement d'hystérèse. De plus, pour des maillages ou des précisions sur le zéro du gradient trop faibles, le système s'écarte fortement des solutions exactes issues du modèle 1D. En particulier, pour $p \geq 1$, les diagrammes de phase étaient en désaccord avec les solutions du modèle 1D (voir Figure 4.9). L'influence du paramètre p est mise en évidence sur la colonne de gauche de la Figure 4.8. Pour des valeurs de précision $p \leq 10^{-1}$, l'écart entre les énergies libres et les magnétisations obtenues avec les deux modèles (1D et 2D) est identique. Par contre, les points de transition d'un état quantique à l'autre sont modifiés significativement. Le Tableau 4.1 reprend les différentes estimations des champs de transition (en Gauss) et les temps de calculs respectifs

Bext=1000 G & L=3

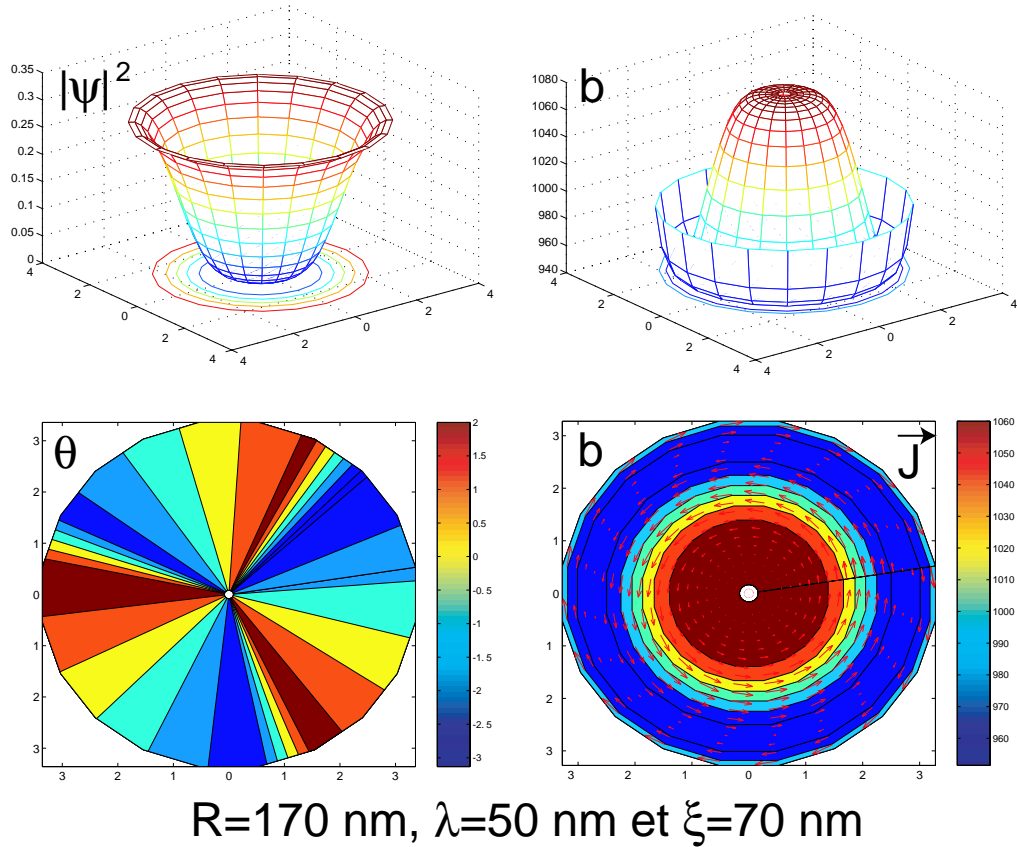


Figure 4.7— GiantVortex de vorticité $L = 3$. De gauche à droite et de haut en bas, représentations graphiques des solutions $|\psi(u, \phi)|^2$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ (vecteurs courants sur fond de projection de l'induction B) pour $L = 3$ et $B_{ext} = 1000$ Gauss avec $R = 170$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm.

nécessaires³ pour générer un diagramme de phase complet. Plus la précision p sur le gradient est affinée, moins le système semble survivre sur les états métastables. On ajoutera que les transitions semblent tendre vers les points de minimum des courbes d'énergie libre. On retrouve par conséquent l'analyse proposée dans la Ref.[55]. Les champs de transition en mode champ externe croissant sont quant à eux très peu influencés par le choix de la précision p .

Autour de la position extrême de la magnétisation, l'induction magnétique est fortement écrantée. Sa représentation numérique nécessite par conséquent un maillage plus affiné. C'est pour cette raison que ce point est sensible aux variations du maillage $BU \times BP$ comme indiqué sur la Figure 4.8 en bas à gauche. De plus, comme l'erreur (4.22) sur l'induction magnétique est proportionnelle à B_{ext}^3 , un maillage plus affiné du réseau est nécessaire pour contrer une construction erronée aux champs élevés. Pour compléter l'information, 44 heures et 40 minutes de temps machine (toujours sur server02) ont été nécessaires pour obtenir le diagramme de phase avec $p = 10^{-2}$ et $m = 40 \times 40$ points.

L'analyse précédente indique une forte influence des dimensions du maillage et de la précision p sur les temps de calculs. Un choix intermédiaire entre une précision suffisante et un temps machine raisonnable

³Les programmes ont évidemment été exécutés sur une même machine, `server02`, `mips=1600` et `mflops=512` ici, pour pouvoir comparer leur temps machine; `mips`="million instruction per second" et `mflops`="million floating-point operations per second".

Précision p	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}
mode "up"					
$B_{ext}^{L=0 \rightarrow 2}$	1030	1020	1020	1020	1020
$B_{ext}^{L=2 \rightarrow 3}$	1220	1220	1220	1220	1220
$B_{ext}^{L=3 \rightarrow EN}$	1350	1350	1350	1350	1350
mode "down"					
$B_{ext}^{EN \rightarrow L=3}$	1270	1260	1270	1270	1270
$B_{ext}^{L=3 \rightarrow 2}$	780	910	970	980	990
$B_{ext}^{L=2 \rightarrow 1}$	570	450	490	490	570
$B_{ext}^{L=1 \rightarrow 0}$	100	110	90	130	240
temps machines					
(h min)	1h50'	2h30'	3h26'	4h43'	13h16'

Tableau 4.1— Influence de la précision p sur les champs de transition $B_{ext}^{L=L_1 \rightarrow L_2}$ avec un maillage de 20×20 points.

a donc dû être établi. Pour les études sur la magnétisation expérimentale du chapitre 5, un maillage de 20×20 points et une précision $p = 10^{-2}$ ont été sélectionnés.

4.3.1 Les configurations du type MultiVortex

Pour observer des solutions du type MultiVortex, il est nécessaire de se rappeler au préalable les points importants, propices à ce genre de solutions:

1. Le paramètre κ . En l'absence d'induction magnétique, $\kappa = 1/\sqrt{2} = \kappa_c$ détermine une frontière où l'interaction entre les vortex dans un échantillon macroscopique s'annule [57, 58, 59]. Autour de ce point dual, les vortex s'attirent lorsque $\kappa < \kappa_c$, et se repoussent pour $\kappa > \kappa_c$ [58, 59]. La Figure 4.10 illustre ce constat théorique.
2. L'effet de confinement. Les frontières géométriques, en particulier les courants d'écrantage J_{scr} présents sur les bords, induisent une force de Lorentz sur le coeur magnétique des vortex, entraînant un effet de confinement de ces derniers [56]. Les symétries attachées aux topologies de vortex sont par conséquent également influencées par la géométrie de l'échantillon [60].

Dès lors, pour $\kappa > \kappa_c$, la compétition entre deux effets antagonistes, la répulsion (au travers de κ) et le confinement (au travers de J_{scr}), fixera la topologie de vortex qui minimise l'énergie libre. Trivialement, ces effets ne peuvent évidemment s'opérer que pour des échantillons suffisamment grands par rapport à la taille occupée par un vortex. Par analogie avec la Ref.[55], on parlera de "Few Fluxoid Cylinder" (FwFC) pour des cylindres admettant des solutions pouvant contenir plusieurs vortex, et de "Fractional Fluxoid Cylinder" (FrFC) pour des cylindres trop petits pour permettre la nucléation de vortex sur son domaine. Intuitivement, des solutions décrivant les MultiVortex devraient apparaître dans des cylindres du type FwFC, avec $\kappa > \kappa_c$.

A titre d'exemple, prenons des paramètres identiques à ceux de la Ref.[61], à savoir $\kappa = 1$ et $R/\xi = 4$. Dans la Ref.[7] (page 80), il est en effet stipulé que des solutions du type MultiVortex peuvent exister si $R \geq 2.8\xi$. Dans nos conventions de normalisation, on prendra $\lambda = 50$ nm, $\xi = 50$ nm et $R = 200$ nm, identiques donc aux valeurs employées dans la Ref.[61]. Comme nous allons le redémontrer, des

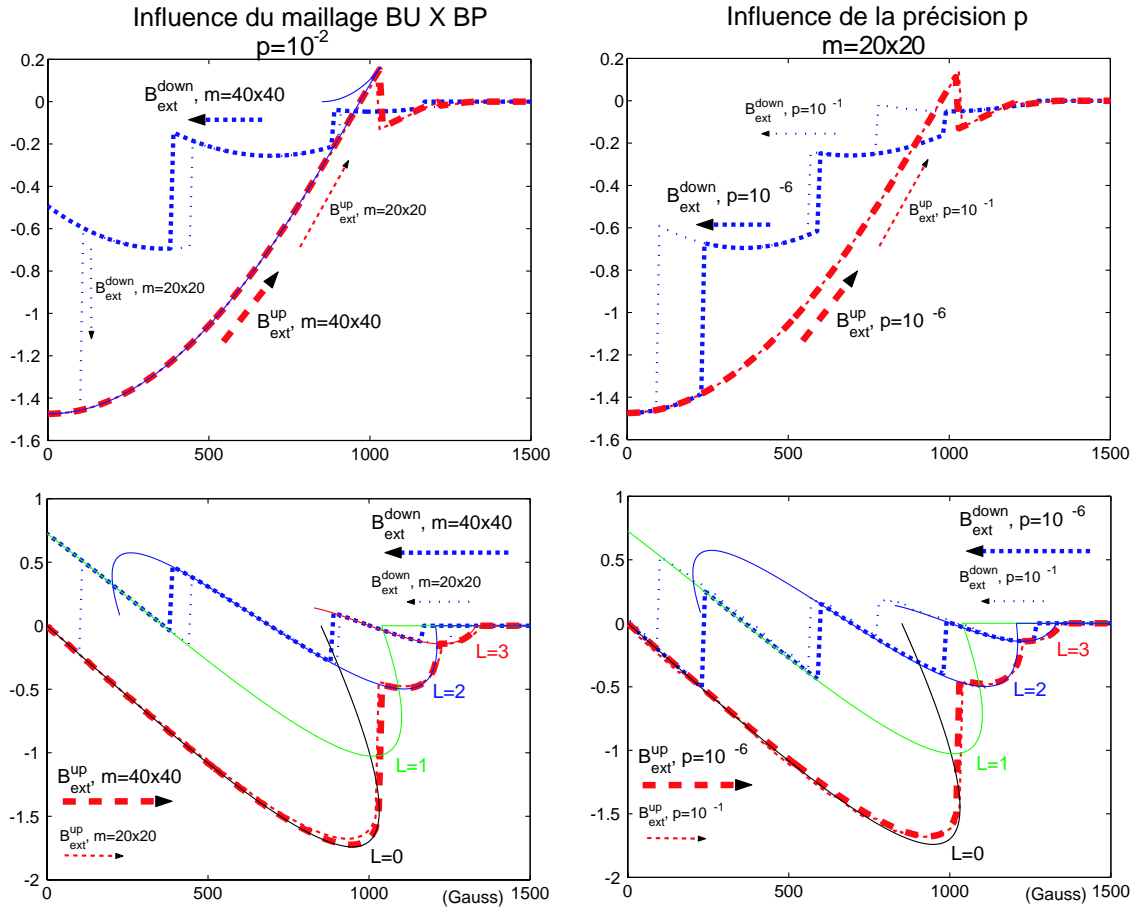


Figure 4.8— Etude des paramètres numériques $BU \times BP$ et p sur les diagrammes de phase (B_{ext}, \mathcal{E}) et (B_{ext}, M) . La discrétisation du réseau influence directement la précision du profil de l'induction magnétique et donc sa magnétisation. Le paramètre p agit par contre essentiellement sur le comportement d'hystérèse des solutions.

solutions du type MultiVortex peuvent exister dans ce cylindre⁴. Ce test, en comparaison avec l'article cité, permettra de contrôler la validité de la résolution numérique du modèle 2D avec des solutions brisant la symétrie sous rotation.

L'énergie et la magnétisation de ce cylindre en fonction du champ externe appliqué, sont représentées à la Figure 4.11. La valeur du champ critique étant plus élevée que dans les exemples précédents, la précision du maillage a dû être affinée dans ce cas particulier (voir (4.22)). La discrétisation du réseau vaut maintenant $m = 40 \times 40$ points et la précision sur le zéro du gradient est restée par contre identique à $p = 10^{-2}$. L'objectif ici étant de mettre en évidence l'existence des structures en MultiVortex, et non leur comportement d'hystérèse, une précision p plus élevée n'est pas nécessaire.

L'effet de confinement lié aux courants d'écrantage J_{scr} doit évidemment s'estomper avec une décroissance de l'induction externe appliquée. En effet, si B_{ext} décroît, les courants J_{scr} s'affaiblissent, et donc l'effet de confinement attaché à l'interaction magnétique entre les vortex et le courant, se réduit également. L'agrandissement proposé à la Figure 4.12 illustre ce constat. En effet, aux champs externes importants, les états parcourus par le système en mode "down" (trait discontinu) suivent les solutions symétriques

⁴Pour rappel, dans un cylindre de hauteur infinie, isolé électriquement (condition de de Gennes $-\xi/b = 0$), plongé dans une induction magnétique externe B_{ext} .

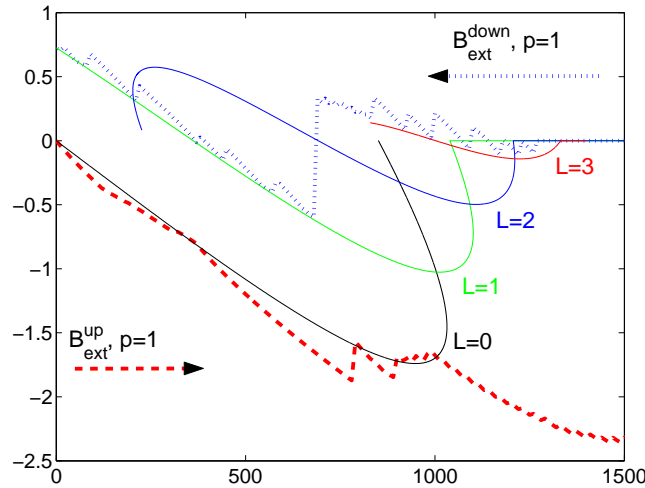


Figure 4.9— Magnétisation en fonction de l’induction magnétique externe appliquée. Avec une précision trop faible p sur le “zéro” du gradient de l’action, les solutions du modèle 2D s’écartent fortement des solutions exactes issues du modèle 1D. Un choix pour p supérieur à l’unité est à proscrire. Ce constat est valable même pour un maillage plus fin (par exemple avec 40×40 points) du plan (u, ϕ) .

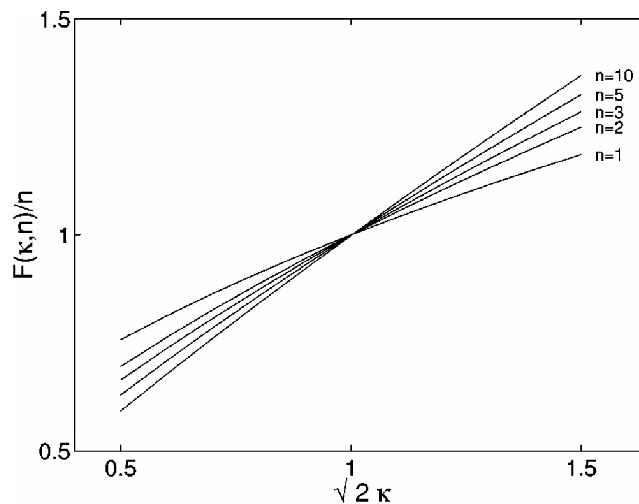


Figure 4.10— Figure 6 de la Ref.[59]. Énergie libre par unité de vortex en fonction du paramètre κ pour des vorticités fixées à $n = 1, 2, 3, 5$ et 10 . Au point dual, $\kappa = \kappa_c = 1/\sqrt{2}$, l’énergie est dégénérée, indiquant par conséquent l’absence d’interaction entre les vortex. Cette figure propose une extension à $n \geq 2$ vortex des résultats de [58] (Figure 1, page 4489).

sous rotation (traits continus) jusqu’à $L = 5$. En deçà, pour des inductions appliquées plus faibles, les états $L = 4$ et $L = 2$, sont légèrement décalés en magnétisation par rapport aux solutions à symétrie cylindrique. La représentation (Figure 4.13) à trois dimensions des solutions pour $B_{ext} = 730$ Gauss ($L = 4$) indique alors bien la présence d’une solution du type MultiVortex. Cet état brise la symétrie cylindrique et propose une symétrie sous rotation d’un angle de $2\pi/4 = \pi/2$ autour de l’axe \hat{e}_z (symétrie C_4). Les solutions pour $L = 3$ et $L = 2$ reprises dans les Figures 4.14 et 4.15 adoptent ce même type de

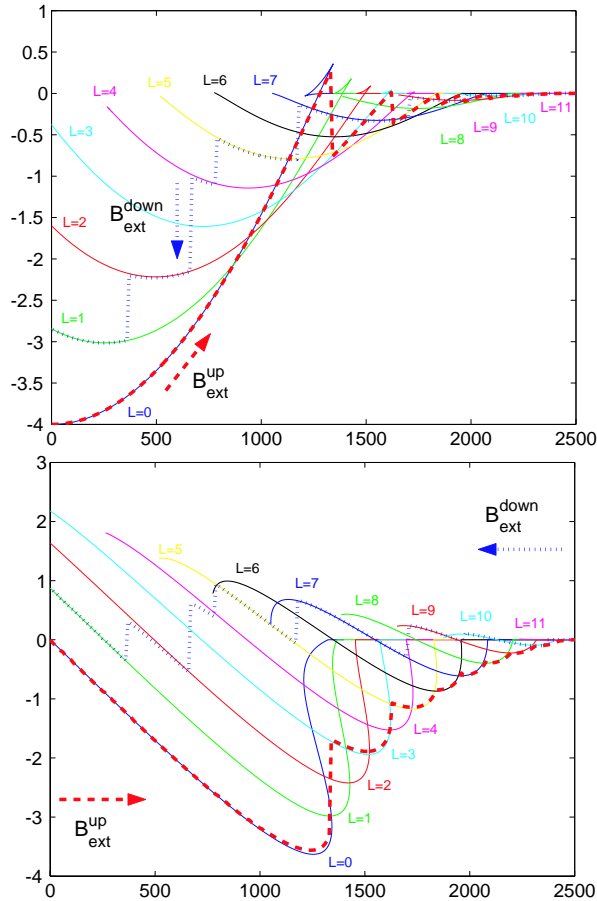


Figure 4.11— Energie libre et magnétisation en fonction de l'induction magnétique externe appliquée (en Gauss). Les courbes d'énergie libre en traits fins correspondent aux solutions à symétrie cylindrique issues du modèle 1D dont les vorticités sont fixées à $L = 0, \dots, 11$. Les deux courbes en traits discontinus et pointillés représentent les résultats du modèle à 2D en champ externe croissant et décroissant respectivement.

symétrie, C_L ⁵ dès que l'invariance sous rotation est brisée. Les coeurs des vortex sont donc répartis sur un cercle centré à l'origine. Par convention d'écriture, $u = u_{pv}$, décrit le rayon minimal nécessaire pour englober la position des vortex dans ce cercle centré à l'origine.

L'étude de la phase θ permet de définir les différentes vorticités présentes dans ladite solution. En particulier pour la Figure 4.13, l'évaluation du nombre d'enroulement (4.27) sur un chemin C décrivant un cercle centré à l'origine et de rayon normalisé $u > u_{pv}$, indique une vorticité totale équivalente à quatre quanta de flux magnétique Φ_0 : $L[C] = 4$. Par contre, pour ce même type de chemin, mais de rayon inférieur à la position des vortex u_{pv} , $L[C]$ s'annule. Enfin, pour tout chemin C entourant un point de singularité de la phase, le transport du gradient de la phase indique que $L[C] = 1$. Ce dernier correspond donc à la description mathématique d'un vortex d'Abrikosov. De manière graphique, définir ces nombres d'enroulement revient à compter le nombre de discontinuités de 2π dans la projection de la phase (Figure 4.13, graphe inférieur gauche) sur un contour C . Par exemple, pour C centré tel que son rayon $u < u_{pv}$, la phase effectue deux sauts de 2π , mais de signe opposé, renvoyant par conséquent une valeur de vorticité L nulle. Par contre, quatre sauts apparaissent pour $u > u_{pv}$, et un seul si le chemin C

⁵ Avec la convention d'écriture présente en cristallographie où C_n représente une symétrie sous rotation d'un angle $2\pi/n$.

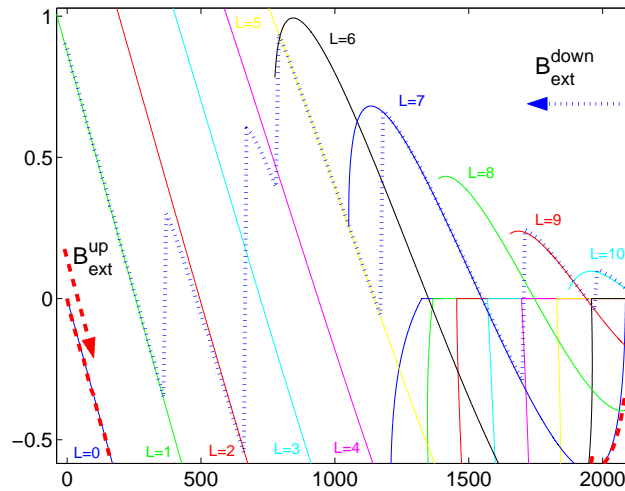


Figure 4.12— Agrandissement autour de sa valeur nulle de la magnétisation en fonction de l’induction magnétique externe appliquée (en Gauss). Les courbes de magnétisation en traits fins correspondent aux solutions à symétrie cylindrique issues du modèle 1D, dont les vorticités sont fixées à $L = 0, \dots, 10$. Les deux courbes en traits discontinus et pointillés représentent les résultats du modèle à 2D en champ externe croissant et décroissant respectivement. En champ décroissant, les états issus du modèle 2D correspondant à une vorticité totale $L = \sum_i L_i = 2$ et $L = 4$ sont décalés significativement par rapport aux solutions symétriques sous rotation. Ces états décrivent des structures en MultiVortex, de magnétisation et d’énergie libre plus faibles que leurs correspondants à symétrie cylindrique.

entoure un des quatre points singuliers de la phase.

En injectant une des solutions du diagramme (Figure 4.11), il est possible d’étudier la topologie des solutions du type MultiVortex (MV) en fonction du champ externe appliqué. Par exemple, en partant de la configuration décrite précédemment ($L = 4$ à $B_{ext} = 730$ Gauss), et en accroissant le champ externe, on observe sur la Figure 4.16 que la position u_{pv} des quatre vortex se rapproche de l’origine. Une transition du second ordre entre états du type MultiVortex et du type GiantVortex apparaît alors pour la valeur $B_{ext} \approx 1340$ Gauss.

4.4 Résumé

Une comparaison dans un premier temps avec les solutions du modèle 1D a été réalisée. Pour ces rayons de faible dimension, les solutions présentent en effet une symétrie cylindrique, et peuvent donc être confrontées avec les résultats du modèle précédent. Une investigation de l’influence des paramètres numériques sur le temps calcul et sur la précision atteinte par rapport au modèle 1D des solutions a été réalisée. En particulier, un choix optimum du maillage $BU \times BP$ et de la précision p a été fixé.

Au delà des solutions connues, un comportement d’hystérèse dépendant du mode d’application du champ externe (croissant ou décroissant) a également été mis en évidence. Une analyse plus affinée de cet effet lié à l’existence d’une barrière de potentiel entre les états quantiques de vorticité différente (barrière de Bean-Livingston) sera proposée dans le chapitre 5.

L’existence de solutions brisant la symétrie sous rotation (MultiVortex) fut également soulignée. Leur évolution en fonction du champ externe appliqué, en particulier l’ordre de leur transition (type-II ici) vers une solution du type GiantVortex a également été démontrée. La comparaison avec les résultats obtenus par le Professeur F.Peeters et son groupe permet de valider notre approche numérique du modèle 2D.

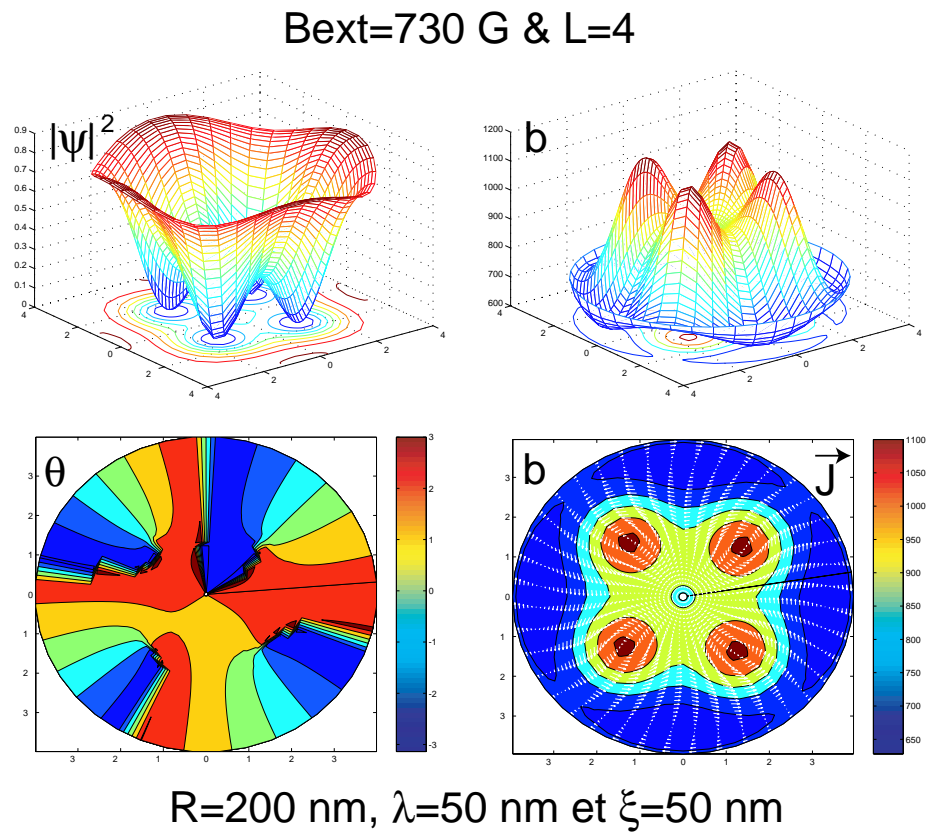


Figure 4.13— MultiVortex de vorticité totale $L = 4$. De gauche   droite et de haut en bas, les représentations graphiques des solutions $|\psi(u, \phi)|^2$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ (vecteurs sur fond de projection de l'induction B)   $B_{ext} = 730$ Gauss avec $R = 200$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 50$ nm.

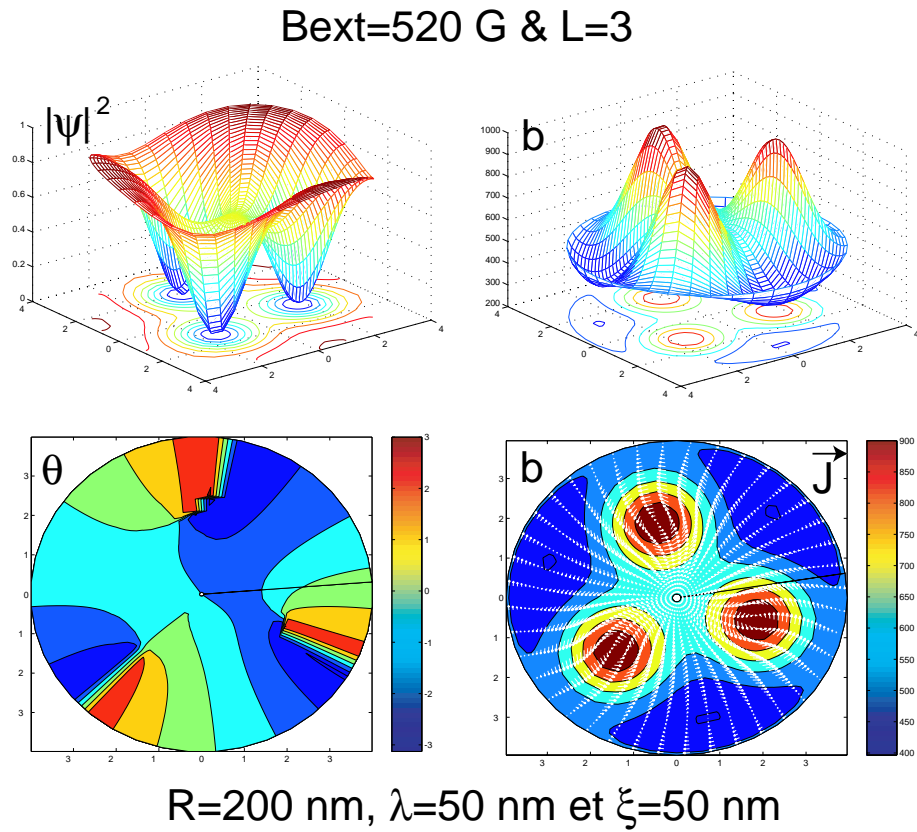


Figure 4.14— MultiVortex de vorticité totale $L = 3$. De gauche à droite et de haut en bas, les représentations graphiques des solutions $|\psi(u, \phi)|^2$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ (vecteurs sur fond de projection de l'induction B) à $B_{ext} = 520$ Gauss avec $R = 200$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 50$ nm.

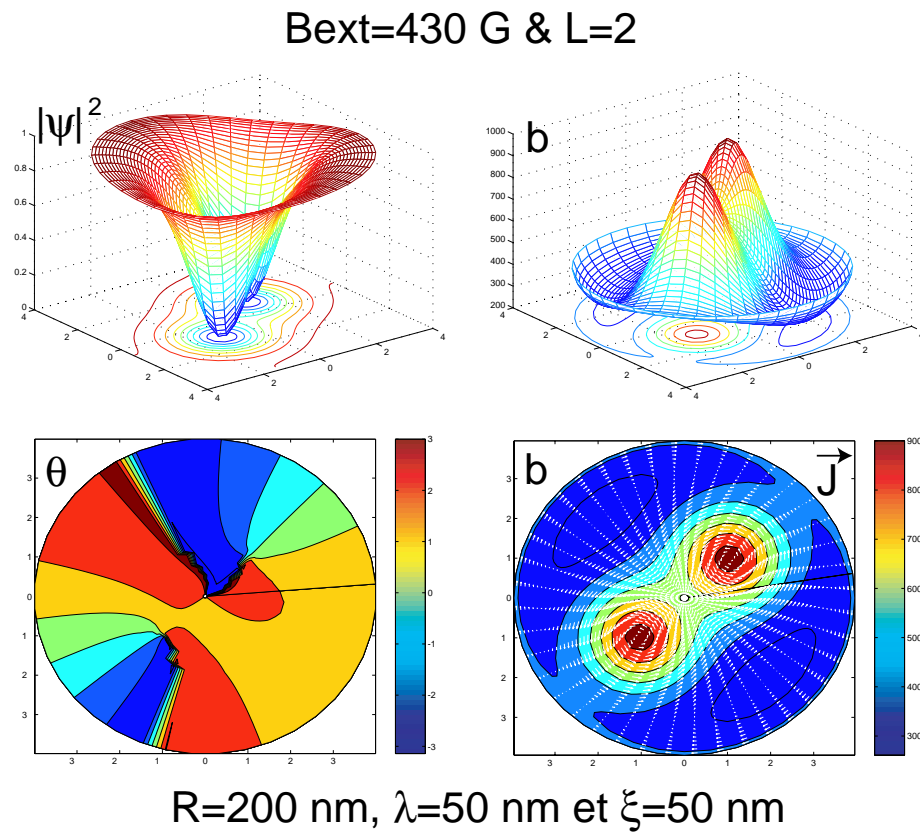


Figure 4.15— MultiVortex de vorticité totale $L = 2$. De gauche à droite et de haut en bas, les représentations graphiques des solutions $|\psi(u, \phi)|^2$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ (vecteurs sur fond de projection de l'induction B) à $B_{ext} = 430$ Gauss avec $R = 200$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 50$ nm.

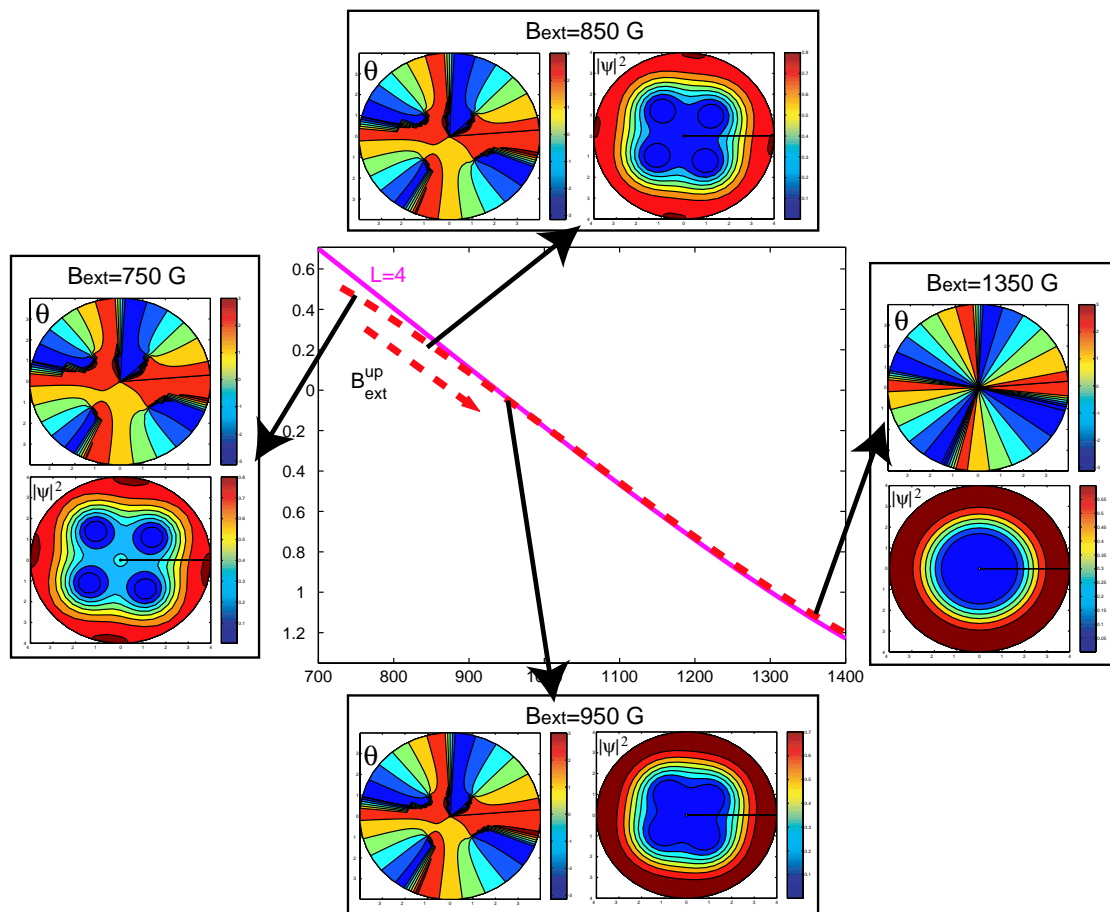


Figure 4.16— Evolution d’une solution du type MultiVortex (MV) en champ magnétique externe croissant. Au centre, la magnétisation en fonction de l’induction externe (en Gauss) de la solution de vortacité totale $L = 4$ issue du modèle 1D (trait continu) et du modèle 2D (trait discontinu). Aux quatre coins, les projections dans le plan (u, ϕ) de la phase θ et du module au carré du paramètre d’ordre $|\psi|^2$ pour quatre valeurs d’induction externe: $B_{ext} = 750, 850, 950$ et 1350 Gauss. Au delà de 1340 Gauss, la position u_{pv} unique des quatre vortex se rejoint à l’origine du plan. Les solutions deviennent alors symétriques sous rotation et correspondent aux GiantVortex (GV) précédemment décrits.

Chapitre 5

Etude de la magnétisation d'un réseau de nanofils en plomb

Les expériences sur la magnétisation d'un réseau de nanofils de plomb réalisées par Sébastien Michotte au laboratoire du PCPM¹ permettent une application et surtout un test direct des simulations numériques préalablement établies. En effet, possédant un rapport hauteur de fil - rayon très élevé ($h/R \simeq 30\,000/120 = 250$ en nm/nm), ces nanofils électrodéposés dans une membrane d'alumine peuvent s'identifier aux précédents cylindres de hauteur infinie numériquement étudiés.

5.1 Expérience

La présente section décrit succinctement le dispositif expérimental et la technique employée pour la mesure de la magnétisation [41]. L'objectif ici n'est certainement pas de rentrer dans les détails complexes des processus expérimentaux (électrochimie de la fabrication, le dispositif SQUID, etc...), mais bien d'appréhender les points expérimentaux essentiels intervenant dans une modélisation théorique de l'expérience réalisée.

5.1.1 Fabrication du réseau de nanofils

Les nanofils de plomb ont été électrodéposés dans les pores d'une membrane d'alumine (voir Figure 5.1). Le processus chimique d'électrodéposition emploie une solution aqueuse contenant des ions Pb^{2+} ($0.5 \text{ M Pb}(\text{NH}_2\text{SO}_3)_2$, $\text{pH} \approx 1.4$ à 24.5°C) et trois électrodes. Une épaisse couche d'argent sur une des deux faces de la membrane d'alumine sert de cathode, une électrode en Ag/AgCl sert de référence et une anode en graphite constitue la troisième électrode. A température ambiante, et sans agitation mécanique, l'électrodéposition des ions de Pb^{2+} s'effectue lorsque le potentiel de la cathode en or est fixé à -0.5 V (en mode potentiel constant) ou à -0.39 V pendant 100 ms et -0.9 V pendant 2 ms (en mode potentiel pulsé) par rapport à l'électrode de référence. Le temps de remplissage étant connu, on arrête le dépôt avant le débordement. La Figure 5.2 montre le résultat de ce processus de fabrication, après dissolution de la membrane d'alumine, de façon à mettre en évidence la structure cylindrique de ces nanofils. Il est évident que cette dissolution s'est opérée après les mesures expérimentales de magnétisation. Les fils, contrairement à l'image proposée par le SEM, étaient parallèles et électriquement isolés les uns par rapport aux autres lors des manipulations.

¹Unité de Physico-Chimie et de Physique des Matériaux, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

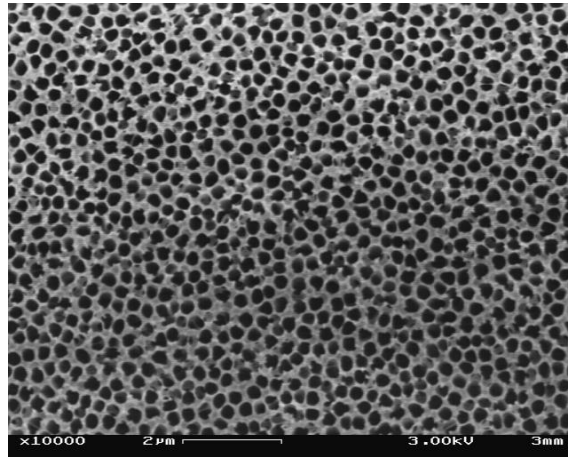


Figure 5.1— Image prise au microscope électronique (Scanning Electronic Microscope, SEM) d'une membrane d'alumine. Cette matrice de pores servira de moule au travers desquels les nanofils de plomb seront électrodéposés.

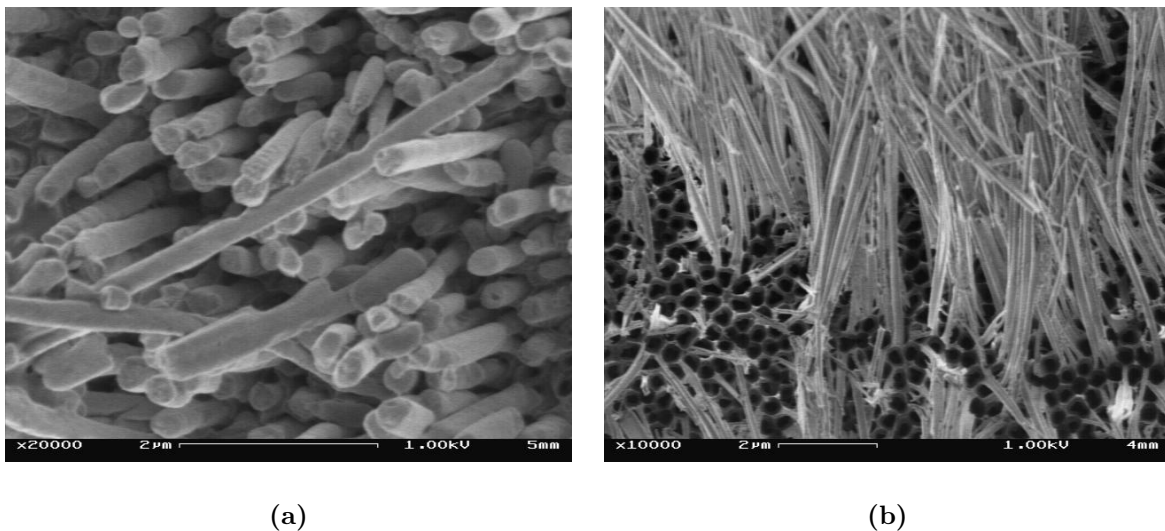


Figure 5.2— En (b), image prise au SEM après dissolution partielle de la membrane d'alumine, encore visible en fond d'écran. Contrairement à leur comportement lors de la mesure de magnétisation où la membrane d'alumine était toujours présente, les nanofils se sont ici agglomérés. La présence de la membrane garantit à la fois un isolement électrique et une disposition parallèle des nanofils par rapport au champ magnétique externe appliqué. En (a), un agrandissement des nanofils. La structure cylindrique, ainsi que le grand rapport hauteur/rayon des fils apparaissent alors clairement sur cette image SEM.

5.1.2 Mesures de magnétisation

Les mesures de magnétisation du réseau de nanofils électrodéposés ont été réalisées par un magnétomètre SQUID² (Quantum Design, MPMS 5). Un champ magnétique externe, B_{ext} , fut appliqué parallèlement à l'ensemble des nanofils constituant le réseau, en mode croissant en partant d'un champ nul, et en mode décroissant en partant d'un champ supérieur au champ critique observé. Toutes ces mesures ont été

²Superconducting Quantum Interference Device.

opérées à différentes températures inférieures à la température critique ($T_c = 7.2$ K) de l'état supraconducteur du plomb.

Le film constituant la cathode en argent fut systématiquement enlevé mécaniquement avant toute mesure de magnétisation. Cette précaution supprime le signal attaché à la cathode et isole électriquement les nanofils entre eux. La réponse diamagnétique des fils supraconducteurs est alors mise en évidence. La Figure 5.3 exhibe les magnétisations expérimentales prises à différentes températures en mode champs externes croissant et décroissant comme précédemment décrites. Il apparaît alors clairement que les températures proches de la température critique ne présentent aucune hystérèse. Par contre, une hystérèse grandissante avec la décroissance de la température devient significative en deçà de 5.5 K pour cet échantillon.

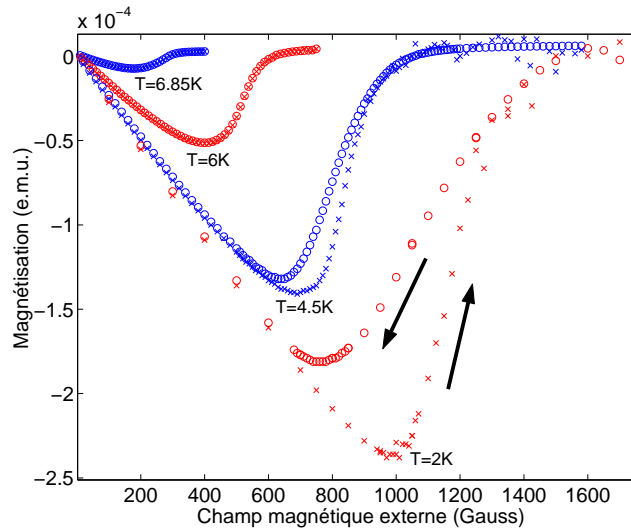


Figure 5.3— Mesures expérimentales (SQUID, Quantum Design, MPMS 5) de la magnétisation d'un réseau de nanofils de plomb électrodéposés. Pour limiter les graphes présents sur la figure, toutes les températures ne sont pas représentées. De haut en bas, les magnétisations pour $T = 6.85, 6, 4.5$ et 2 K, en mode champs magnétiques externes croissant (courbe inférieure, les croix, à une température fixée) et décroissant (courbe supérieure, les cercles, à une température fixée).

L'objectif majeur de ce chapitre sera d'essayer de reproduire et de comprendre ces courbes de magnétisation pour deux échantillons électrodéposés différemment, et d'interpréter ce comportement d'hystérèse.

5.2 Modélisation de l'expérience de magnétisation

Le modèle développé pour interpréter les courbes de magnétisation est le suivant [48, 49],

$$M_{tot}(B_{ext}, T) = A \sum_{r_i=r_{initial}}^{r_{final}} m_{GL}(B_{ext}, r_i, \lambda(T), \xi(T)) \alpha(r_i, \mu, \sigma), \quad (5.1)$$

où,

- A est un facteur de normalisation dépendant du nombre N de fils de hauteur h présents dans la matrice d'alumine. Puisque m_{GL} est exprimé dans les variables adimensionnelles (2.14), tandis

que la magnétisation expérimentale est mesurée en e.m.u. (unités cgs de magnétisation), $N \stackrel{(3.9)}{=} A/(h\Phi_0)$, avec $\Phi_0 = 2.07 \times 10^{-7}$ Gauss·cm² et $h \simeq 10 \times 10^{-4}$ cm;

- $m_{GL}(B_{ext}, r_i, \lambda(T), \xi(T))$ est la magnétisation théorique d'un cylindre de hauteur infinie, de rayon r_i , de paramètre phénoménologique $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$, plongé dans un champ magnétique externe B_{ext} . Cette magnétisation est obtenue par résolution numérique des équations indépendantes du temps de Ginzburg-Landau. Sous les hypothèses de symétrie cylindrique, le modèle 1D préalablement décrit au chapitre 3 fournit cette magnétisation théorique. Si la symétrie sous rotation est relâchée, le modèle 2D (chapitre 4) est alors employé;
- $\alpha(r_i, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ représente une dispersion du type gaussienne de moyenne μ et d'écart-type σ pour les rayons des nanofils constituant le réseau mesuré. Chacune des magnétisations théoriques associées à un cylindre de rayon r_i sera donc pondérée par le poids $\alpha(r_i, \mu, \sigma)$;
- la sommation s'étend sur les rayons compris entre $r_{initial} = \mu - 3\sigma$ et $r_{final} = \mu + 3\sigma$ par pas de 1 ou 2 nanomètres.

En sommant uniquement sur les magnétisations individuelles, ce modèle néglige l'interaction magnétique entre les nanofils. Cette hypothèse est invoquée de par la taille réduite des fils, et donc leur faible dia- ou para- magnétisme associé.

Les paramètres libres du modèle (5.1) sont donc A , μ , σ , $\lambda(T)$ et $\xi(T)$. Parmi ces derniers, seules les longueurs de pénétration λ et de cohérence ξ varient avec la température. Par conséquent, A , μ et σ doivent être ajustés indépendamment de la température. Cependant, le paramètre A sera laissé libre puisqu'il ne modifie que l'amplitude de la magnétisation totale dans le modèle. Il est donc sans incidence sur la détermination des paramètres phénoménologiques λ et ξ , ainsi que sur les propriétés d'hystérèse à reproduire. Les paramètres significatifs deviennent alors λ , ξ , μ et σ . Pour des raisons justifiées par la suite, le doublet fixant la dispersion en rayon des nanofils, (μ, σ) sera déterminé à $T = 3.25$ K par une minimisation du chi-carré. Ce dernier mesure l'écart entre les données expérimentales et la courbe théorique de la magnétisation. La moyenne μ et l'écart-type σ étant fixés, seuls A , et surtout les deux paramètres phénoménologiques de Ginzburg-Landau, $\lambda(T)$ et $\xi(T)$, seront alors ajustés de façon à reproduire les magnétisations expérimentales obtenues à différentes températures en dessous de la température critique T_c du réseau de plomb. En particulier, la paire des longueurs caractéristiques, (λ, ξ) , sera ajustée de façon à restituer le champ critique B_c et la position minimale B_{min} des courbes de magnétisation du réseau. Une méthode du chi-carré à toutes les températures, nécessitant une puissance de calcul non disponible au préalable, sera donc évitée en appliquant cette démarche simplifiée.

5.3 Analyse du premier échantillon, R116nm

La Figure 5.4 reprend toutes les courbes de magnétisation obtenues pour le premier échantillon mesuré. Les nanofils constituant ce dernier ont été électrodéposés en mode potentiel constant³. En référence au rayon moyen déterminé par l'analyse qui suit, $\mu = 116$ nm, l'échantillon sera dénommé "R116nm". Ce résultat a par ailleurs été confirmé par les observations au microscope électronique (SEM⁴) des micropores constituant la membrane d'alumine. Cette même étude a également approuvé la valeur ajustée de l'écart-type, $\sigma = 16$ nm.

5.3.1 Réponse paramagnétique de l'alumine et du plomb

Malgré la suppression de la cathode en or, l'échantillon présente toujours une faible réponse paramagnétique ajoutée au signal diamagnétique des nanofils supraconducteurs. Pour substituer cette contri-

³Pour rappel (voir section 5.1.1), avec $V = -0.5$ Volts.

⁴Scanning Electronic Microscope.

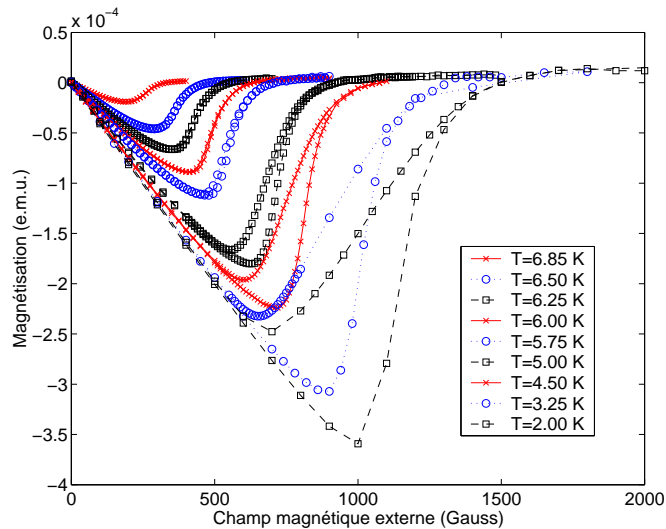


Figure 5.4— Mesures expérimentales (SQUID, Quantum Design, MPMS 5) de la magnétisation du premier échantillon “R116nm” analysé. Toutes les températures expérimentalement étudiées sont représentées. De haut en bas, les magnétisations pour $T = 6.85, 6.5, 6.25, 6, 5.75, 5, 4.5, 3.25$ et 2 K, en mode champs magnétiques externes croissant (courbe inférieure à température fixée) et décroissant (courbe supérieure).

bution, et obtenir donc le signal venant exclusivement des nanofils, une calibration linéaire de la réponse paramagnétique a été appliquée. En particulier, un ajustement par une droite⁵ $M(B_{ext}) = \alpha + \beta B_{ext}$ fut réalisé sur tous les points ne présentant essentiellement qu’une réponse paramagnétique, c’est-à-dire pour $T > 7.2$ K ou $B_{ext} > B_{critique}$. La Figure 5.5 illustre graphiquement cette droite de calibration pour l’échantillon “R116nm”. Seuls les points formant une droite (les autres appartiennent encore à la réponse supraconductrice) sont donc pris en considération dans la calibration. Les paramètres obtenus sont $\alpha = 0$ emu et $\beta = 5 \times 10^{-9}$ emu/gauss. Par conséquent, dans la construction de la magnétisation totale (5.1), la réponse paramagnétique sera systématiquement ajoutée à cette dernière.

5.3.2 Courbes de magnétisation

Les paramètres libres associés au modèle (5.1) sont donc maintenant A , $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ avec $\mu = 116$ nm et $\sigma = 16$ nm. Pour les quatre plus hautes températures ($T = 6.85, 6.5, 6.25$ et 6 K), les courbes expérimentales de magnétisation ne présentent aucune hystérèse. Elles sont ajustées⁶ par des longueurs caractéristiques dépendant de la température, $\lambda(T)$ et $\xi(T)$, qui prennent respectivement les valeurs suivantes $(\lambda(T), \xi(T)) = (120, 260), (75, 197), (70, 168), (65, 152)$ (nm, nm) à $T = 6.85, 6.5, 6.25$ et 6 K. La Figure 5.6 représente graphiquement le résultat de ces ajustements. De par la valeur relativement élevée de l’écart-type, la sommation intervenant dans la construction de la magnétisation s’est bornée de $\mu - 2\sigma$ à $\mu + 2\sigma$ par pas de 1 nm. Cette restriction, sans conséquence sur la magnétisation totale, permet alors de réduire le nombre de magnétisations individuelles (pour un rayon fixé) à calculer. En l’occurrence, cette démarche diminue de plus d’un tiers le temps calcul alloué à la construction de la magnétisation totale pour un ensemble de paramètres libres μ , σ , $\lambda(T)$, $\xi(T)$ et A fixés.

Proches de T_c , les valeurs des longueurs caractéristiques sont élevées, et les rayons normalisés des cylindres constituant le réseau s’étalent sur des faibles valeurs: $u_b = r_i/\lambda(T) \in [0.7, \dots, 1.23]$ à $T = 6.85$ K et $u_b = r_i/\lambda(T) \in [1.29, \dots, 2.28]$ à $T = 6$ K. Par conséquent, en accord avec les résultats du diagramme de

⁵Avec $B_{ext} = H_{ext}$ dans les unités c.g.s. (Gauss).

⁶Pour rappel, en cherchant la paire $(\lambda(T), \xi(T))$ qui reproduit le champ critique B_c et la position minimale B_{min} des courbes de magnétisation aux différentes températures expérimentales T .

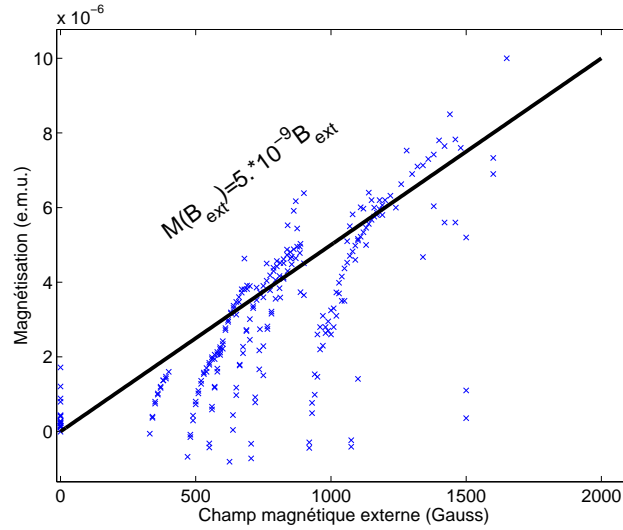


Figure 5.5— Droite de calibration de la réponse paramagnétique attachée à la membrane d'alumine. Cette réponse paramagnétique est reproduite par $M(B_{ext}) = 5 \times 10^{-9} B_{ext}$.

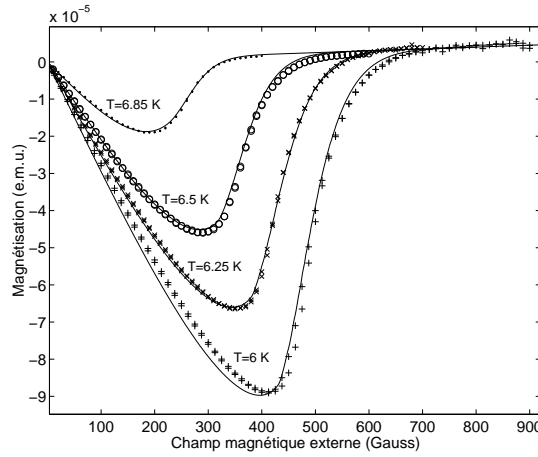


Figure 5.6— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes continues) d'un réseau de nanofils de plomb. De haut en bas, les courbes à $T = 6.85, 6.5, 6.25$ et 6 K sont représentées. Les valeurs des paramètres libres associés au modèle (5.1) valent respectivement $(\lambda, \xi) = (120, 260), (75, 197), (70, 168), (65, 152)$ nm où $\mu = 116$ nm et $\sigma = 16$ nm.

phase de Zharkov, $\Delta b_c^I(u_b, \kappa)$, (Figure 3.9 du chapitre 3 sur la résolution numérique des équations de GL à une dimension), les nanofils présentent une hystérèse très faible voire nulle (à $T=6.85$ K) pour l'état Meissner $L = 0$ (Figure 5.7). Il apparaît également clairement sur ce même diagramme que les solutions de vorticité plus élevée sont impossibles. A ces échelles de température, les longueurs caractéristiques sont encore trop grandes par rapport au rayon du cylindre. La taille occupée par un vortex dépasserait largement le domaine de définition du paramètre d'ordre.

L'absence de vortex, corrélée par des longueurs caractéristiques importantes par rapport aux rayons des nanofils constituant le réseau, garantit la symétrie cylindrique aux solutions des équations de GL. La magnétisation totale a donc pu être construite   partir du modèle 1D avec une vorticité L fixée   zéro.

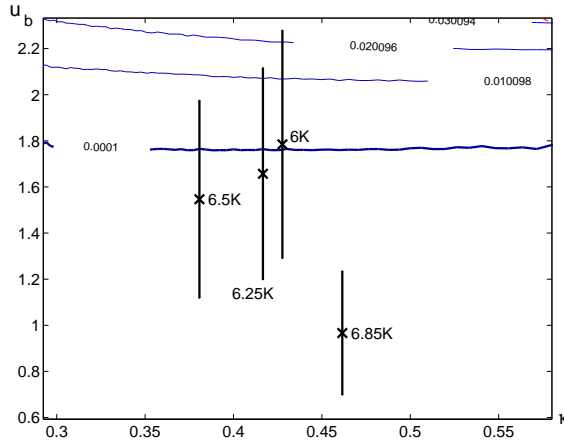


Figure 5.7— Représentation graphique dans le diagramme de Zharkov des dispersions en rayon et des paramètres κ déterminés pour reproduire les données expérimentales de magnétisation aux quatre plus hautes températures étudiées. A $T = 6.85$ K, aucun rayon appartenant à la dispersion ne produit un comportement d’hystérèse dans l’état Meissner. Par contre, à $T = 6$ K, la moitié présente une hystérèse. Cependant, leur faible largeur d’hystérèse ($\Delta B_{c\max}^I < 0.02 \times \Phi_0 / (2\pi\lambda^2) = 15.6$ Gauss) et leur contribution négligeable (poids $\alpha(r_i)$ petits) dans la magnétisation totale, engendrent une hystérèse expérimentalement imperceptible. Pour rappel, les courbes de niveau représentent la valeur en champ magnétique normalisé (par $\Phi_0 / (2\pi\lambda^2)$) de l’hystérèse présente dans l’état Meissner. Sa grandeur dans les unités physiques (en Gauss ici) s’obtient en multipliant les valeurs normalisées du graphique par les normalisations respectives: $B_{\lambda=120}^{T=6.85} = \Phi_0 / (2\pi\lambda^2) = 229$; $B_{\lambda=75}^{T=6.5} = 585$; $B_{\lambda=70}^{T=6.25} = 672$ et $B_{\lambda=65}^{T=6} = 779$ Gauss. Notons enfin que la valeur de κ à $T = 6.85$ K est anormalement élevée au regard du comportement général de ce paramètre en fonction de la température. Néanmoins, en acceptant 10% de marge d’erreur relative sur les valeurs déterminées de $\lambda(T = 6.85 \text{ K})$ et $\xi(T = 6.85 \text{ K})$, l’erreur relative associée à κ (20%) incluse alors les valeurs attendues.

En diminuant la température, les paramètres phénoménologiques λ et ξ continuent à s’affaiblir [2]. Ils peuvent alors atteindre des valeurs engendrant un plus grand comportement d’hystérèse dans l’état $L = 0$. La Figure 5.8 suivante illustre cette prédiction. A $T = 5.75$ K et $T = 5$ K, la majorité des nanofils constituant le réseau étudié sont inclus dans une zone du diagramme où l’hystérèse ΔB_c^I est non négligeable. Pour rappel, cette largeur est déterminée par la différence entre le champ de transition en mode champ magnétique externe croissant, B_{cup}^I , avec celui en mode décroissant, B_{cdown}^I , au travers de la définition $\Delta B_c^I = B_{cup}^I - B_{cdown}^I$ en (3.13). Une illustration graphique de cette dernière est reprise sur les Figures 3.6 et 3.8 du chapitre 3.

En incluant dans la construction de la magnétisation totale les définitions des champs de transition B_{cup}^I et B_{cdown}^I (Figure 5.13, courbes $T = 5$ K, $L = 0$), on est en mesure de reproduire les données expérimentales de magnétisation, en particulier le comportement d’hystérèse (Figure 5.9). Par conséquent, pour ces deux températures intermédiaires, cette irréversibilité expérimentale est expliquée par la présence de cette même caractéristique dans l’énergie libre décrivant l’effet Meissner $L = 0$. Notons qu’une analyse basée sur la résolution des équations du mouvement linéarisées, est totalement prohibée pour décrire ce fait expérimental. En effet, la présence d’une transition du premier ordre autour du changement de phase état normal \leftrightarrow état supraconducteur s’accompagne par définition d’une discontinuité dans la valeur du paramètre d’ordre ψ . Un développement autour de zéro de ce dernier, ou encore une linéarisation des équations du mouvement associées (GL), serait alors une approche erronée.

Pour les températures les plus basses, à $T = 4.5$, 3.25 et 2 K, le comportement théorique de l’hystérèse autour de la transition pour $L = 0$ s’accroît fortement. En effet, à $T = 2$ K, λ atteint sa plus faible valeur. Dès lors, les rayons normalisés u_b constituant le réseau, ainsi que la normalisation B_λ , prennent

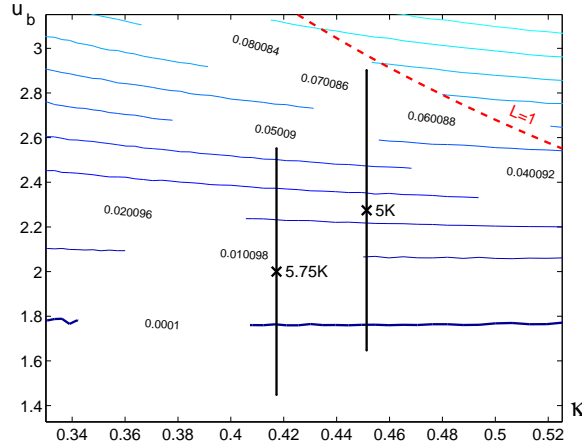


Figure 5.8— Représentation graphique dans le diagramme de Zharkov des dispersions en rayon et des paramètres κ déterminés pour reproduire les données expérimentales de magnétisation à $T = 5.75$ K et $T = 5$ K. Par opposition avec l'analyse du diagramme précédent, les rayons rencontrés dans la dispersion appartiennent majoritairement à la zone où $L = 0$ produit un comportement d'hystérèse. Il n'est dès lors pas surprenant de l'observer expérimentalement à ces températures intermédiaires.

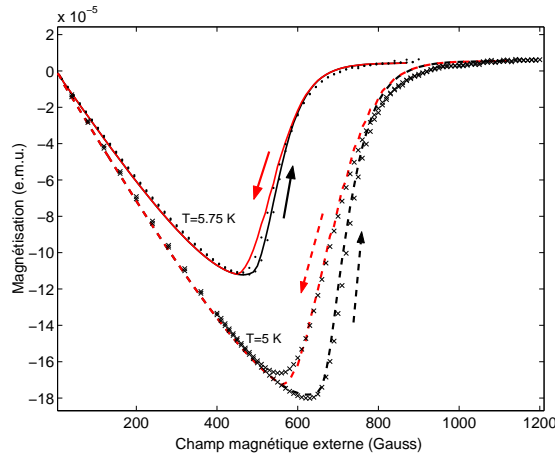


Figure 5.9— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes continues et discontinues) d'un réseau de nanofils de plomb. De haut en bas, les courbes à $T = 5.75$ K et 5 K sont représentées. Les valeurs des paramètres libres associés au modèle (5.1) valent respectivement $(\lambda, \xi) = (58, 139), (51, 113)$ nm avec $\mu = 116$ nm et $\sigma = 16$ nm toujours évidemment.

leur valeur maximale. En accord avec le diagramme de Zharkov, ils doivent par conséquent conduire à une plus grande hystérèse pour $L = 0$. Cependant, comme l'illustre la Figure 5.10, la contribution ΔB_c^L de $L = 0$ reste insuffisante pour reproduire l'hystérèse observée. Par contre, en introduisant la contribution de l'état $L = 1$ présent à ces températures (Figure 5.11), l'hystérèse s'élargit. En effet, l'existence d'une barrière de potentiel [56] pour la transition entre les états de vorticité différente, favorise le système à rester dans des états métastables. La barrière accentue par conséquent l'écart entre les champs de transition $B_{ext}^{L=0 \rightarrow 1}$ et $B_{ext}^{L=1 \rightarrow 0}$. Pour rappel (voir chapitre 4), dans le diagramme de phase (\mathcal{M}, B_{ext}) , $B_{ext}^{L=0 \rightarrow 1}$ définit la valeur en champ magnétique où le système capture un vortex d'Abrikosov en mode champ externe croissant. La seconde transition, $B_{ext}^{L=1 \rightarrow 0}$, désigne par contre le champ responsable de l'expulsion

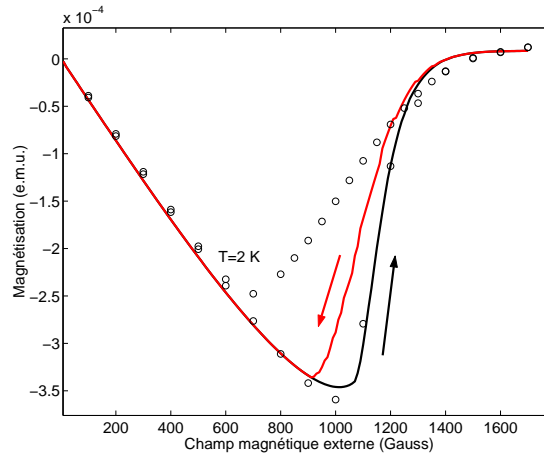


Figure 5.10— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes continues) d'un réseau de nanofils de plomb avec la contribution de l'état $L = 0$ uniquement. Le graphe théorique supérieur décrivant la magnétisation en champ magnétique externe décroissant ne reproduit pas correctement la magnétisation expérimentale associée à ce même mode de décroissance. Il semble donc qu'une contribution supplémentaire soit nécessaire pour reproduire les données expérimentales.

du vortex lors d'une transition de l'état $L = 1$ vers $L = 0$ en mode champ décroissant. A l'échelle mésoscopique, cette transition survient au voisinage de la position minimale de la courbe d'énergie libre $L = 1$. En tenant compte de cette barrière de Bean-Livingston, les magnétisations expérimentales peuvent être maintenant reproduites.

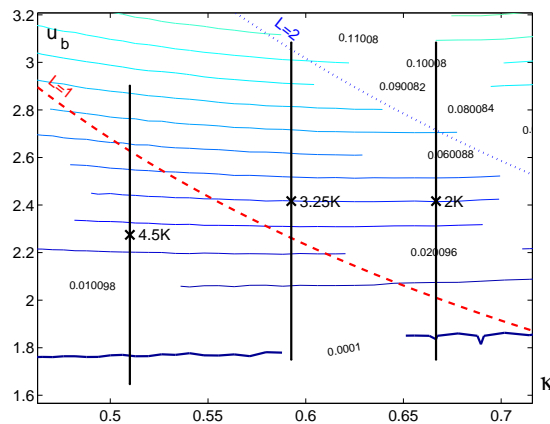


Figure 5.11— Représentation graphique dans le diagramme de Zharkov des dispersions en rayon et des paramètres κ déterminés pour reproduire les données expérimentales de magnétisation à $T = 4.5, 3.25$ et 2 K. Les rayons rencontrés dans la dispersion appartiennent majoritairement à la zone où $L = 0$ produit un comportement d'hystérèse. De plus, ils croisent la frontière d'existence de l'état $L = 1$. Il n'est dès lors pas surprenant d'observer expérimentalement une hystérèse importante, engendrée par l'existence d'une barrière de potentiel (barrière de Bean-Livingston [56]) pour la transition entre ces états quantiques de différentes vorticités. A $T = 2$ K, la vorticité peut même atteindre $L = 2$. Néanmoins, la faible magnétisation de cet état, couplée   un poids statistique $\alpha(r_i, \mu, \sigma)$ non dominant dans la construction de la magnétisation totale (5.1), permettent de négliger théoriquement son existence.

Néanmoins, la valeur du champ de transition en mode décroissant, $B_{cdown}^{L=1 \rightarrow 0}$, induit une hystérèse dans la magnétisation théorique (5.1) trop forte. Le système semble donc survivre moins longtemps dans l'état métastable $L = 1$ ⁷. Dès lors, un nouveau paramètre unique à tous les rayons, ΔB_t , a été défini dans le modèle (5.1) pour reproduire les données expérimentales en champ décroissant. Prenant les valeurs $\Delta B_t = 120, 90$ et 80 Gauss à $T = 2, 3.25$ et 4.5 K respectivement, il conduit à une expulsion du vortex intervenant entre

- le point B_{ext}^* de croisement des courbes d'énergie $L = 0$ et $L = 1$: $\mathcal{E}_{L=0}(B_{ext}^*) = \mathcal{E}_{L=1}(B_{ext}^*)$;
- et la position théorique de la transition $B_{cdown}^{L=1 \rightarrow 0}$ (voir Figure 5.13, courbes $T = 2K, L = 0$ et $T = 2K, L = 1$).

La variable ΔB_t est définie constante pour tous les rayons de façon à minimiser le nombre de paramètres libres intervenant dans le modèle (5.1). La Figure 5.12 illustre les magnétisations expérimentales et théoriques obtenues pour ces trois plus basses températures, après avoir inclus ce nouveau paramètre ΔB_t . Au regard de l'expérience de magnétisation de Geim [50] sur des disques mésoscopiques, il est important de spécifier que la rugosité des parois influence le comportement d'hystérèse. En particulier, une diminution de plus de 50% de l'hystérèse a été observée sur des disques présentant une plus grande rugosité.

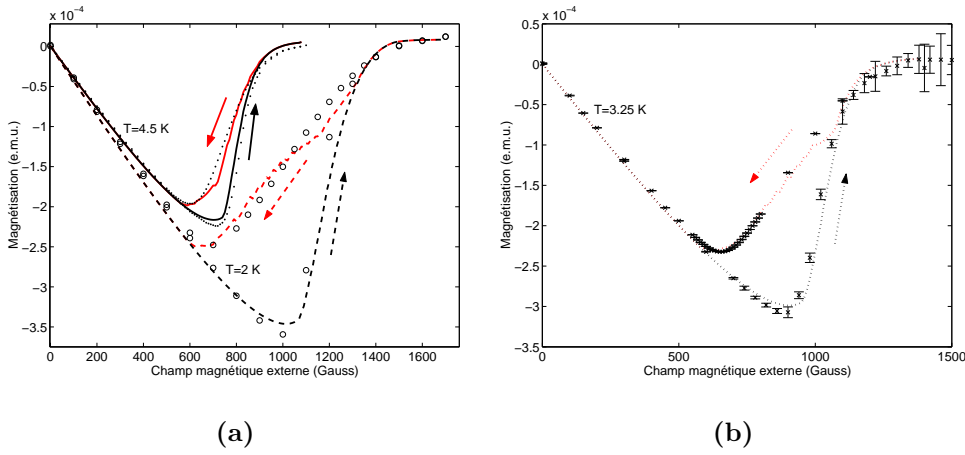


Figure 5.12— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes continues et en pointillées) d'un réseau de nanofils de plomb. En **a**), de haut en bas, les courbes à $T = 4.5$ et 2 K, et en **b**) à $T = 3.25$ K, sont représentées respectivement. Les valeurs des paramètres libres associés au modèle (5.1) valent à $T = 4.5, 3.25$ et 2 K: $(\lambda, \xi) = (51, 100), (48, 81), (48, 72)$ nm avec $\mu = 116$ nm et $\sigma = 16$ nm.

5.3.3 Magnétisation à l'échelle mésoscopique: Trois comportements distincts

Pour résumer l'analyse de ce premier échantillon (R116nm), trois comportements se distinguent en fonction de la température. Le premier, présent aux plus hautes températures, ou encore aux plus bas rayons normalisés $u_b = R/\lambda(T)$, se caractérise par une transition du second ordre entre l'état supraconducteur et l'état normal. La Figure 5.13 illustre ce constat théorique au travers des courbes d'énergie libre (figure supérieure, courbe $T = 6.85K, L = 0$) et de magnétisation (figure inférieure, courbe $T = 6.85K, L = 0$) pour un cylindre de rayon $R = \mu = 116$ nm. Aucune hystérèse n'est présente à ces échelles de longueurs

⁷Une étude plus approfondie de la barrière de potentiel de Bean et Livingston sera abordée dans l'analyse du second échantillon (PBHT5) du présent chapitre.

caractéristiques $\lambda(T)$ et $\xi(T)$, et seul l'état Meissner, $L = 0$, survit dans l'état supraconducteur.

Le deuxième comportement, présent aux températures intermédiaires, voit apparaître une hystérèse dans l'état Meissner. Le champ critique de nucléation de la supraconductivité, B_{cdown}^I en mode champ externe décroissant, est alors différent du champ de transition vers l'état normal, B_{cup}^I , en mode croissant. Ils définissent tous deux la largeur de l'hystérèse, ΔB_c^I , observée expérimentalement au travers de la magnétisation (Figure 5.13, courbes $T = 5K, L = 0$).

Le troisième comportement, survenant aux plus larges rayons normalisés ou encore aux plus basses températures, se caractérise par l'existence d'états de vorticité plus élevée ($L \neq 0$). Une barrière de potentiel (barrière de Bean-Livingston) retarde alors la transition vers l'état fondamental, et accentue le comportement d'hystérèse observé dans ces échantillons. En particulier, en mode décroissant, le système survit dans un état métastable ($\mathcal{E}_{L=1} > \mathcal{E}_{L=0}$) jusqu'au champ de transition $B_{cdown}^{L=1 \rightarrow 0} + \Delta B_t$ (Figure 5.13, courbes   $T = 2$ K). Contrairement   l'expérience de Geim [32], l'absence de discontinuité dans la magnétisation de l'état supraconducteur provient de l'importante dispersion dans les valeurs des rayons ($\sigma = 16$ nm) des nanofils constituant le réseau étudié.

5.4 Unicité de la solution

L'analyse qui suit propose une étude plus détaillée de l'impact des paramètres libres sur le modèle de construction de la magnétisation totale (5.1). L'objectif de cette section sera de prouver l'unicité des valeurs des paramètres libres $\lambda(T)$, $\xi(T)$, μ et σ employés pour reconstruire les magnétisations expérimentales.

5.4.1 Influence des paramètres libres sur l'hystérèse ΔB_c^I du réseau

Pour les températures intermédiaires, $T = 5.75$ K ou $T = 5$ K, l'hystérèse provient du comportement type-I de la transition de l' tat Meissner vers l'état normal. *A priori*, le diagramme de Zharkov⁸ (Figure 3.9) montre qu'une augmentation de u_b doit accroître la valeur de l'hystérèse présente dans l' tat Meissner $L = 0$. Les Figures 5.14 et 5.15 illustrent ce constat théorique. Elles décrivent les magnétisations théoriques (traits continus) avec μ et σ fixés sur la première ($\mu = 116$ nm et $\sigma = 16$ nm) et λ et ξ fixés sur la seconde ($\lambda = 58$ nm et $\xi = 139$ nm). Sur la Figure 5.14, une diminution de λ , ou encore une augmentation de u_b puisque $\mu = 116$ nm est fixé, engendre bien une augmentation de l'hystérèse ΔB_c^I . Par contre, une variation de ξ (colonne de droite), ou de κ parce que λ est fixé, n'influence pas, ou très peu, cette hystérèse. Ce résultat est en fait cohérent avec les courbes de niveau parallèles   l'axe κ du diagramme de Zharkov et la valeur constante de la normalisation B_λ (Figure 3.9). Sur la Figure 5.15, ces propriétés sont identiques. Sur cette figure, une augmentation de la moyenne μ engendre un accroissement de u_b si λ est constant. Par conséquent, l'hystérèse va croître également. Le paramètre σ influence aussi l'hystérèse, puisqu'en augmentant, il permet d'atteindre des valeurs de u_b dans la dispersion plus élevées. Cependant, comme σ est le paramètre libre qui agit le plus significativement sur la concavité autour du champ de transition normal \leftrightarrow supraconducteur, il sera fixé pour ajuster cette concavité. Seules donc les quantités μ , λ et ξ doivent encore être déterminées.

Pour les températures intermédiaires $T = 5.75$ K et $T = 5$ K, le comportement d'hystérèse est essentiellement fixé par λ ou/et μ au travers de la valeur du rayon normalisé u_b . Ce résultat est en accord avec le comportement des courbes d'equi- Δb_c^I du diagramme de Zharkov (Figure 5.8).

En diminuant la température, des  tats de vorticité plus élevée ($L \neq 0$) apparaissent pour $T \leq 4.5$ K. L'analyse   nouveau du diagramme de Zharkov (Figure 5.11) montre alors que,

- pour un rayon normalisé u_b fixé, une augmentation de κ s'accompagne d'un accroissement de

⁸O  nous avons injecté en plus les courbes de niveau $\Delta b_c^I = \Delta B_c^I / (\Phi_0 / (2\pi\lambda^2))$ repr santant les valeurs de l'hystérèse de l' tat $L = 0$.

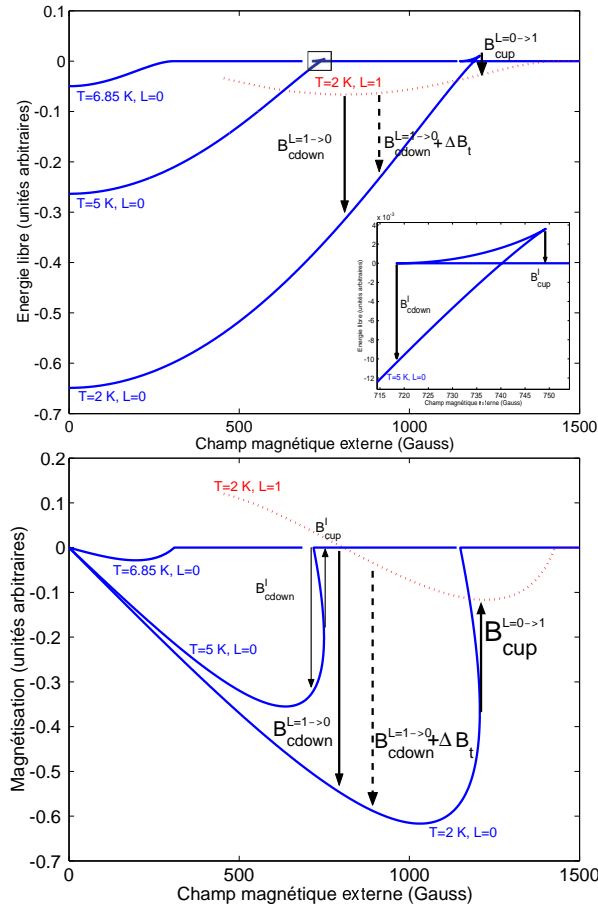


Figure 5.13— L'énergie libre (figure supérieure) et la magnétisation (inférieure) pour un cylindre de hauteur infinie de rayon $R = \mu = 116$ nm en fonction du champ magnétique externe appliqué (Gauss). Pour chaque figure, de haut en bas, sont représentés respectivement les résultats numériques à $T = 6.85$ K, $T = 5$ K et $T = 2$ K, avec les valeurs des paramètres phénoménologiques employés pour reproduire à ces températures les données expérimentales. La sous-figure dans le graphe supérieur est un agrandissement autour du champ critique de la courbe décrivant l'énergie libre à $T = 5$ K. Les définitions des différents champs de transition y sont graphiquement illustrées (flèches). Ce diagramme montre clairement les trois comportements principaux rencontrés dans la magnétisation à l'échelle mésoscopique, à savoir: (1) une transition du second ordre autour du changement de phase aux plus hautes températures, ou de manière équivalente, pour les plus faibles rapports $u_b = R/\lambda$; (2) une transition du premier ordre autour du changement de phase, avec un comportement d'hystérèse suivant le mode de croissance du champ externe; (3) une transition du second ordre à nouveau autour du changement de phase, accompagnée d'une hystérèse liée à la présence de la barrière de potentiel entre les états quantiques de différente vorticité L . En réponse   l'expérience de magnétisation de Geim [32] sur des disques d'aluminium (voir également Figure 3.1), sonder les trois comportements magnétiques majeurs   l'échelle mésoscopique s'effectue soit en modifiant le rayon   une température fixée (Geim), soit inversement en modifiant la température pour un rayon fixée (Michotte). Dans les deux cas, le rayon normalisé $u/\lambda(T)$ sera alors balayé sur une plage suffisamment grande pour explorer ces trois zones magnétiques distinctes   l'échelle mésoscopique.

l'hystérèse. En effet, les proportions des  tats de vorticités différentes augmentent alors significativement et accentuent l'effet d'hystérèse lié   la barrière de Bean-Linvington;

- pour un κ fixé, une augmentation de u_b accroît également les proportions des  tats de $L \neq 0$. Par

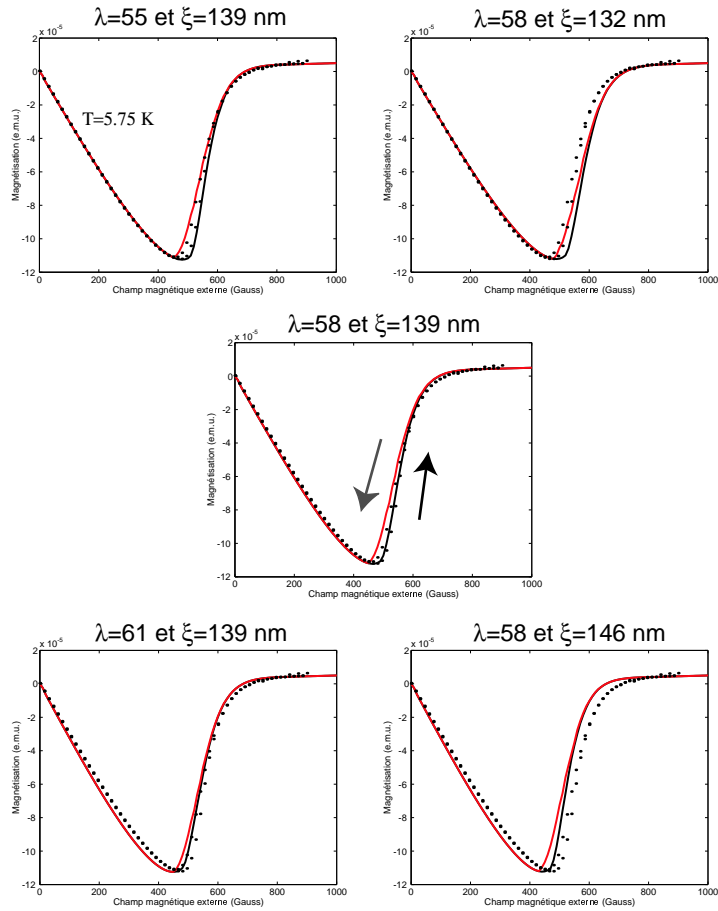


Figure 5.14— Comportement de la magnétisation totale à $T = 5.75$ K en fonction d'une variation de l'ordre de 5% de λ et ξ autour des valeurs ajustées $\lambda = 58$ nm et $\xi = 139$ nm. Les valeurs de (μ, σ) sont fixées à (116, 16) nm.

conséquent, elle accentue aussi le comportement d'hystérèse pour les mêmes raisons évoquées dans le point précédent.

Dès lors, pour maintenir une largeur ΔB_c^I constante, toute diminution (augmentation) de u_b au travers de la modification de λ et/ou μ doit s'accompagner d'une augmentation (diminution) de $\kappa = \lambda/\xi$ pour contrecarrer la diminution (augmentation) des proportions des états $L \neq 0$, et donc de l'hystérèse.

5.4.2 Influence des paramètres libres sur le champ critique B_c du réseau

En revenant aux deux figures sur les variations des paramètres libres à $T = 5.75$ K, il est facile de se convaincre que le champ critique B_c de la magnétisation totale possède les dépendances suivantes:

1. pour λ, μ fixés, la Figure 5.14 montre qu'une augmentation de ξ entraîne une diminution de B_c ;
2. pour ξ, μ fixés, la même figure montre qu'une augmentation de λ entraîne une très faible diminution de B_c ;
3. pour ξ, λ fixés, la Figure 5.15 montre qu'une augmentation de μ entraîne une diminution de B_c .

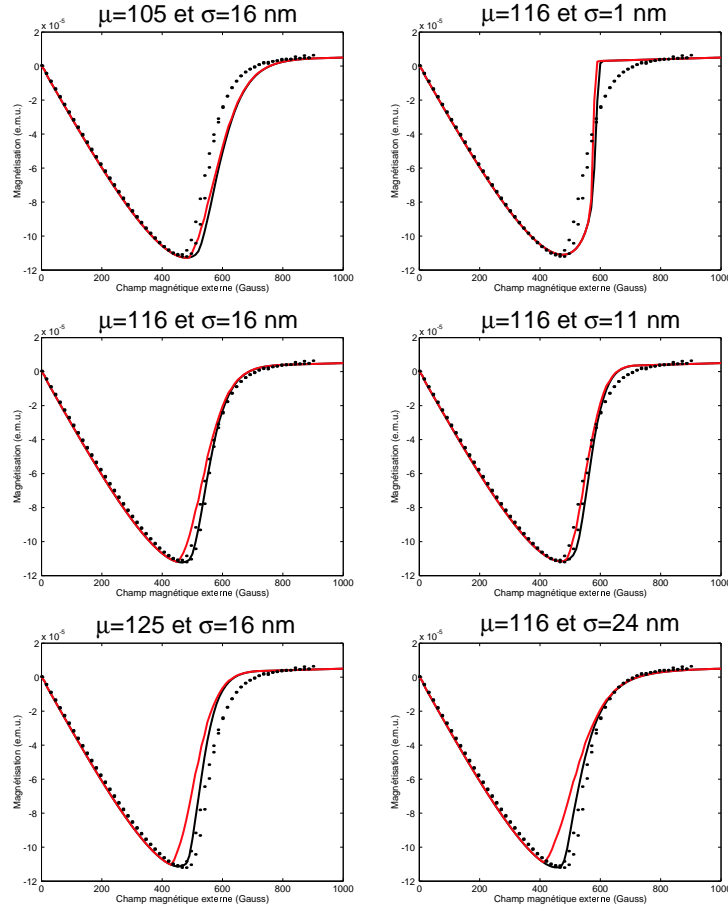


Figure 5.15— Comportement de la magnétisation totale à $T = 5.75$ K en fonction de variations de μ et σ autour des valeurs ajustées et confirmées par l'analyse au microscope électronique des nanopores: $\mu = 116$ nm et $\sigma = 16$ nm. Les valeurs de (λ, ξ) sont fixées à $(58, 139)$ nm.

Tous ces constats sont en accord avec les résultats de Zharkov repris dans son article sur l'effet Meissner paramagnétique [62]. La lecture de la Figure 1 dans cette référence montre que le champ normalisé $B_{c\xi} = B_c / (\Phi_0 / (2\pi\xi^2))$ est une fonction de u_b et κ . Par conséquent, le champ magnétique critique non normalisé, B_c , est fonction à la fois de $B_{c\xi}(u_b, \kappa)$ et de la normalisation $\Phi_0 / (2\pi\xi^2)$ (dépendante de ξ ici). On écrira, $B_c = B_{c\xi}(u_b, \kappa) \times \Phi_0 / (2\pi\xi^2)$, où $B_{c\xi}$ possède les dépendances suivantes en termes de κ (donc de λ et ξ) et u_b (donc de μ et λ):

- $B_{c\xi}(u_b, \kappa)$ est une fonction décroissante pour des κ croissants à u_b fixé **(1)**;
- $B_{c\xi}(u_b, \kappa)$ est également une fonction décroissante pour des u_b croissants à κ fixé **(2)**.

Le lien avec nos trois remarques précédentes issues de l'analyse des deux Figures 5.14 et 5.15 peut alors être établi:

1. Si μ et λ sont fixés (u_b constant), et que ξ augmente (κ diminue), alors par **(1)**, $B_{c\xi}(\kappa, u_b)$ augmente. Cependant, $\Phi_0 / (2\pi\xi^2)$ diminue en parallèle et semble contrecarrer l'augmentation de $B_{c\xi}$ dans la définition du champ critique physique B_c . Une analyse plus fine du diagramme montre alors que l'effet de diminution de $\Phi_0 / (2\pi\xi^2)$ domine l'augmentation de $B_{c\xi}$. L'induction critique B_c diminue donc globalement avec ξ croissant comme notre analyse le prévoyait déjà.

2. Si μ et ξ sont fixés, et que λ augmente, alors à la fois u_b diminue et κ augmente. Ces deux effets sont antagonistes sur $B_{c\xi}$ et donc sur B_c puisque $\Phi_0/(2\pi\xi^2) = C^{ste}$. Ceci explique la modification faible de B_c dans le cas présent avec néanmoins un rôle légèrement prépondérant sur sa diminution en fonction de u_b à $T = 5.75$ K.
3. Si λ et ξ sont fixés, et que μ augmente, on rejoint **(2)** sur $B_{c\xi}$ avec u_b qui augmente pendant que κ reste constant. Par conséquent, $B_{c\xi}$ et donc B_c , car $\Phi_0/(2\pi\xi^2) = C^{ste}$, diminuent comme on l'avait également stipulé.

Par corollaire, une étude identique peut être réalisée sur la position du minimum B_{min} de la magnétisation. Il est évident que pour un rayon fixé, λ et ξ génèrent une et une seule courbe de magnétisation produisant à la fois un champ critique B_c et une position du minimum B_{min} uniques. Par conséquent, la démarche adoptée pour ajuster les données à une température établie, consiste à fixer μ ⁹, et à trouver la paire λ et ξ qui reproduit ces deux champs, B_c et B_{min} . Toute la question repose donc sur l'unicité du paramètre μ . En d'autres mots, est-il possible de reproduire les magnétisations expérimentales en partant d'une autre valeur pour la moyenne ? Dans l'affirmative, quel est son impact sur les nouvelles grandeurs de $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ ajustant les données ? Les deux sections suivantes proposent une réponse.

5.4.3 Non-unicité de μ à $T > 4.5$ K

Pour maintenir ΔB_c constant à $T = 5.75$ K, les analyses précédentes (basées sur le diagramme de Zharkov) montrent que u_b doit le rester également. Par conséquent, une augmentation du paramètre libre μ doit s'accompagner d'un accroissement du paramètre λ . De plus, comme λ et μ augmentent, le champ critique B_c diminue (remarques n°2 et 3 dans la section précédente). Cette réduction ne peut alors être contrée que si ξ diminue significativement (remarque n°1). Le paramètre κ sera alors fortement augmenté puisque λ augmente et ξ diminue en même temps. Pour résumer, augmenter μ en imposant u_b fixé (une hystérèse constante), entraîne un accroissement significatif de κ . Comme cette modification du paramètre κ n'est soumise à aucune contrainte pour maintenir ΔB_c^I constant à cette température, il est possible de reproduire la magnétisation expérimentale avec une autre moyenne. A titre d'exemple, en incrémentant de 8% cette moyenne, $\mu = 116 \rightarrow 125$ nm, les données expérimentales ont pu être ajustées avec $\lambda = 62$ nm, et $\xi = 128$ nm, contre $(\lambda, \xi) = (58, 132)$ avec $\mu = 116$ nm. Une augmentation de 8% de la moyenne accroît donc λ d'environ 3% et diminue ξ de l'ordre de 8%. Ce résultat est donc théoriquement en accord avec les analyses précédentes. La Figure 5.16 illustre cet accord.

5.4.4 Unicité de μ à $T < 4.5$ K

Si la non-unicité des solutions en fonction de μ est possible aux températures supérieures à 4.5 K, cette propriété disparaît en dessous. En effet, pour maintenir une largeur d'hystérèse constante à $T < 4.5$ K, la contrainte précédente devient plus sévère: toute augmentation de u_b doit s'accompagner d'une réduction du paramètre phénoménologique κ . Cela revient physiquement à préserver les proportions des états de vorticités différentes rencontrés par la dispersion en rayon des nanofils constituant le réseau.

Pour $\mu = 116$ nm, $\lambda_{\mu=116} = 48$ nm et $\xi_{\mu=116} = 81$ nm ($\kappa_{\mu=116} = 0.593$ et $u_{b\mu=116} = 2.147$) ajustent correctement la magnétisation à $T = 3.25$ K. Si on accroît μ , comme dans le cas de $T = 5.75$ K, on sait que la nouvelle paire $(\lambda_{\mu=125}, \xi_{\mu=125})$ nécessaire pour reproduire la magnétisation sera au moins telle que $\lambda_{\mu=125} > \lambda_{\mu=116}$ et $\xi_{\mu=125} < \xi_{\mu=116}$. Cela ne peut être différent en regard de toutes les dépendances en température qui existent pour ces deux longueurs caractéristiques [2]. Dès lors, le nouveau $\kappa_{\mu=125}$ sera supérieur à l'ancien $\kappa_{\mu=116} = 48/81 = 0.593$. Il s'en suit immédiatement que le rayon normalisé $u_{b\mu=125}$ doit être alors inférieur à $u_{b\mu=116} = 2.147$ pour satisfaire la condition imposant un ΔB_c^I constant (garder les proportions de $L \neq 0$ constantes). Par conséquent, comme $u_{b\mu=125} = 125/\lambda_{\mu=125} < 2.147$, $\lambda_{\mu=125}$ doit

⁹Pour rappel, σ était déterminé par l'ajustement de la concavité de la magnétisation expérimentale autour du champ critique du réseau.

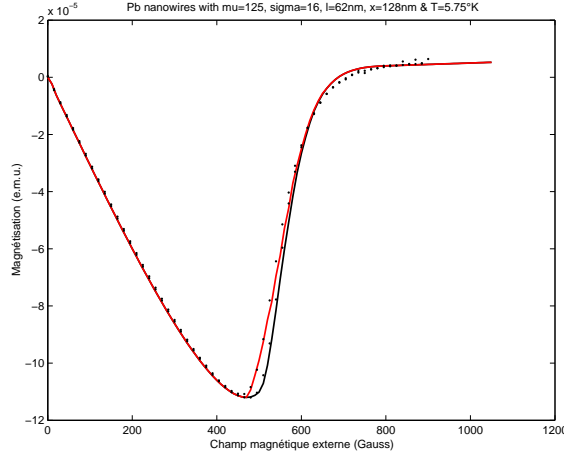


Figure 5.16— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes continues) d'un réseau de nanofils de plomb à $T = 5.75$ K. La moyenne μ des rayons des nanofils de plomb constituant le réseau a été augmentée de 5% par rapport à la valeur $\mu = 116$ nm ajustée à 3.25 K, et confirmée par une analyse au microscope électronique. Les valeurs des paramètres libres phénoménologiques associés au modèle (5.1) valent alors respectivement $(\lambda, \xi) = (62, 128)$ nm pour $\mu = 125$ nm, et $\sigma = 16$ nm. Une augmentation de 8% sur la moyenne génère donc une variation de $\simeq 7\%$ sur λ et $\simeq 3\%$ sur ξ .

être supérieur à 51.7 nm. Au minimum, $\kappa_{\mu=125}$ devient alors égal à $51.72/81 = 0.638$ si on prend la plus grande valeur de ξ permise ($\xi < 81$ nm). Dès lors, pour un même $u_b = u_{b\mu=125} = u_{b\mu=116} = 2.147$, on ne peut avoir les mêmes paramètres κ . En effet, $\kappa_{\mu=125}$ doit être supérieur à 0.638, alors que $\kappa_{\mu=116} = 0.593$. Il est donc impossible de reproduire les données expérimentales de magnétisation si μ augmente. En tout cas, l'ajustement sera moins bon. Les mêmes arguments s'appliquent dans le cas où l'on voudrait diminuer la moyenne μ .

La Figure 5.17 suivante illustre le caractère unique de la moyenne μ . En modifiant cette dernière, une représentation du chi-carré (5.2) en fonction de λ et ξ indique une position minimale dans cet espace de paramètre pour l'ajustement de la magnétisation expérimentale. En particulier, pour $\mu = 105$ nm, $\mu = 116$ nm et $\mu = 125$ nm, les deux paramètres phénoménologiques valent respectivement $(\lambda, \xi) = (45, 88)$, $(48, 81)$ et $(49, 80)$ nm. Chacun de ces points définit un minimum pour χ^2 , mais dont la valeur en fonction de μ est minimale à 116 nm. L'écart entre les données et la magnétisation théorique, quantifié par la valeur du chi-carré (χ^2), est donc minimisé globalement pour $\mu = 116$ nm. Toute variation de μ engendrera un moins bon ajustement des données expérimentales. Les valeurs des paramètres μ , $\lambda(T)$, $\xi(T)$ et σ sont donc uniques à $T < 4.5$ K. Le chi-carré employé, χ^2 , est défini comme suit,

$$\chi^2 = \sum_{B_{ext,i}} \left(\frac{M_{th}(B_{ext,i}) - M_{exp}(B_{ext,i})}{\Delta M_{exp}(B_{ext,i})} \right)^2, \quad (5.2)$$

où $\Delta M_{exp}(B_{ext,i})$ représente l'erreur expérimentale associée à la magnétisation, $M_{exp}(B_{ext,i})$, issue du SQUID, et $M_{th}(B_{ext,i})$ est la magnétisation théorique construite par (5.1).

5.4.5 Résumé

Les valeurs des paramètres libres μ , σ , $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ du modèle de construction de la magnétisation totale (5.1) sont uniques pour une température donnée. L'unicité provient de l'ajustement aux plus basses températures, c'est-à-dire pour lesquelles les vortex d'Abrikosov apparaissent. Etant donné que la moyenne μ de la dispersion en rayon, ainsi que son écart-type σ sont indépendants de la température, ces

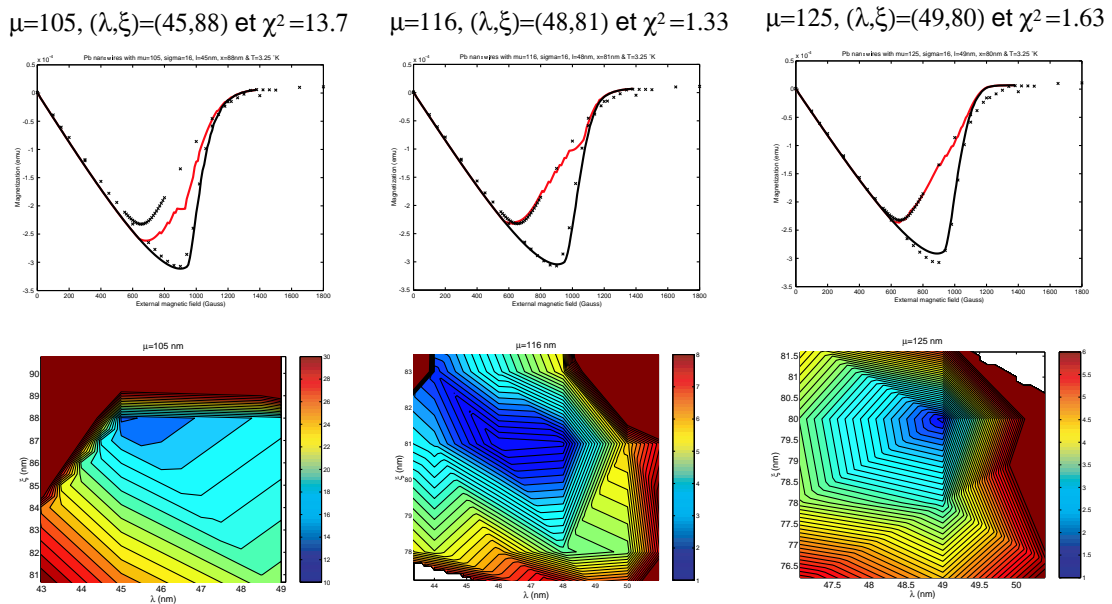


Figure 5.17— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes continues) d’un réseau de nanofils de plomb à $T = 3.25$ K pour trois moyennes différentes. De gauche à droite, μ vaut respectivement 105, 116 et 125 nm. Les valeurs des paramètres phénoménologiques valent alors respectivement $(\lambda, \xi) = (45, 88)$, $(48, 81)$ et $(49, 80)$ nm. Une augmentation de 10% sur la moyenne génère donc une variation de l’ordre de 4% sur λ et sur ξ . L’écart entre les données et la magnétisation théorique est quantifié par la valeur du χ^2 représentée sur ses trois projections dans l’espace des paramètres (λ, ξ) (trois dessins de ligne inférieure). Le minimum est atteint pour $\mu = 116$ nm, $\sigma = 16$ nm, $\lambda = 48$ nm et $\xi = 81$ nm.

valeurs sont alors fixées, et employées de façon unique pour les analyses aux températures plus élevées. Ensuite, les valeurs de $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ sont ajustées pour reproduire l’éventuelle hystérèse, le champ critique et la position du minimum des magnétisations expérimentales.

5.5 Analyse du deuxième échantillon, R120nm

La Figure 5.18 reprend toutes les magnétisations mesurées du second échantillon étudié. Contrairement au précédent, ce dernier a été électrodéposé en mode potentiel pulsé¹⁰. En référence à son rayon moyen déterminé par l’analyse, $\mu = 120$ nm, il sera dénommé “R120nm” dans la suite de ce chapitre.

5.5.1 Réponse paramagnétique de R120nm

Comme dans le premier échantillon, malgré la suppression de la cathode en or, une faible réponse paramagnétique ajoutée au signal diamagnétique des nanofils supraconducteurs apparaît. Pour substituer cette contribution, et obtenir donc le signal venant exclusivement des nanofils, une calibration linéaire de la réponse paramagnétique a été appliquée. Un ajustement par une droite¹¹ $M(B_{ext}) = \alpha + \beta B_{ext}$ fut donc réalisé sur tous les points ne présentant essentiellement qu’une réponse paramagnétique, c’est-à-dire pour $T > 7.2$ K ou $B_{ext} > B_{critique}$. La Figure 5.19 illustre graphiquement cette droite de calibration

¹⁰Pour rappel (voir section 5.1.1), avec $V = -0.39$ Volts pendant 100 ms et $V = -0.9$ Volts pendant 2 ms.

¹¹Avec $B_{ext} = H_{ext}$ dans les unités c.g.s. (Gauss).

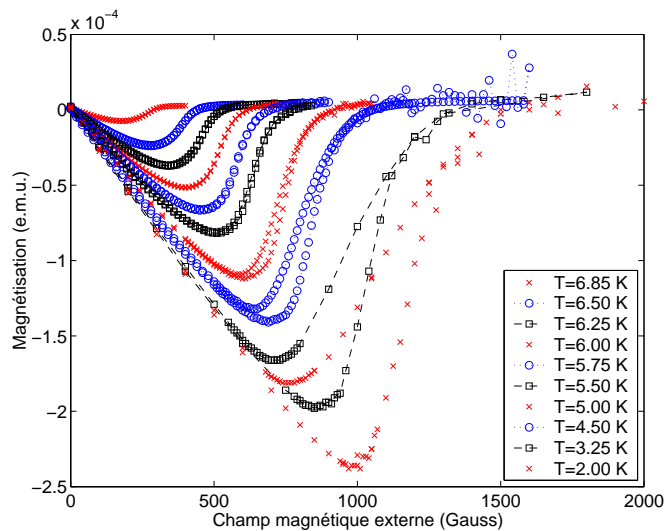


Figure 5.18— Mesures expérimentales (SQUID, Quantum Design, MPMS 5) de la magnétisation du second échantillon “R120nm” analysé. Toutes les températures expérimentalement étudiées sont représentées. De haut en bas, les magnétisations pour $T = 6.85, 6.5, 6.25, 6, 5.75, 5.5, 5, 4.5, 3.25$ et 2 K, en mode champs magnétiques externes croissant (courbe inférieure à température fixée) et décroissant (courbe supérieure).

pour l'échantillon “R120nm”. Les coefficients obtenus de la calibration sont $\alpha = 1.6 \times 10^{-6}$ emu et $\beta = 3.0 \times 10^{-9}$ emu/gauss.

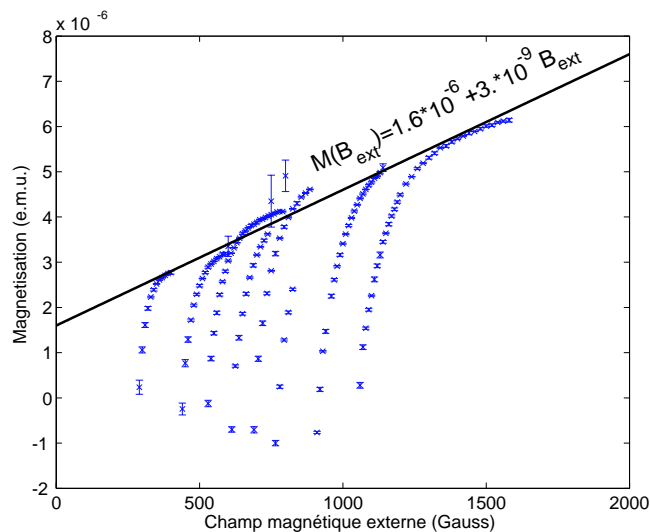


Figure 5.19— Droite de calibration de la réponse paramagnétique attachée à la membrane d'alumine de l'échantillon “R120nm”. Cette réponse paramagnétique est reproduite par la paramétrisation $M(B_{ext}) = 1.6 \times 10^{-6} + 3 \times 10^{-9} B_{ext}$ (emu).

5.5.2 Dispersion en rayon du réseau “R120nm”

Comme avec le premier échantillon, la dispersion en rayon a été également estimée lors de l’analyse de la magnétisation à $T = 3.25$ K. Le modèle (5.1) fournit et fixe alors la valeur des paramètres libres μ et σ à employer pour toutes les autres températures. Ces derniers ont été évalués à $\mu = 120$ nm et $\sigma = 15$ nm pour cet échantillon.

En parallèle, une vérification indépendante de ces deux quantités fut réalisée. Ce contrôle se base sur une analyse des photos prises au microscope électronique (Scanning Electronic Microscope, SEM) de matrices d’alumine (voir par exemple Figure 5.1) employées pour l’électrodéposition du plomb. Un programme¹² balaie alors ces images SEM’s et détermine le rayon moyen de chaque pore (zones foncées sur la Figure 5.1) par contraste avec l’alumine (zones claires sur la même image). Toutes les données sont ensuite regroupées dans un histogramme reprenant le nombre de pores scannés en fonction de leurs rayons calculés. Un ajustement par une gaussienne fournit par conséquent l’évaluation de la moyenne et de l’écart-type pour la dispersion en rayon des fils électrodéposés dans cette matrice analysée (voir Figure 5.20). En particulier, pour cet échantillon, on obtient,

$$\begin{cases} \mu = 121 \pm 1 \text{ nm}, \\ \sigma = 14 \pm 1 \text{ nm}. \end{cases}$$

L’estimation de l’erreur provient d’une étude de la variation de ces deux paramètres en fonction de la délimitation de la zone de contraste claire-foncée dans le programme TEMAnalyser.

Cette caractérisation est évidemment totalement indépendante de celle effectuée avec le modèle (5.1) à $T = 3.25$ K. L’analogie entre les résultats, $\mu = 120$ nm, $\sigma = 15$ nm avec (5.1) et $\mu = 121 \pm 1$ nm, $\sigma = 14 \pm 1$ nm avec TEMAnalyser, confirme les valeurs uniques fournies par notre modèle (5.1). Bien au delà de cet accord numérique, il confirme également les hypothèses invoquées lors de son élaboration.

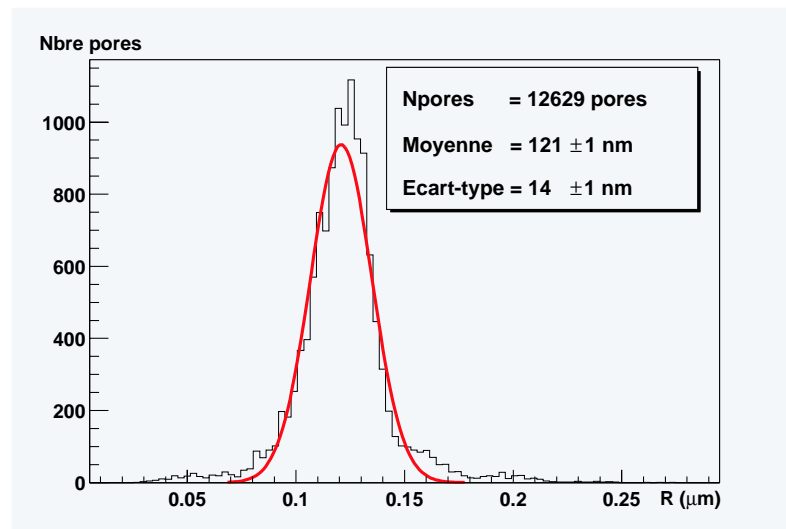


Figure 5.20— Histogramme du nombre de pores scannés par le programme TEMAnalyser en fonction de leur rayon associé (en μm). L’étude fut réalisée sur des sections de la membrane d’alumine servant de matrice pour l’électrodéposition des nanofils de plomb de l’échantillon “R120nm”. Au total, 12 629 pores ont été balayés par le programme. La courbe continue en gras représente un ajustement par une gaussienne de l’histogramme dont la moyenne μ et l’écart-type σ valent respectivement 121 ± 1 nm et 14 ± 1 nm.

¹²TEMAnalyser fut écrit et développé par Christophe Delaere (FYNU) en langage QT.

5.5.3 Courbes de magnétisation

Les paramètres libres associés au modèle (5.1) sont donc maintenant A , $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ avec $\mu = 120$ nm et $\sigma = 15$ nm. Pour les quatre plus hautes températures, les courbes expérimentales de magnétisation ne présentent aucune hystérèse et sont ajustées par des longueurs caractéristiques égalant les valeurs suivantes, $(\lambda(T), \xi(T)) = (125, 255), (92, 180), (83, 154), (72, 137)$ nm à $T = 6.85, 6.5, 6.25$ et 6 K respectivement. La Figure 5.21 représente graphiquement le résultat de ces ajustements. La sommation intervenant dans la construction de la magnétisation totale s'est bornée de $r_{initial} = \mu - 3\sigma$ à $r_{final} = \mu + 3\sigma$ par pas de 2 nm. Une construction affinée par pas de 1 nm ne modifie pas le graphe final, et n'est donc pas nécessaire.

Contrairement à l'analyse de l'échantillon "R116nm", le modèle 2D (contre 1D précédemment) fut employé pour générer les magnétisations individuelles $M(B_{ext}, r_i, \lambda(T), \xi(T))$ intervenant dans la sommation (5.1). Malgré l'invariance évidente sous rotation à ces échelles de longueurs, son utilisation permettra surtout de vérifier cette symétrie à plus basse température, c'est-à-dire aux plus faibles longueurs caractéristiques λ et ξ .

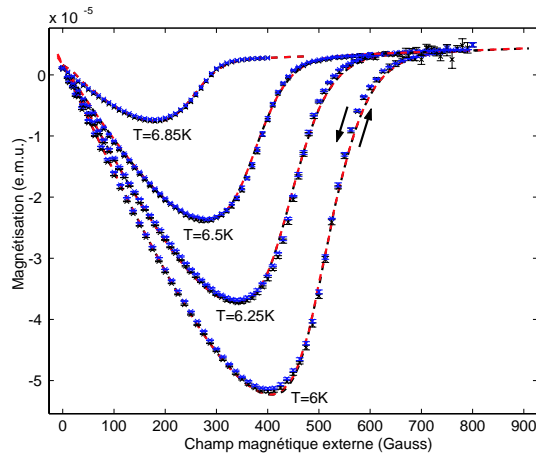


Figure 5.21— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes discontinues) d'un réseau de nanofils de plomb. De haut en bas, les courbes à $T = 6.85, 6.5, 6.25$ et 6 K sont représentées respectivement. Les valeurs des paramètres libres associés au modèle (5.1) valent respectivement $(\lambda, \xi) = (125, 255), (92, 180), (83, 154), (72, 137)$ nm où $\mu = 120$ nm et $\sigma = 15$ nm. Le modèle à deux dimensions fut employé pour étudier cet échantillon.

Pour ces températures relativement proches de T_c , on retrouve les mêmes propriétés physiques énumérées dans l'analyse de l'échantillon précédent. Sur le plan purement expérimental, aucun changement dans la magnétisation n'est visible au delà des marges d'erreur suivant le mode de progression du champ magnétique externe. Pour ce réseau de nanofils, les barres d'erreur fournies par le magnétomètre SQUID sont représentées sur les courbes de magnétisation. Une hystérèse devient par conséquent expérimentalement significative lorsque les deux magnétisations (en modes champs externe croissant et décroissant) prises à une même température se distinguent au delà des erreurs sur celles-ci. Pour $T > 6$ K, aucune hystérèse ne fut donc observée. Sur un plan théorique, son absence est à nouveau justifiée en injectant les valeurs des longueurs caractéristiques et de la dispersion en rayon dans un diagramme de Zharkov (Figure 5.22). Pour $T > 6$ K, seule une minorité, voire aucun fil du réseau à $T > 6.5$ K, ne présente un comportement d'hystérèse pour l'état Meissner $L = 0$. Il apparaît également clairement sur cette même figure que des états de vorticité plus élevée ($L \geq 1$) sont totalement inexistantes dans ces nanofils. Le modèle 2D, sans contrainte justement sur L , est resté dans l'état Meissner tout au long des processus de résolution des équations de GL par minimisation, et ce en champs magnétiques externes croissant et décroissant.

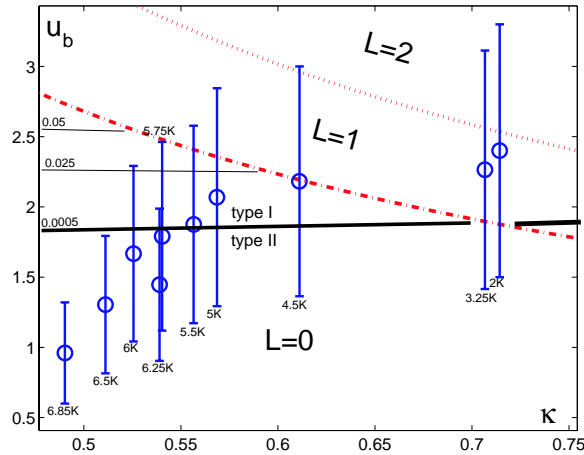


Figure 5.22— Représentation graphique dans le diagramme de Zharkov des dispersions en rayon et des paramètres κ déterminés pour reproduire les données expérimentales de magnétisation à toutes les températures expérimentalement étudiées. Pour $T > 6$ K, seule une minorité, voire aucun rayon, rencontrée dans la dispersion ne produit un comportement d’hystérèse dans l’état Meissner. Par contre, pour $T = 5.75$ K et 5.5 K, plus de la moitié en présente un. Enfin, pour $T < 5$ K, les états de vorticité plus élevée, $L \neq 0$, sont permis, et accroissent significativement l’hystérèse observée.

En diminuant la température, les paramètres phénoménologiques continuent   décroître, et atteignent des valeurs engendrant un phénomène d’hystérèse lorsque $T < 5.75$ K. Pour $T = 5.75$ et 5.5 K, la majorité des rayons constituant le réseau sont inclus dans une zone du diagramme de Zharkov où l’hystérèse de $L = 0$ est non négligeable (voir Figure 5.22, $T = 5.75$ et 5.5 K). De plus, les résultats numériques issus du modèle   deux dimensions reproduisent ce comportement. Les valeurs des champs de transition, B_{cup}^I et B_{cdown}^I ne doivent par conséquent plus être imposées. Le processus de résolution (voir chapitre 4) détermine lui-même au travers de la technique de minimisation de l’énergie, pour quelles valeurs en champ les transitions doivent s’opérer. En particulier ici, B_{cup}^I et B_{cdown}^I sont distincts suivant le mode de croissance du champ externe appliqué au cylindre (voir l’agrandissement dans la Figure 5.27 supérieure). La Figure 5.23 illustre le résultat de l’ajustement où les traits en noir (rouge) représentent la magnétisation théorique totale en champ magnétique externe croissant (décroissant). Par rapport   l’échantillon précédent, notons enfin que l’hystérèse est moins prononcée. Ce résultat expérimental est en accord avec les faibles courbes de niveau rencontrées sur le diagramme de Zharkov par la dispersion en rayon de nanofils. Pour rappel, la largeur dans les unités physiques de l’hystérèse, ΔB_c , est donnée par le produit $CN(u_b, \kappa) \times B_\lambda$, où $CN(u_b, \kappa)$ est la valeur mentionnée par les courbes de niveau, et $B_\lambda = \Phi_0 / (2\pi\lambda^2)$ est la normalisation du champ. En l’occurrence ici,   $T = 5.75$ K, $\Delta B_c < 0.04 \times 733 = 29$ Gauss. Cette faible largeur, intervenant avec un poids $\alpha(r_i, \mu, \sigma)$ négligeable dans la sommation (5.1), génère bien une infime hystérèse expérimentale. Sur base de ces constats théoriques, il n’est donc pas étonnant que le nouvel échantillon, contrairement au précédent, témoigne peu du caractère type-I de l’ tat Meissner. C’est la raison pour laquelle un rayon plus élevé que la moyenne $\mu = 120$ nm, a été choisi pour représenter cette propriété   $T = 5.5$ K dans le diagramme de phase récapitulatif de la Figure 5.27.

Pour conclure cette section consacrée   l’hystérèse de l’ tat Meissner, la Figure 5.24 propose une comparaison des résultats obtenus avec les deux modèles (1D et 2D) pour l’échantillon précédent ‘‘R116nm’’   $T = 5.75$ K. L’objectif est évidemment de vérifier l’accord entre les deux solutions pour reproduire l’hystérèse attachée   l’ tat Meissner. Les traits continus et discontinus (Figure 5.24) représentent respectivement les résultats théoriques issus des modèles 1D et 2D. Un accord, endéans 1% de marge d’erreur, a été obtenu avec ces deux prédictions phénoménologiques. Ce constat valide bien sûr l’utilisation de ces deux modèles pour l’analyse des magnétisations expérimentales.

A plus basse température, $T \leq 5$ K, le comportement d’hystérèse s’accroît. En se basant   nouveau sur

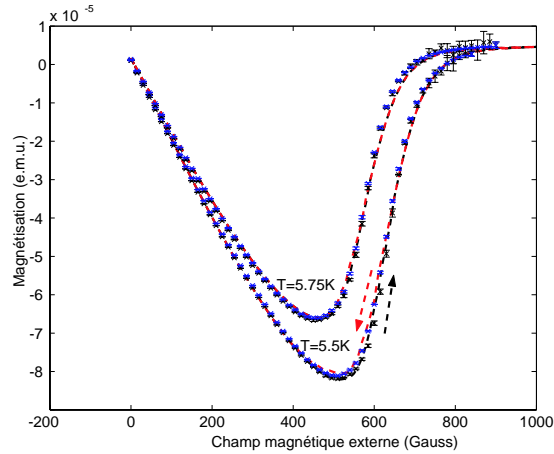


Figure 5.23— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (lignes discontinues) d’un réseau de nanofils de plomb. De haut en bas, les courbes à $T = 5.75$ K et 5.5 K sont représentées respectivement. Les valeurs des paramètres libres associées au modèle (5.1) valent respectivement $(\lambda, \xi) = (67, 124)$, $(64, 115)$ nm où $\mu = 120$ nm et $\sigma = 15$ nm. Contrairement à l’analyse de l’échantillon “R116nm”, le comportement d’hystérèse apparaît suivant le mode de croissance imposé au champ externe lors de la résolution des équations de GL avec le modèle 2D. Les traits en noir (rouge) représentent le résultat de la magnétisation totale en champ magnétique externe croissant (décroissant).

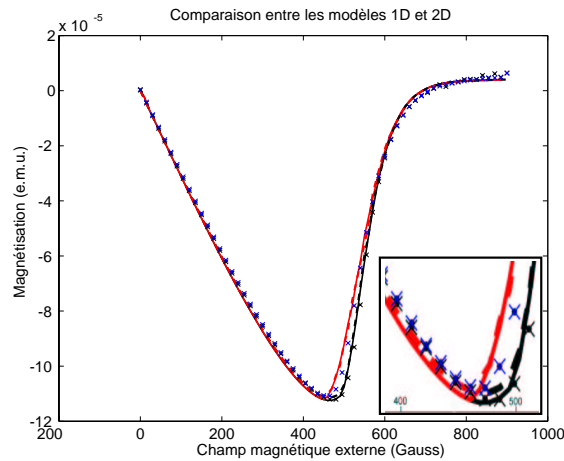


Figure 5.24— Comparaison entre la magnétisation expérimentale (marqueurs) et théorique (lignes claires et foncées) de l’échantillon “R116nm” à $T = 5.75$ K. Les traits continus et discontinus sont issus des modèles 1D et 2D respectivement. Les courbes en gris foncé (gris clair) représentent les résultats de la magnétisation totale en champ magnétique externe croissant (décroissant) avec (sans pour 2D) introduction des champs de transition B_{cup}^I et B_{down}^I pour le modèle 1D. Un agrandissement (sous-figure en bas à droite) autour du minimum de la magnétisation permet de distinguer les deux courbes. Pour rappel, les valeurs des paramètres libres associées au modèle (5.1) valent $(\lambda, \xi) = (58, 139)$ nm où $\mu = 116$ nm et $\sigma = 16$ nm. Les deux résultats théoriques sont identiques endéans 1% de marge d’erreur.

le diagramme (Figure 5.22), des états de vorticité plus élevée se manifestent pour les plus grands rayons dans la dispersion gaussienne. Contrairement à l’échantillon précédent, à $T = 3.25$ K, des solutions de type **GiantVortex** avec un nombre d’enroulement $L = 2$ apparaissent déjà. A $T = 2$ K, la vorticité peut

atteindre $L = 3$ pour les rayons supérieurs à 162 nm, donc compris dans la dispersion $[\mu - 3\sigma, \dots, \mu + 3\sigma]$. Ces solutions renforcent évidemment l'hystérèse expérimentalement observée.

Les figures **a)** et **b)** de la magnétisation totale en fonction du champ externe appliqué (Figure 5.25) montrent le résultat de ajustements aux quatre plus basses températures étudiées. L'existence d'une barrière

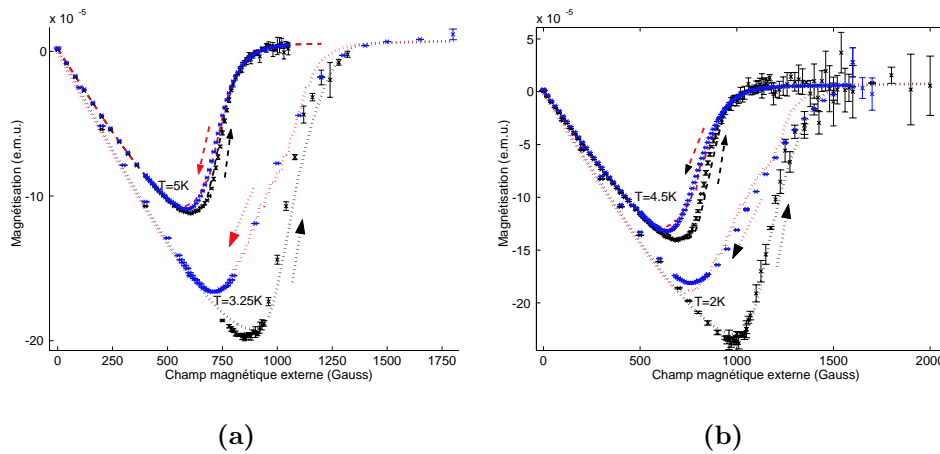


Figure 5.25— Comparaison entre les magnétisations expérimentales (marqueurs) et théoriques (traits) d'un réseau de nanofils de plomb. En **a)**, de haut en bas, les courbes à $T = 5$ et 3.25 K, et en **b)** à $T = 4.5$ et 2 K, sont représentées respectivement. Les valeurs des paramètres libres associés au modèle (5.1) valent respectivement à $T = 5, 4.5, 3.25$ et 2 K: $(\lambda, \xi) = (58, 102), (55, 90), (53, 75), (50, 70)$ nm avec $\mu = 120$ nm et $\sigma = 15$ nm.

de potentiel entre les états quantiques de différentes vorticités renforce le comportement d'hystérèse. En champ magnétique externe décroissant, les états $L \neq 0$ peuvent subsister dans un état métastable jusqu'au point minimum de leur énergie libre. A cette valeur, la magnétisation est nulle, et une transition de premier ordre s'opère en perdant une unité de quantum de flux, $L \rightarrow L - 1$. En tenant compte de cette barrière de Bean-Livingston, l'hystérèse théoriquement reproduite est néanmoins trop forte. Ce résultat, déjà rencontré pour l'échantillon précédent, nous avait conduit alors à définir un paramètre supplémentaire, ΔB_t . Ce dernier contraint les cylindres à transiter plus rapidement que la prévision théorique. Quoiqu'assez faible pour "R116nm", plus précisément inférieur à 7.5% par rapport au champ critique du réseau, ce paramètre devient significatif dans cet échantillon. Avec des valeurs de l'ordre de 270 (18% du H_c), 220 (18%), 150 (15%) et 110 (12%) Gauss à $T = 2, 3.25, 4.5$ et 5 K respectivement, ce paramètre libre supplémentaire au modèle initial (5.1) dépasse largement les 7.5% préalablement obtenus. Cependant, malgré cet accroissement, la transition s'effectue toujours entre le point de croisement des courbes d'énergie libre $\mathcal{E}_{L=0}$ et $\mathcal{E}_{L=1}$ et la position de la transition théorique définie au minimum de l'énergie libre, $B_{ext}^{L=1 \rightarrow 0}$. Aucune contrainte supplémentaire n'a été ajoutée pour les transitions survenant entre les états $L = 2 \rightarrow L = 1$ et $L = 3 \rightarrow L = 2$. Une illustration graphique de l'influence du paramètre ΔB_t sur la magnétisation totale est reprise sur la Figure 5.26.

Les trois comportements distincts mis en évidence dans l'analyse du premier échantillon apparaissent à nouveau dans cette étude. Notons néanmoins que l'hystérèse associée à l'état Meissner $L = 0$ est plus faible dans ces nanofils possédant un plus grand rayon moyen et surtout, de plus importantes valeurs phénoménologiques κ . Par analogie avec la section 5.3.3, la Figure 5.27 reprend les trois propriétés magnétiques distinctes propres à la magnétisation mésoscopique. Pour rappel, on y retrouve

- la transition du second ordre autour du champ critique pour les plus hautes températures (ou encore aux plus faibles rayons normalisés, $u_b(T) = R/\lambda(T)$) (Figure 5.27, graphes à $T = 6.85$ K);
- la transition du premier ordre, accompagnée d'un comportement d'hystérèse, pour les températures intermédiaires. Seul l'état Meissner contribue à cette propriété irréversible autour de la transition

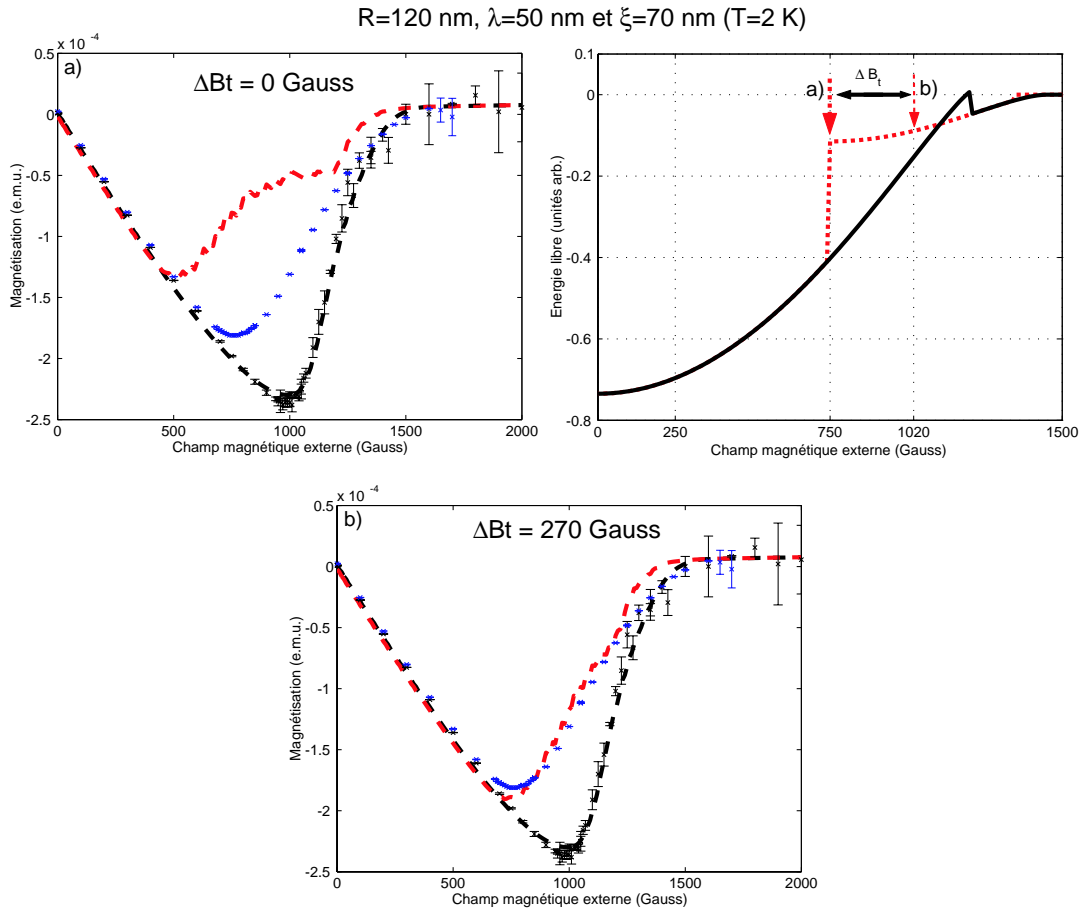


Figure 5.26— Influence du paramètre ΔB_t sur la magnétisation totale. La figure supérieure droite représente l'énergie libre d'un cylindre de rayon $R = \mu = 120 \text{ nm}$, avec $\lambda = 50 \text{ nm}$ et $\xi = 70 \text{ nm}$, c'est-à-dire les valeurs des paramètres phénoménologiques employées pour reproduire l'expérience à $T = 2 \text{ K}$. L'absence de ce facteur supplémentaire conduit à une hystérèse trop forte comparée aux données expérimentales (graphe supérieur gauche). Par contre, pour $\Delta B_t = 270 \text{ Gauss}$, la magnétisation expérimentale en champ magnétique décroissant est reproduite (graphe inférieur). Les flèches sur le diagramme d'énergie libre en fonction du champ externe appliqué indiquent les valeurs théoriques en **a)** et ajustées en **b)** du champ de transition $B_{c_{down}}^{L=1 \rightarrow 0}$.

normal \leftrightarrow supraconducteur (même figure, graphes à $T = 5.5 \text{ K}$);

- la présence de vortex magnétiques pour les plus basses températures. La barrière de potentiel de Bean-Linvington favorise la métastabilité des états de vorticité non nulle, et accentue le comportement d'hystérèse de ces échantillons mésoscopiques (même figure, graphes   $T = 2 \text{ K}$).

5.5.4 Nombres de nanofils

Pour terminer l'analyse de cet échantillon, ajoutons que le paramètre libre A de modèle (5.1), attaché au nombre de nanofils présents dans le réseau, n'excède pas les 6% de variations par rapport   sa valeur moyenne N_{moy} . En particulier, par la relation $N = A/(h\Phi_0)$, où la hauteur de fils a été estimée  

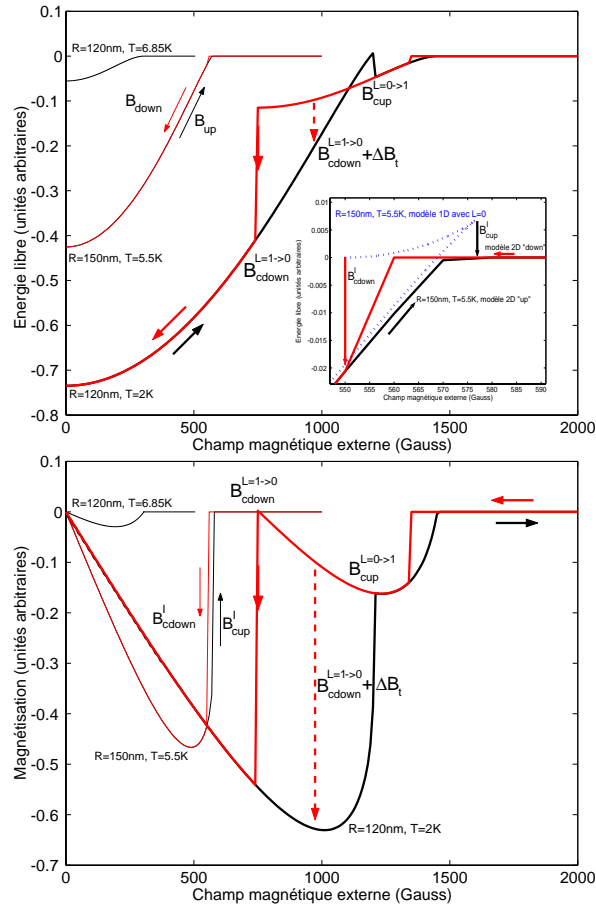


Figure 5.27— L'énergie libre (figure supérieure) et la magnétisation (figure inférieure) pour un cylindre de hauteur infinie de rayon $R = \mu = 120$ nm à $T = 6.85$ K et $T = 2$ K, et $R = 150$ nm à $T = 5.5$ K, en fonction du champ magnétique externe appliqué (Gauss). Tous ces résultats sont issus du modèle 2D. Les courbes en noir (rouge) ont été générées en mode champ magnétique externe croissant (décroissant), avec les valeurs des paramètres phénoménologiques employées pour reproduire à ces températures les données expérimentales. Un rayon plus élevé que la valeur moyenne $\mu = 120$ nm a été choisi pour $T = 5.5$ K de façon à mettre en évidence l'hystérèse de $L = 0$. La sous-figure dans le graphe supérieur est un agrandissement de cette hystérèse autour du champ critique. Le résultat issu du modèle 1D y est également représenté (courbe en pointillés), confirmant les valeurs choisies par le modèle 2D pour les transitions en champs magnétiques externes croissant (B_{cup}^I) et décroissant (B_{cdown}^I). Les flèches indiquent les différents champs de transition présents dans cet échantillon. Ce diagramme montre alors clairement les trois comportements principaux rencontrés dans la magnétisation à l'échelle mésoscopique.

$h = 20 \times 10^{-4}$ cm, ce nombre moyen vaut,

$$N_{moy} \approx 1. \times 10^6 \text{ nanofils.}$$

La Figure 5.28 montre la dépendance en température de ce paramètre d'amplitude ajusté pour reproduire les magnétisations totales expérimentales.

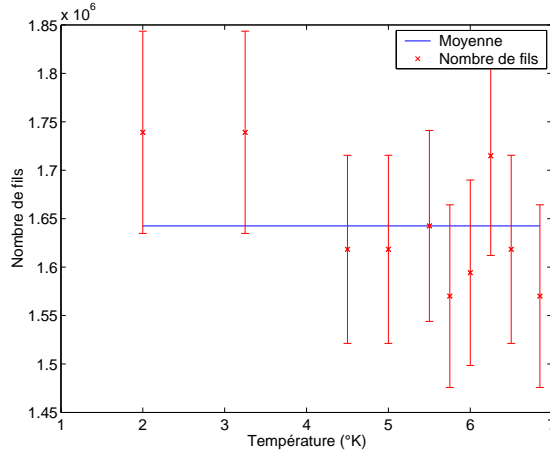


Figure 5.28— Valeurs des nombres de fils employés (croix) en fonction de la température pour ajuster le modèle (5.1) aux magnétisations expérimentales. La ligne continue représente leur valeur moyenne, $N_{moy} \approx 1.64 \times 10^6$. Toutes les amplitudes obtenues ne s'écartent pas de plus de 6% (barres d'erreur) par rapport à cette moyenne.

5.6 Barrière de Bean-Livingston

Pour étudier la barrière de Bean-Livingston dans un cylindre mésoscopique de hauteur infinie, la démarche envisagée ici propose “simplement” d’analyser l’énergie libre d’un vortex d’Abrikosov se déplaçant selon la coordonnée radiale r . En fonction des paramètres phénoménologiques λ et ξ , et du rayon R du cylindre, cette énergie devrait indiquer pour quelle valeur en champ externe appliqué la position d’un vortex au centre d’un cylindre devient instable. Par analogie avec un ressort, l’objectif est de déterminer le champ magnétique (la force appliquée sur un ressort), en deçà (au delà) duquel le vortex (le ressort) ne peut plus revenir vers sa position d’équilibre au centre du cylindre, mais est expulsé (le ressort casse).

Pour rappel (voir chapitre 4), toute l’information topologique sur la configuration de vortex est contenue dans la phase $\theta(u, \phi)$ associée au paramètre d’ordre $\psi(u, \phi) = f(u, \phi)e^{i\theta(u, \phi)}$ de la théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau. Soit la paramétrisation complexe du plan (u, ϕ) ,

$$z = ue^{i\phi}, \quad z^* = ue^{-i\phi},$$

et une collection de K vortex, $k = 1, \dots, K$, de positions $z_k = u_k e^{i\phi_k}$ dans le plan (u, ϕ) , et de vorticités respectives L_k . Cette topologie de vortex peut être construite par la fonction $\theta(u, \phi)$,

$$\theta(u, \phi) = \frac{1}{2}i \sum_{k=1}^K L_k \ln\left(\frac{z - z_k}{z^* - z_k^*}\right). \quad (5.3)$$

Les intégrales de contour intervenant dans la détermination des vorticités, $L[\mathcal{C}] = \oint_{\mathcal{C}} \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l}$, donneront avec ce choix de fonction θ (5.3) les valeurs désirées.

A titre d’exemple, la phase associée à un vortex centré à l’origine, de vorticité L s’écrit alors,

$$\begin{aligned} \theta(u, \phi) &= \frac{1}{2}i \ln\left(\frac{z}{z^*}\right), \quad \text{puisque } u_k = 0, \\ &= -L\phi. \end{aligned}$$

Cette description correspond bien à la formulation généralement employée pour étudier les états du type “GiantVortex”, où

$$\psi(u, \phi) = f(u)e^{-iL\phi}.$$

Un vortex de vorticit e L_p centrée en $(u = u_p, \phi = 0)$ sera par cons equent d ecrit au travers de la phase,

$$\theta(u, \phi) = \frac{1}{2}iL_p \ln\left(\frac{ue^{i\phi} - u_p}{ue^{-i\phi} - u_p}\right). \quad (5.4)$$

La r esolution des  equations de GL avec la phase θ impos ee est alors identique  a la proc edure de minimisation d ecrite au chapitre 4,  a la diff erence que l'espace des configurations dans lequel l' energie libre (4.5) doit être optimis ee devient $f(u, \phi)$, $a_u(u, \phi)$ et $a_\phi(u, \phi)$.

La Figure 5.29 exhibe le comportement magn etique (graphe **(b)**), l'amplitude du param etre d'ordre (graphe **(a)**) et la phase (sa projection dans le plan (u, ϕ)) impos ee (graphe **(c)**) pour d ecrire un vortex d'Abrikosov $L = 1$ localisée en $(r = 25 \text{ nm}, \phi = 0)$ dans un cylindre de 120 nm de rayon. Les param etres ph enom enologiques choisis, $(\lambda, \xi) = (50, 70)$ nm correspondent   ceux employées pour reproduire la magn etisation exp erimentale   $T = 2$ K de l' echantillon "R120nm". La projection dans le plan (u, ϕ) du champ magn etique et le courant  lectromagn etique $\vec{J}(u, \phi) = f^2((u, \phi))\vec{j}(u, \phi)$ sont également repr esent es sur cette figure (graphe **(d)**). La pr esence du vortex fait apparaître un courant circulant dans le sens trigonom etrique, g en erateur de l'induction magn etique pi eg ee par le tube de flux. Sur le bord externe, un courant affluant dans le sens r etrograde écrante l'induction externe appliqu ee. La sym etrie sous rotation selon l'axe \hat{e}_z est bris ee, et un courant circulant dans le sens r etrograde apparaît également sur la moiti e gauche du plan (u, ϕ) . Pour éviter toute confusion, ce dernier ne correspond évidemment pas   la pr esence d'un anti-vortex. Le nombre d'enroulement L associée   un chemin fermée entourant ce pr esum e vortex est en effet nul (et discr edite donc son existence).

En étudiant l' energie libre en fonction de la position de ce vortex et du champ externe appliquée, on est en mesure de d ecrire la barri ere de potentiel (Bean-Livingston) retardant son expulsion [63]. La Figure 5.30 illustre cette description. En mode champ magn etique externe d ecroissant,   la transition normal \leftrightarrow supraconducteur, le syst eme capture un vortex d'Abrikosov pour $R = 120$ nm, $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm (voir Figure 5.27, graphe   $T = 2$ K). Tant que B_{ext} reste sup erieur   750 Gauss, c'est- a-dire la position du minimum de l' energie libre $\mathcal{E}_{L=1}$, une barri ere de potentiel emp eche l'expulsion de ce vortex centrée   l'origine (Figure 5.30, graphes pour $B_{ext} = 1200, 1000$ et 800 Gauss). Par contre, au del a de ce point, l' energie libre d ecro t en fonction de la position du vortex (m eme figure, graphe pour $B_{ext} = 600$ Gauss). La pr esence d'un vortex au centre du cylindre devient alors instable, et une transition du premier ordre apparaît dans la magn etisation.

La pr esente description ne tient évidemment pas compte de l'aspect dynamique de la transition entre ces deux  tats de vorticit es diff erentes. En particulier, aucun temps caract eristique associée   l'expulsion n'est fourni par la pr esente mod elisation num erique. N eanmoins, elle permet d'estimer la valeur du champ de transition $B_{cdown}^{L=1 \rightarrow 0}$.

La derni ere analyse propose une comparaison avec les travaux du groupe du Professeur F. Peeters [44] sur la barri ere de Bean-Livingston dans des disques supraconducteurs d'épaisseur finie d . Quoique les r esultats soient évidemment quantitativement diff erents, il n'en est rien sur les conclusions associ ees   cette barri ere de potentiel entre les  tats de vorticit e voisine d'une unit e de quantum de flux (L et $L + 1$). Le graphe sup erieur de la colonne centrale (Figure 5.31) montre   nouveau les énergies libres des  tats $L = 0$ et $L = 1$ en fonction du champ magn etique externe appliquée. Sur cette m eme figure, la courbe en pointillées repr esente l'enveloppe des traits verticaux de la figure pr ecedente. Il s'agit donc, en fonction du champ magn etique externe appliquée, de l' energie libre maximale rencontr ee lorsque le vortex d'Abrikosov est d eplac e sur l'axe radial, $\mathcal{E}_{max}(r_p, B_{ext})$. Comme il a  t e mentionnée pr ecedemment, ce maximum survient seulement lorsque B_{ext} est compris entre 750 et 1200 Gauss. En de a, l' energie de l' etat $L = 1$ est sup erieure   celle d'un vortex d eplac e par rapport   sa position centrale dans le cylindre, $\mathcal{E}_{L=1}(B_{ext} < 750\text{G}) > \mathcal{E}(r_p \neq 0, B_{ext} < 750\text{G})$. La configuration d ecrivant un vortex d'Abrikosov est alors instable, et une transition vers l' etat Meissner s'op ere.

Faisant fi de toute l'étude pr ecedente, il aurait  t e *a priori* naturel d'invoquer les transitions de $L = 1 \rightarrow L = 0$ et son inverse de $L = 0 \rightarrow L = 1$ au point de croisement, $B_{ext} \approx 1100$ Gauss, des énergies libres associ ees   ces deux  tats. Le syst eme, en fonction du champ externe appliquée, opte alors pour la configuration magn etique qui minimise son  energie libre. Cependant, le passage d'une configuration   l'autre au moyen de la capture ou de l'expulsion d'un vortex d'Abrikosov [64], laisse apparaître comme

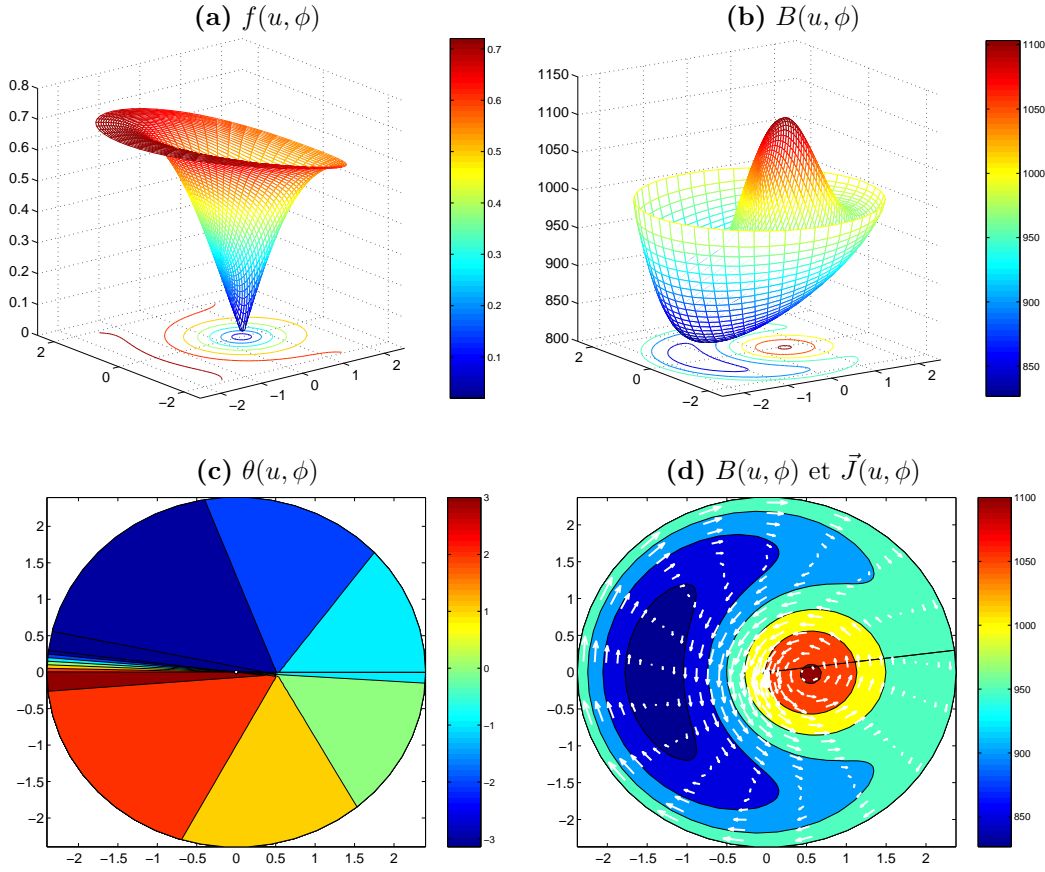


Figure 5.29—Cylindre de rayon $R = 120$ nm, de paramètres phénoménologiques $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm, soumis à un champ magnétique externe $B_{ext} = 1000$ Gauss. De gauche à droite et de haut en bas, représentations graphiques des solutions de $f(u, \phi)$, $B(u, \phi)$, $\theta(u, \phi)$ et $\vec{J}(u, \phi)$ pour un vortex d'Abrikosov ($L = 1$) centré en $r = 25$ nm ($u = 25/50 = 0.5$). Pour générer ce genre de solution, la phase θ a été imposée au travers de la relation (5.3).

on vient de l'étudier, une barrière de potentiel entre ces deux états. Cette dernière est dessinée sur la figure centrale (Figure 5.31). Pour $750 < B_{ext} < 1100$ gauss, l'expulsion d'un vortex d'Abrikosov ne peut se faire sans franchir une barrière de potentiel, $\mathcal{E}_{BL} = \mathcal{E}_{max}(r_p, B_{ext}) - \mathcal{E}_{L=1}$. Lorsque B_{ext} est compris entre 1100 et 1200 Gauss, l'état fondamental devient $L = 1$, mais le déplacement d'un vortex d'Abrikosov lors de sa capture pour atteindre cet état s'accompagne également d'une augmentation de l'énergie libre. Une barrière de potentiel, $\mathcal{E}_{BL} = \mathcal{E}_{max}(r_p, B_{ext}) - \mathcal{E}_{L=0}$, présente jusqu'à $B_{ext} = 1200$ Gauss, retarde donc la capture du vortex, et maintient l'effet Meissner dans un état métastable. Cette description justifie par conséquent les définitions fournies dans l'analyse des nanofils de plomb des deux champs de transition $B_{cdown}^{L=1 \rightarrow 0}$ et $B_{cup}^{L=0 \rightarrow 1}$.

La figure inférieure décrit la position du vortex par rapport à l'origine $r = 0$ lorsque l'énergie maximale $\mathcal{E}_{max}(r_p, B_{ext})$ est atteinte. Le rapprochement avec les travaux du Professeur F. Peeters[44] est alors immédiat puisque l'enveloppe dessinée sur la figure supérieure montre bien un vortex se déplaçant de sa position centrale à $B_{ext} = 750$ Gauss, vers son expulsion à $B_{ext} = 1200$ Gauss. Les figures latérales exhibent ce constat. Elles correspondent aux solutions $f(u, \phi)$ décrivant l'enveloppe. On y voit alors clairement un vortex sortant (entrant) lorsque le champ appliqué augmente (diminue). Notons enfin que les simulations numériques sur un maillage de 50×50 points dans le plan (u, ϕ) , limitent la position d'un vortex ($r_p = r_i$) entre $r_i = 0$ ($i = 0/50$) et $r_i = 105$ nm ($i = 44/50$), puisque au delà, la topologie imposée

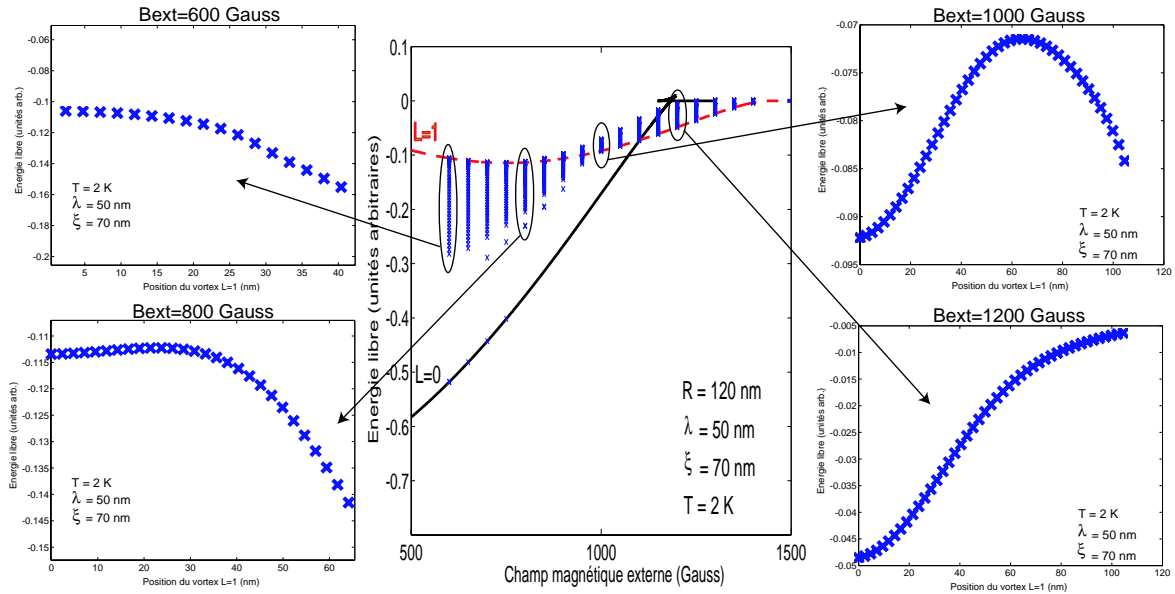


Figure 5.30— Le graphe central décrit l'énergie libre des états $L = 0$ (traits continus) et $L = 1$ (traits discontinus) pour un cylindre de rayon $R = 120$ nm, et de paramètres phénoménologiques $\lambda = 50$ nm et $\xi = 70$ nm. Les traits verticaux (croix) sur le même graphe représentent la projection dans ce plan de l'énergie libre en fonction de la position r_p d'un vortex d'Abrikosov soumis au champ magnétique externe repris en abscisse. Cette même description, non projetée, est reprise sur les quatre figures latérales. Pour $B_{ext} \geq 750$ Gauss, une barrière de potentiel empêche l'expulsion du vortex centré alors à l'origine du cylindre. En mode champ magnétique décroissant, le système va par conséquent subsister dans cet état métastable jusqu'au champ de transition $B_{cdown}^{L=1 \rightarrow 0} = 750$ Gauss. La barrière de Bean-Livingston disparaît, et rend alors instable la présence du vortex. L'énergie libre diminue alors en fonction de son expulsion (graphe supérieur gauche).

devient instable numériquement. Une discrétisation plus affinée du maillage, coûteuse en temps calcul, aurait été nécessaire pour simuler des positions de vortex proches du rayon R du cylindre.

5.7 Résumé

Les magnétisations de deux réseaux de nanofils de plomb électrodéposés ont été analysées. Un modèle, négligeant l'interaction magnétique entre ces nanofils, supposant une distribution gaussienne pour leur rayon et incluant la résolution des équations de Ginzburg-Landau (GL), fut développé. En ajustant les paramètres libres de cette modélisation, en particulier la moyenne μ , l'écart-type σ de la distribution, et les deux paramètres phénoménologiques λ et ξ attachés à la théorie de GL, les magnétisations expérimentales ont pu être reproduites endéans 10% de marge d'erreur. L'analyse du premier échantillon incluait la résolution numérique des équations à symétrie cylindrique (modèle 1D). La seconde, par contre, adoptait une démarche plus générale en utilisant les résultats du modèle 2D. Cette étape a permis entre autre de rejeter l'existence de solutions du type MultiVortex dans l'échantillon étudié, et a constitué par conséquent un test sur l'hypothèse de symétrie axiale invoquée lors de l'utilisation du modèle 1D. Le modèle 2D fut également invoqué pour sonder la présence ou non d'une barrière de potentiel (Bean-Livingston) à l'échelle mésoscopique entre les états quantiques de vorticités différentes. Malgré un accord théorique avec des résultats précédemment établis [44], il semble néanmoins que cette barrière soit moins effective dans l'expérience. L'ajout d'un paramètre libre supplémentaire, ΔB , palie à cette différence.

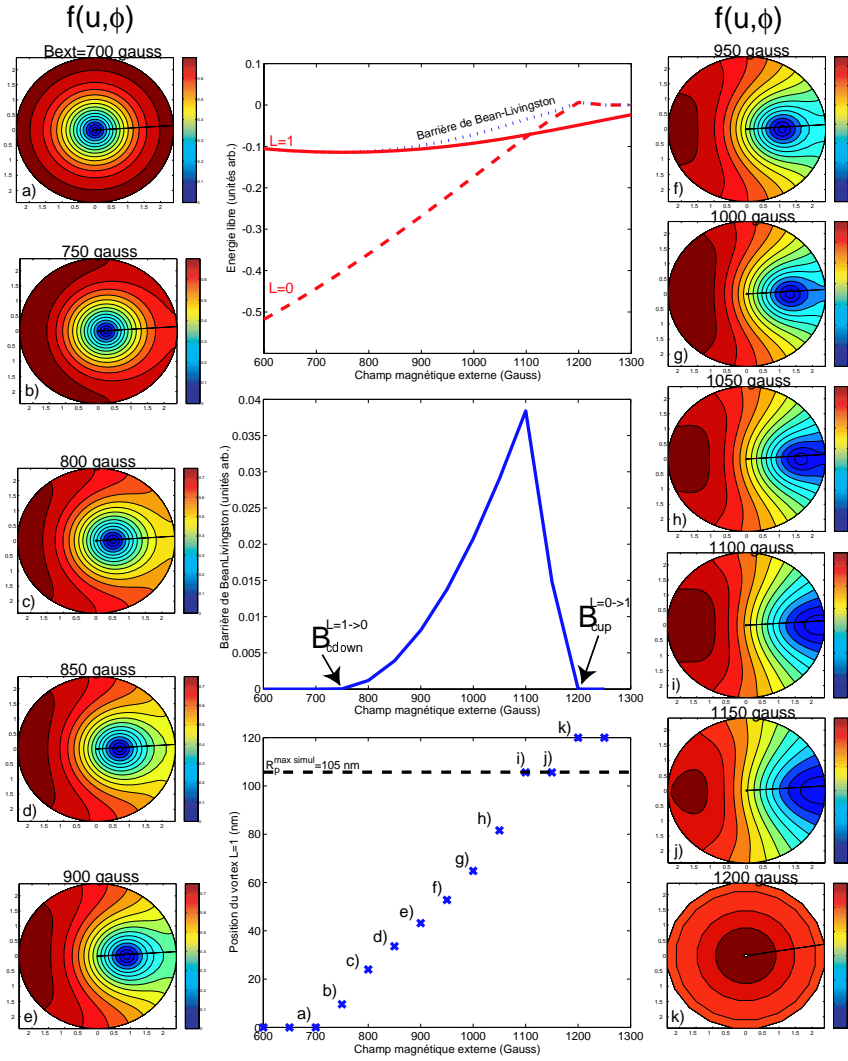


Figure 5.31— De haut en bas, les trois figures centrales représentent 1) l'énergie libre des états $L = 0$ (traits discontinus), $L = 1$ (trait continu) et du maximum de $\mathcal{E}(r_p, B_{ext})$ (trait en pointillés), 2) la barrière de Bean-Livingston et 3) la position r_p du vortex d'Abrikosov pour laquelle l'énergie libre $\mathcal{E}(r_p, B_{ext})$ est maximale. Ces trois graphes sont fonction du champ magnétique externe appliqué (Gauss). Les figures latérales **a**-**k**), exhibent la configuration de l'amplitude $f(u, \phi)$ du paramètre d'ordre correspondant aux différentes énergies libres maximales, $\mathcal{E}(r_p, B_{ext})$, déterminées en fonction du champ externe appliqué.

Trois types de comportement déjà mis en évidence par l'expérience de Geim [32] sur des disques mésoscopiques ont également été révélés. Ce constat, confirmé par l'expérience, insiste sur le comportement non trivial de la frontière entre les deux types de transition, type-I et -II, à l'échelle mésoscopique [40]. Le point dual, $\kappa_c = 1/\sqrt{2}$ établi dans des échantillons macroscopiques, cède sa place à une fonction complexe dépendant du rayon normalisé du cylindre $u_b = \frac{R}{\lambda}$, et de la vorticité L de la solution envisagée: $\kappa_c = f(u_b, L)$. En changeant la température de l'échantillon étudié dans un magnétomètre SQUID, le paramètre phénoménologique κ et le rayon normalisé u_b sont modifiés. Cette démarche permet alors, au même titre qu'une modification de la géométrie (le rayon R par exemple) de l'échantillon, d'examiner les trois types de comportement magnétique: type-II pour les petits rayons normalisés u_b , type-I dans l'état Meissner pour les rayons intermédiaires, et à nouveau type-II, avec une succession de transitions

du premier ordre dans l'état supraconducteur, pour les plus grands rayons. Il est important de spécifier que l'absence de sauts dans la magnétisation, normalement présents aux plus basses températures, ou encore pour les plus grands rayons normalisés, est expliquée par la dispersion (σ) importante des rayons des nanofils constituant le réseau. Dans la limite où σ tend vers zéro, ces discontinuités attachées au changement de vorticité apparaissent dans nos simulations, mais elles ne sont pas encore accessibles expérimentalement. Notons enfin que la détermination du rayon moyen μ et de l'écart-type σ issus de notre investigation est confirmée par une analyse indépendante de ces derniers. Ce constat, en plus des résultats concluants obtenus dans le prochain chapitre, est un indice de confiance important pour la validité du modèle (5.1) développé.

L'étude de la dépendance en température des paramètres phénoménologiques déterminés pour ces deux échantillons, en particulier leur dépendance avec la valeur du libre parcours moyen, est abordée dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Dépendance en température des paramètres phénoménologiques λ et ξ du plomb

La longueur de pénétration λ est un paramètre fondamental de la supraconductivité. Sa valeur est directement reliée à la densité de paires de Cooper et sa dépendance en température, $\lambda(T)$ peut fournir des informations importantes sur les symétries du gap d'énergie (ondes -s ou -d) [65], ou encore sur le couplage électron-phonon intervenant dans le mécanisme d'appariement [66].

L'objectif du présent chapitre sera d'identifier la dépendance en température des paramètres phénoménologiques de Ginzburg et Landau, et d'extrapoler leurs valeurs à zéro kelvin. Une estimation du libre parcours moyen pourra alors être fournie.

6.1 Estimation de la longueur de pénétration λ

Soit un supraconducteur semi-infini ($x \geq 0, y, z$), possédant une frontière (plan yz) avec le vide en $x = 0$, et plongé dans un champ magnétique externe $H_{ext} = H(x = 0)$ dirigé selon l'axe z . Dans les unités c.g.s., la longueur de pénétration, définie par,

$$\lambda = \frac{1}{H(0)} \int_0^\infty H(x) dx,$$

est donnée par l'intégration suivante dans l'espace des fréquences de [2, 19],

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{K(q) + q^2}, \quad (6.1)$$

pour les réflexions spéculaires. La quantité scalaire $K(q)$ spécifie le facteur de proportionnalité entre le courant \vec{j} et le potentiel vecteur \vec{a} au travers de la représentation habituelle¹ dans l'espace des fréquences,

$$\vec{j}(\vec{q}) = \frac{-c}{4\pi} K(q) \vec{a}(\vec{q}). \quad (6.2)$$

Il est par conséquent toujours possible de construire la longueur de pénétration par sa définition (6.1) pour tout modèle de la supraconductivité qui fournit la fonction $K(q)$.

¹Dans la jauge de London, $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$.

6.1.1 Théorie de London

Dans la théorie de London, la fonction $K(q)$ est constante et vaut l'inverse au carré de la longueur de pénétration de London,

$$K(q) = \frac{1}{\lambda_L^2}. \quad (6.3)$$

En effet, en injectant ce résultat dans (6.2), et en couplant cette relation exprimée dans l'espace réel avec l'équation de Maxwell (c.g.s.), $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$, on obtient facilement l'expression voulue de l'effet Meissner, prédite par la théorie des frères London,

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{H},$$

où λ_L définit la **longueur de pénétration de London**.

En injectant cette description de $K(q)$ (6.3) dans l'intégration (6.1), on vérifie facilement que la définition de la longueur de pénétration effective λ , correspond bien à la longueur de pénétration de London,

$$\begin{aligned} \lambda_{London}(T) &\stackrel{(6.1)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{\frac{1}{\lambda_L^2} + q^2}, \\ &= \frac{2}{\pi} \lambda_L^2 \int_0^\infty \frac{1}{1 + y^2} \frac{dy}{\lambda_L}, \text{ avec } y = q\lambda_L, \\ &= \frac{2}{\pi} \lambda_L \arctan(y)|_0^\infty, \\ &= \lambda_L(T). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dans la **limite de London**, la réponse en courant (6.2) est purement locale et la longueur de pénétration λ s'identifie comme il se doit à la longueur de pénétration de London²,

$$\lambda_L(T) = \frac{mc^2}{4\pi n(T)e^2}.$$

Par conséquent, en regard aux développements proposés dans la section sur l'équation de Pippard du chapitre 1, cette théorie n'est applicable que dans la limite³ où $\lambda_L \gg \xi_p$, c'est-à-dire

- proche de la température critique ($T \rightarrow T_c$);
- ou encore dans la limite "sale" ($l \ll \xi_0$).

Pour rappel, ξ_p fait référence à la longueur de cohérence de Pippard, définie comme suit,

$$\frac{1}{\xi_p} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l},$$

en termes de la longueur de cohérence de BCS, $\xi_0 = 0.18 \frac{\hbar v_F}{kT_c}$, et du libre parcours moyen des électrons normaux, l . Les variables v_F et T_c correspondent respectivement à la vitesse de Fermi et à la température critique du matériau étudié.

²Expression dans les unités c.g.s. de (1.11) définie dans la section 1.3.1 du chapitre 1.

³Pour rappel, la théorie devient locale lorsque la variation du potentiel vecteur \vec{a} , est négligeable sur la distance de cohérence, ξ_p , des paires de Cooper. Puisque \vec{a} est modifié sur la longueur caractéristique λ_L , la condition précédente devient $\lambda_L \gg \xi_p$.

6.1.2 Théorie de Pippard

Dans la théorie de Pippard [67], la fonction $K(q)$ intervenant dans la définition (6.1) de la longueur de pénétration se développe comme suit,

$$K_p(q) = \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\xi_p}{\xi_0} \frac{3}{2(q\xi_p)^3} \left\{ [1 + (q\xi_p)^2] \arctan(q\xi_p) - q\xi_p \right\}. \quad (6.5)$$

Une généralisation de Pippard incluant la théorie BCS s'obtient en modifiant la longueur de cohérence ξ_0 par $\xi_0/J(0, T)$, avec $1/J(0, T) \approx (1 - 0.25t)$ où $t = T/T_c$ [2]. Ce changement adapte la portée du noyau de Pippard, $J_p(R, T) = \exp(-R/\xi_p)$, intervenant dans l'expression (1.21) par celle de BCS, $J(R, T) \approx J(0, T) \exp(-J(0, T)R/\xi_0)$. L'expression de la longueur de pénétration en termes de la longueur de pénétration de London (λ_L), du libre parcours moyen⁴ (l) et de la longueur de cohérence (ξ_0), s'obtient alors par intégration numérique de (6.1) avec $K(q) = K_p(q)$. Dès lors, en connaissant les valeurs citées de $\lambda_L(T=0) = 39$ nm et $\xi_0(T=0) = 87$ nm pour le plomb [68, 69], la longueur de pénétration à zéro kelvin devient uniquement une fonction du libre parcours moyen l . Par un ajustement en température sur les grandeurs $\lambda_{R116nm}(T_i)$ ou $\lambda_{R120nm}(T_i)$ déterminées dans les analyses de magnétisations expérimentales, une estimation de cette quantité $\lambda(l, T=0)$ est possible. Le libre parcours moyen des électrons à 0 K de ces deux réseaux de nanofils de plomb peut alors être calculé par résolution numérique de (6.1). Cette démarche sera explicitée à la fin du présent chapitre.

Des expressions analytiques de la longueur de pénétration effective $\lambda(l, \xi_0, \lambda_L)$ peuvent néanmoins être obtenues dans certaines limites pour les paramètres λ_L et ξ_p . Cette démarche permet dès lors d'éviter l'intégration numérique (6.1), et surtout de se familiariser avec les dépendances de λ en fonction de λ_L , ξ_0 et l . Pour atteindre cet objectif, deux cas limites vont être envisagés. La réalité se situerait alors entre ces frontières.

Dans la première, l'**approximation locale**, $K_p(q)$ est remplacée par sa valeur constante $K_p(0)$ évaluée à fréquence nulle $q = 0$. Cette limite s'apparente à la forme locale de la théorie de London, et représente une extension incluant l'expression du libre parcours moyen. Par intégration analytique, on montre facilement que,

$$\begin{aligned} \lambda_{local}(T) &\stackrel{(6.1)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{K_p(0) + q^2}, \text{ avec } K_p(0) = \lim_{q \rightarrow 0} K_p(q) = \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\xi_p J(0, T)}{\xi_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_p(0)}} \\ &= \lambda_L(T) \left(1 + \frac{\xi_0}{J(0, T) l} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Cette expression peut donc raisonnablement s'appliquer pour des supraconducteurs "sales" où $l < \lambda_L$, des supraconducteurs à hautes températures critiques possédant un $\lambda_L \gg \xi_0$, voire même des supraconducteurs dits classiques et purs, mais dont la température étudiée est alors proche de T_c , c'est-à-dire lorsque $\lambda_L(T) \gg \xi_0$. Ces résultats sont évidemment identiques à ceux déjà avancés au chapitre 1, dans la section sur l'équation de Pippard où:

- la longueur de pénétration $\lambda \rightarrow \lambda_L$ pour des matériaux purs ($l \rightarrow \infty$) proches de T_c ($\lambda_L(T) \gg \xi_0$),
- $\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{l}}$ pour des matériaux "sales" ($l \ll \xi_0$ et donc $\xi_p \approx l < \lambda_L$) (voir également l'équation (1.52)).

La longueur de pénétration atteint sa valeur minimale, λ_L , lorsque le matériau est pur. L'effet Meissner diminue donc en présence d'impuretés ou de défauts qui limiteraient le libre parcours moyen des électrons. Tinkham [70] propose une extension de (6.6) dans la limite des petits échantillons où les diffusions sur

⁴Avec la relation $\frac{1}{\xi_p} = \frac{J(0, T)}{\xi_0} + \frac{1}{l}$.

les surfaces deviennent importantes. Le libre parcours moyen effectif, l_{eff} , tient alors compte de la taille réduite d du matériau, et la longueur de pénétration devient,

$$\lambda_{locale}(T) = \lambda_L(T) \left(1 + \frac{\xi_0}{J(0, T) l_{eff}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } l_{eff}^{-1} = l^{-1} + d^{-1}.$$

Dans le cas d'un film mince, l'épaisseur e serait alors assimilée à la variable d . Pour la seconde limite, **limite de Pippard**, on impose $\lambda_L \ll \xi_0$. A l'opposé du comportement asymptotique précédent dans la limite $q \rightarrow 0$, les variations du potentiel vecteur, \vec{a} , deviennent significatives sur la longueur caractéristique de cohérence des paires de Cooper. Par conséquent, l'approximation locale de la théorie de London perd toute signification, et la fonction $K_p(q)$ s'identifie à sa limite lorsque $q \rightarrow \infty$. La longueur de pénétration s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \lambda_p(T) &\stackrel{(6.1)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{K_p(\infty) + q^2}, \quad \text{avec } K_p(\infty) = \lim_{q \rightarrow \infty} K_p(q) = \frac{a}{q} \quad \text{où } a = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{J(0, T)}{\xi_0} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q dq}{a + q^3} \\ &= \frac{2}{3\pi a^{1/3}} \int_0^\infty \frac{x^{-1/3} dx}{1+x} \stackrel{[79]}{=} \frac{4}{3\sqrt{3}a^{1/3}} \quad \text{en posant } x = \frac{q^3}{a}, \\ &= 0.578 \left(\lambda_L^2(T) \frac{\xi_0}{J(0, T)} \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Cette expression ne peut donc jamais s'appliquer pour des supraconducteurs proches de T_c où $\lambda_L(T) \gg \xi_0$. La Figure 6.1 exhibe le comportement de $K_p(q)$ en fonction de la fréquence. Les deux limites précédemment envisagées y sont également représentées. Toutes deux surestiment l'expression générale de $K_p(q)$, et par conséquent montrent que les deux frontières invoquées sous-estiment la véritable valeur de la longueur de pénétration λ obtenue par intégration numérique de (6.1) avec $K(q) = K_p(q)$.

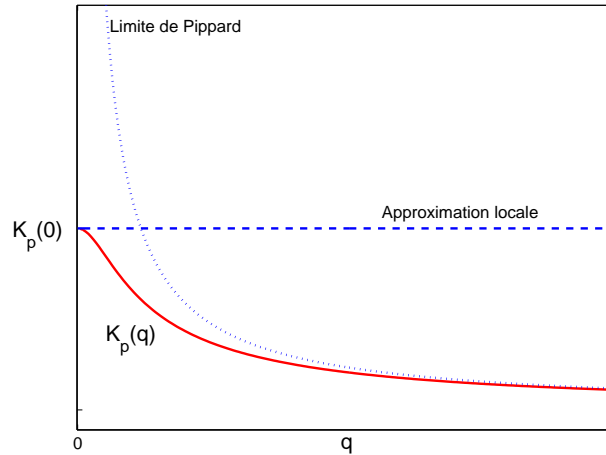


Figure 6.1— Dépendance de $K_p(q)$ en fonction de la fréquence q . Les fonctions $K_p(0)$ (traits discontinus) et $K_p(q) = \frac{a}{q}$ (en pointillés), correspondant respectivement à l'approximation locale et la limite de Pippard y sont également représentées.

A titre illustratif, les deux Figures 6.2 (a) et (b) exposent le comportement de la longueur de pénétration $\lambda(0)$ évaluée par intégration numérique de (6.1) en fonction du libre parcours moyen l . Les deux limites précédemment envisagées, λ_{locale} et λ_p , y sont également représentées. Pour un matériau comme l'aluminium où $\lambda_L = 16$ nm et $\xi_0 = 1500$ nm [2], la limite de Pippard, $\lambda_L \ll \xi_p = \xi_0$, est bien sûr

satisfaite si le matériau est pur, $l \rightarrow \infty$. La Figure 6.2 (a) confirme ce constat théorique où la longueur de pénétration évaluée par intégration numérique (trait continu) converge bien vers la valeur obtenue dans l'approximation de Pippard (trait en pointillés) lorsque $l \rightarrow \infty$. Par contre, pour de l'aluminium "sale", $l \ll \xi_0$, la longueur de cohérence effective est réduite, $\xi_p \approx l$, et la limite de Pippard n'est plus satisfaite. Le matériau rejoint alors la frontière opposée, $\lambda_L \gg \xi_p \approx l$, et la longueur de pénétration calculée numériquement tend vers l'approximation locale (trait discontinu), λ_{locale} (voir même figure pour $l \rightarrow 0$). Dans le cas du plomb, le matériau étudié au travers des mesures de magnétisation, la longueur de pénétration de London est légèrement inférieure à la longueur de cohérence BCS, $\lambda_L \lesssim \xi_0$. Aucune des deux frontières n'est donc satisfaite, à l'exception du cas impur $l \rightarrow 0$, où la limite locale est de toute façon toujours atteinte, $\xi_p \approx l \ll \lambda_L$. La Figure 6.2 (b) expose graphiquement ce constat valable pour tous les matériaux. Cependant, contrairement à l'aluminium, l'approximation locale ne s'écarte pas de plus de 10% (pour $l < 1 \mu\text{m}$) en erreur relative par rapport à la valeur exacte issue de l'intégration numérique. Le domaine de validité de λ_{locale} s'étend donc jusqu'au micromètre en libre parcours moyen dans le cas du plomb. La limite de Pippard par contre n'est bien sûr jamais atteinte pour ce matériau. A défaut de calculer (6.1), il semble donc que pour des matériaux possédant une longueur de pénétration de London du même ordre de grandeur que la longueur de cohérence ξ_0 , l'approximation locale soit la plus adéquate.

Notons enfin que pour le plomb, dans la limite pur ($l \rightarrow \infty$), la longueur de pénétration tend vers la valeur numérique $\lambda(l \rightarrow \infty, \lambda_L(0) = 39 \text{ nm}, \xi_0 = 87 \text{ nm}) = 43.5 \text{ nm}$. Cette grandeur peut s'apparenter à la longueur de pénétration effective à zéro kelvin dans la limite macroscopique ("bulk") pure.

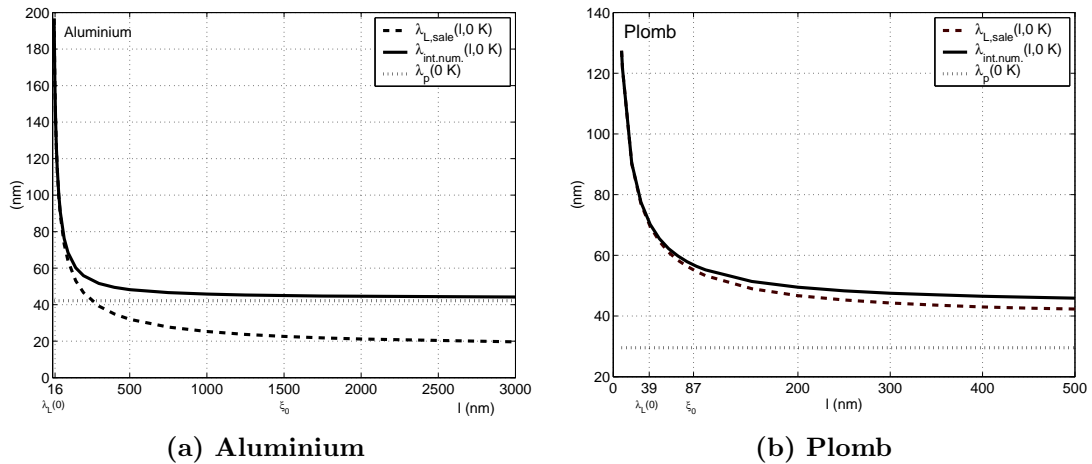


Figure 6.2— Comparaison en fonction du libre parcours moyen l des différentes longueurs de pénétration proposées précédemment. Sont dessinés, la limite locale (trait discontinu), la limite de Pippard (trait en pointillés) et le résultat exact obtenu par intégration numérique de (6.1) (trait continu).

6.2 Dépendances en température de λ

L'analyse précédente sur $K_p(q)$ implique une conséquence qualitative importante sur le comportement de la longueur de pénétration en fonction de la température. Très proche de T_c , tous les supraconducteurs deviennent locaux puisque $\lambda_L(T) \gg \xi_0$. Par conséquent, la longueur de pénétration possède la dépendance en température incluse dans la longueur de pénétration de London $\lambda_L(T)$,

$$\lambda(T) = \lambda_{local} \stackrel{(1.48) \text{ et } (6.6)}{\approx} (T_c - T)^{-1/2}.$$

A plus basse température, lorsque $\lambda_L(T) < \xi_0$, la limite de Pippard peut être prise en considération, et la longueur de pénétration adopterait une dépendance en

$$\lambda(T) \stackrel{(1.48) \text{ et } (6.7)}{\approx} (T_c - T)^{-1/3}.$$

Le point de croisement entre ces deux expressions se localiserait autour de $\lambda_L(T) \approx \xi_0$. Comme cette expression est différente d'un matériau supraconducteur à l'autre, la jonction ne peut pas s'opérer à une température commune à tous les supraconducteurs. La dépendance en température est par conséquent non universelle. La formulation,

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1-t^4}}, \text{ avec, } t = \frac{T}{T_c}, \quad (6.8)$$

proposée par Gorter et Casimir [15] dans leur modèle des deux-fluides n'est dès lors pas applicable à tous les matériaux. Les différentes dépendances existantes doivent donc être envisagées. La présente section propose de les identifier et de les comparer avec le modèle des deux-fluides.

Dans son article sur les propriétés thermodynamiques des supraconducteurs, Mühlischlegel [21] fournit une table qui évite toute intégration numérique incontournable pour calculer les différentes dépendances de $\lambda(T)$ en fonction de la température. En particulier, en fonction de la température réduite $t = T/T_c$ (première colonne de la table), on y retrouve les valeurs du gap d'énergie, $\Delta(T)/\Delta(0)$ (deuxième colonne) et de $1 - (\lambda_L(0)/\lambda_L(T))^2$ (sixième colonne). Ces données seront largement employées dans l'étude qui suit.

Sans entrer dans les détails de la théorie BCS, pour un matériau pur dans la limite locale ($l \rightarrow \infty$ et $\lambda_L(T) \gg \xi_0$), la dépendance en température de la longueur de pénétration est identique à celle de la longueur de pénétration de London [2],

$$\frac{\lambda_{L,pur}(T)}{\lambda_{L,pur}(0)} = \frac{\lambda_L(T)}{\lambda_L(0)}.$$

En utilisant la table de Mühlischlegel, en particulier la sixième colonne, on obtient facilement la dépendance en température de la longueur de pénétration dans la limite locale des matériaux purs (voir Figure 6.3, courbe en pointillés).

Dans la limite de Pippard⁵, la loi en température devient [2],

$$\frac{\lambda_p(T)}{\lambda_p(0)} = \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \tanh \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta(0)}{kT_c} \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \frac{T_c}{T} \right) \right]^{-\frac{1}{3}}, \quad (6.9)$$

où $\Delta(0)/(kT_c) \stackrel{BCS}{=} 1.764$. La deuxième colonne du tableau de Mühlischlegel fournit alors les données nécessaires pour la représentation graphique en trait fin de $\lambda(T)$ sur la Figure 6.3.

La troisième et dernière limite abordée concerne les matériaux impurs dans la limite locale ($\lambda_L(T) \gg \xi_p \approx l$). La dépendance s'écrit [2],

$$\frac{\lambda_{L,sale}(T)}{\lambda_{L,sale}(0)} = \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \tanh \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta(0)}{kT_c} \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \frac{T_c}{T} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{\lambda_p(T)}{\lambda_p(0)} \right]^{3/2}.$$

La normalisation par la longueur de pénétration à 0 K rend cette expression indépendante du libre parcours moyen l (courbe en trait discontinu sur la Figure 6.3). Pour obtenir l'information nécessaire sur l , il est donc indispensable de connaître la valeur à zéro kelvin de $\lambda_p(0)$.

La Figure 6.3 compare ces trois différentes limites avec la loi empirique issue du modèle des deux-fluides proposé par Gorter et Casimir (en trait épais),

$$\frac{\lambda_{GC}(T)}{\lambda_{GC}(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}}.$$

⁵Similaire dans la littérature à la désignation de "limite extrêmement anormale" pour cette même frontière où $\xi_0 \gg \lambda_L$.

Comme la plupart des matériaux purs comme l'étain ($\xi_0 \approx 300$ nm et $\lambda_L \approx 35$ nm) ou l'aluminium ($\xi_0 \approx 1500$ nm et $\lambda_L \approx 16$ nm) peuvent s'identifier à la limite de Pippard ($\xi_0 \gg \lambda_L$), il n'est donc pas étonnant que ce soit la dépendance (6.9) qui concorde le plus avec celle du modèle empirique des deux-fluides. Cependant, cette limite ne peut évidemment plus être prise en considération proche de T_c , puisque la condition $\xi_0 \gg \lambda(T)$ n'est plus satisfaite. Les supraconducteurs BCS purs, rejoignent par contre la limite opposée (locale, $\lambda_L \gg \xi_0$). Ils possèdent alors une dépendance voisine de $(1 - t^2)^{-1/2}$ à toutes les températures.

L'analyse précédente conduit naturellement à penser que la majorité des matériaux renferment alors une loi empirique entre ces deux limites, du type,

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1 - t^\alpha}}, \quad \text{avec } \alpha \in [2, \dots, 4].$$

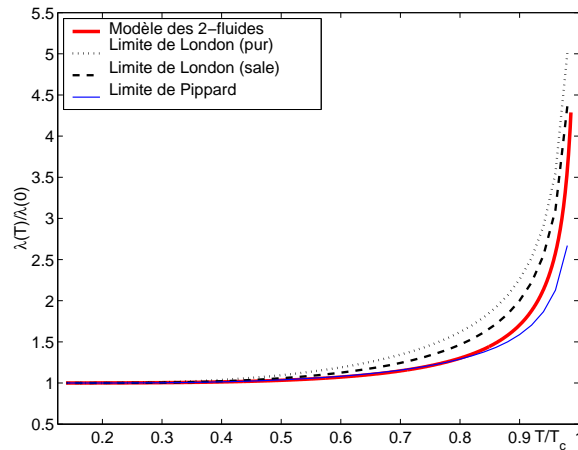


Figure 6.3— Dépendance en température des différentes limites abordées pour l'évaluation de la longueur de pénétration normalisée à sa valeur à 0 K, $\lambda(T)/\lambda(0)$. La limite de London “pure” (en pointillés), la limite de London “sale” (trait discontinu), la limite de Pippard (trait fin) et le modèle des deux-fluides (trait épais) y sont représentés.

6.3 Dépendances en température de $\xi(T)$

Il est important de rappeler (voir section 1.6.4 du chapitre 1) que la longueur de cohérence définie par Pippard et BCS est différente de celle proposée par Ginzburg et Landau. Dans leur théorie phénoménologique, ils proposent d'identifier $\xi_{GL}(T)$ comme étant une distance caractéristique de variation du paramètre d'ordre ψ . Sa définition,

$$\xi_{GL}(T) \stackrel{(1.47)}{=} \frac{\hbar}{\sqrt{2m^*|\alpha(T)|}} \propto \frac{1}{\sqrt{1 - t}} \quad \text{avec } t = \frac{T}{T_c}, \quad (6.10)$$

engendre une divergence de cette quantité au voisinage de la température critique T_c . Par conséquent, $\xi_{GL}(T)$ n'est certainement pas identique à la longueur de cohérence de Pippard,

$$\xi_p = \xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)} \approx 0.18 \frac{\hbar v_F}{k T_c},$$

essentiellement indépendante de la température. Sa seule dépendance en température provient de son extension dans le cadre de la théorie BCS, où ξ_0 est remplacé par $\xi_0/J(0, T)$ avec $J(0, T) \approx 1/(1 - 0.25T/T_c)$.

Les analyses précédentes sur les données de magnétisation ont permis entre autre d'isoler des valeurs ajustées pour les longueurs de pénétration, $\lambda(T_i)$, et de cohérence, $\xi(T_i)$, à différentes températures expérimentales T_i . Ces deux paramètres libres du modèle (5.1) définissent les deux longueurs caractéristiques intervenant dans la résolution des équations de Ginzburg-Landau. La grandeur $\xi(T_i)$ ne s'identifie dès lors certainement pas à la longueur de cohérence de Pippard ξ_0 , mais bien à celle de GL, $\xi_{GL}(T)$. Cette quantité peut par conséquent varier avec T_i , et par corollaire être exploitée pour ajuster sa valeur inconnue à 0 K par la dépendance en température de GL (6.10). Cependant, cette relation (6.10) n'est valable qu'au voisinage de T_c . Il est par conséquent nécessaire, pour interpréter les données $\xi(T_i)$, d'étendre cette loi bien en deçà de la température critique.

Dans la théorie de Ginzburg-Landau, $\xi_{GL}(T)$ peut se définir en termes de la longueur de cohérence de Pippard ξ_0 , de la longueur de pénétration de London $\lambda_L(0)$ à 0 K, de la longueur de pénétration réelle $\lambda(T)$ et du champ critique $H_c(T)$ [2],

$$\frac{\xi_{GL}(T)}{\xi_0} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{H_c(0)}{H_c(T)} \frac{\lambda_L(0)}{\lambda(T)}.$$

En acceptant les dépendances associées au modèle des deux-fluides (vérifiées avec une erreur relative inférieure à 3% pour la dépendance en température du champ critique $H_c(T)$ du plomb [71]),

$$H_c(T) = H_c(0)(1 - t^2) \quad \text{et,} \quad \lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\sqrt{1 - t^4}},$$

une extension possible valable bien en deçà de T_c pour $\xi_{GL}(T)$ pourrait être,

$$\xi_{GL}(T) = \xi_{GL}(0) \frac{\sqrt{1 - t^4}}{(1 - t^2)} \quad \text{avec} \quad \xi_{GL}(0) = \xi_0 \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_L(0)}{\lambda(0)}. \quad (6.11)$$

De par l'identité, $\frac{\sqrt{1-t^4}}{(1-t^2)} = \sqrt{\frac{1+t^2}{(1-t)(1+t)}}$, la dépendance proposée rejoint bien celle de Ginzburg-Landau dans la limite où $t \rightarrow 1$,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 - t^4}}{(1 - t^2)} \propto \frac{1}{\sqrt{1 - t}}.$$

6.4 Dépendance en température de la longueur de pénétration du plomb

Les deux Tableaux 6.1 et 6.2 reprennent les valeurs déterminées de $\lambda(T_i)$ et $\xi(T_i)$ pour ajuster les données expérimentales de magnétisation avec le modèle (5.1).

La présente analyse propose un ajustement des données $\lambda(T_i)$ par les différentes dépendances en température élaborées précédemment. La température critique T_c et la longueur de pénétration à 0 K, $\lambda_0 = \lambda(0)$, représentent alors les deux paramètres libres à déterminer par une méthode du chi-carré (χ^2) sur les quantités $\lambda(T_i)$. Cependant, la température critique est temporairement fixée dans cette étude à celle du plomb, $T_c = 7.2$ K. Seule la longueur de pénétration $\lambda_0 = \lambda(0)$ constitue alors un paramètre d'ajustement. Une résolution du χ^2 à deux dimensions incluant T_c fera l'objet d'une analyse plus approfondie dans la prochaine section de ce chapitre. La méthode du chi-carré employée cherche donc à déterminer la valeur de λ_0 qui minimise la fonction,

$$\chi^2(\lambda_0) = \sum_{T_i} \left(\frac{\lambda(T_i) - \lambda_{fit}(\lambda_0, T_i)}{\Delta\lambda(T_i)} \right)^2, \quad (6.12)$$

T_i (K)	6.85	6.5	6.25	6	5.75	5	4.5	3.25	2
$\lambda(T_i)$ (nm)	120	75	70	65	58	51	51	48	48
$\xi(T_i)$ (nm)	260	197	168	152	139	113	100	81	72
$\kappa(T_i)$	0.461	0.381	0.417	0.428	0.417	0.451	0.51	0.593	0.667

Tableau 6.1— Valeurs numériques des longueurs de pénétration $\lambda(T_i)$ et de cohérence $\xi(T_i)$ pour ajuster le modèle (5.1) aux magnétisations expérimentales de l'échantillon "R116nm" à la température T_i .

T_i (K)	6.85	6.5	6.25	6	5.75	5.5	5	4.5	3.25	2
$\lambda(T_i)$ (nm)	125	92	83	72	67	64	58	55	53	50
$\xi(T_i)$ (nm)	255	180	154	137	124	115	102	90	75	70
$\kappa(T_i)$	0.490	0.511	0.534	0.525	0.54	0.556	0.5569	0.611	0.707	0.714

Tableau 6.2— Valeurs numériques des longueurs de pénétration $\lambda(T_i)$ et de cohérence $\xi(T_i)$ pour ajuster le modèle (5.1) aux magnétisations expérimentales de l'échantillon "R120nm" à la température T_i .

avec $\Delta\lambda(T_i) = 0.1 \times \lambda(T_i)$, c'est-à-dire l'erreur fixée à 10% sur les données ajustées dans le modèle (5.1), et $\lambda_{fit}(\lambda_0, T_i)$ qui correspond à l'une des quatre dépendances en température envisagées: $\lambda_{L,sale}(T)$, ou $\lambda_{L,pur}(T)$, ou $\lambda_p(T)$ ou $\lambda_{GC}(T)$.

La Figure 6.4 illustre graphiquement les valeurs du chi-carré ($\chi^2(\lambda_0)$) obtenues par l'analyse du premier échantillon "R116nm". Le meilleur ajustement est atteint avec le modèle des deux-fluides de Gorter et Casimir, $\lambda_{fit}(\lambda_0, T_i) = \lambda_{GC}(T)$. En particulier, le chi-carré est minimisé avec cette loi empirique lorsque le paramètre libre, en l'occurrence la longueur de pénétration à 0 K ici, vaut $\lambda_{0,min} = 46$ nm. Cette proximité avec le modèle des deux-fluides indiquerait que le plomb s'apparente à un matériau possédant un couplage fort [72]. A l'opposé, le plus mauvais accord est obtenu avec $\lambda_{fit}(T)$ issu de la limite locale propre. Possédant le chi-carré minimal le plus élevé, il semble donc que cette approximation où $\lambda_L(T) \gg \xi_0$ et $l \rightarrow \infty$, ne soit pas satisfaite pour cet échantillon en plomb. Enfin, aucune distinction dans cette analyse ne peut s'établir entre la limite locale impure et celle de Pippard.

L'analyse du second échantillon (Figure 6.5) conduit aux mêmes conclusions que précédemment. A nouveau, le meilleur accord est obtenu avec le modèle des fluides de Gorter et Casimir, et la limite locale pure génère le moins bon ajustement. La valeur minimale du chi-carré est atteinte lorsque le paramètre libre du modèle des deux-fluides, en l'occurrence la longueur de pénétration à 0 K ici, vaut 52 nm. En acceptant une dépendance de λ inversement proportionnelle au libre parcours moyen l , $\lambda(l) \propto \frac{1}{\sqrt{l}}$, la différence de λ_0 entre les deux échantillons indiquent que le deuxième, "R120nm", possède un libre parcours moyen moins élevé. Il est donc plus "sale" en terme de cette quantité. Une résolution affinée de cette dépendance sera abordée à la fin du présent chapitre.

6.5 Dépendance en température des longueurs caractéristiques du plomb

Par corollaire avec l'étude précédente, il semble acceptable d'invoquer la dépendance en température proposée par Gorter et Casimir pour la longueur de pénétration $\lambda(T)$. Ce résultat a d'ailleurs été confirmé par des expériences antérieures, exploitant également cette relation pour l'estimation à zéro kelvin de leur

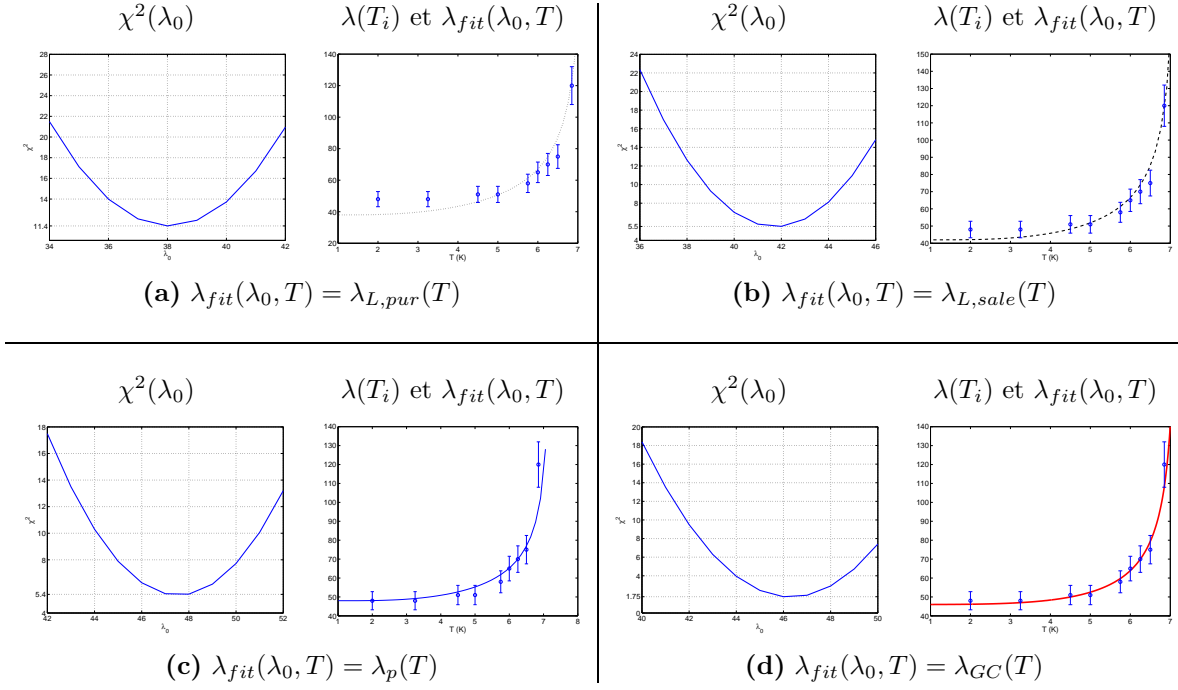


Figure 6.4— Echantillon “R116nm”. Résultats des ajustements par une méthode du chi-carré sur données $\lambda(T_i)$ issues de (5.1) avec les différentes dépendances en température envisagées. Pour chaque cellule, de haut en bas et de gauche à droite, sont représentés respectivement les accords avec $\lambda_{fit} = \lambda_{L,sale}(T)$, $\lambda_{L,pur}(T)$, $\lambda_p(T)$ et $\lambda_{GC}(T)$. Chaque division reprend à gauche le résultat du chi-carré, et à droite les données $\lambda(T_i)$ avec leur marge d’erreur de 10% et la dépendance testée $\lambda_{fit}(\lambda_{0\min}, T)$ où $\lambda_{0\min}$ minimise le χ^2 relatif.

mesure expérimentale de λ [73, 74, 75, 76, 77, 68]. Par extrapolation, la longueur de cohérence $\xi_{GL}(T)$ devrait alors adapter la même loi empirique (6.11). L’inconnue dans la relation (6.11) est alors la valeur à $T = 0$ K de la longueur de cohérence de GL, $\xi_{GL}(0) = \xi_0 \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{\lambda_L(0)}{\lambda(0)}$. Dans le cas du plomb, les quantités ξ_0 et $\lambda_L(0)$ sont connues et égales à 87 nm et 39 nm respectivement [68, 69]. Par conséquent, la longueur de pénétration à 0 K, $\lambda(0)$, reste la seule grandeur dont la valeur doit encore être identifiée, tout comme dans l’ajustement des données $\lambda(T_i)$.

De manière à inclure l’information des $\xi(T_i)$ (en plus des $\lambda(T_i)$ préalablement étudiés), et de laisser la température critique T_c comme paramètre libre supplémentaire, le chi-carré précédemment envisagé peut s’étendre sous la forme suivante,

$$\chi^2(\lambda_0, T_c) = \sum_{T_i} \left\{ \left(\frac{\lambda(T_i) - \lambda_{fit}(\lambda_0, T_c, T_i)}{\Delta\lambda(T_i)} \right)^2 + \left(\frac{\xi(T_i) - \xi_{fit}(\lambda_0, T_c, T_i)}{\Delta\xi(T_i)} \right)^2 \right\}, \quad (6.13)$$

avec, $\Delta\lambda(T_i) = 0.1 \times \lambda(T_i)$ et $\Delta\xi(T_i) = 0.1 \times \xi(T_i)$, qui représentent les erreurs fixées à 10% sur les données ajustées ($\lambda(T_i)$ et $\xi(T_i)$) du modèle (5.1). Dans le cadre du modèle empirique des deux-fluides, les deux fonctions à ajuster s’écrivent,

$$\lambda_{fit}(\lambda_0, T_c, T_i) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - t_i^4}}, \quad \text{et} \quad \xi_{fit}(\lambda_0, T_c, T_i) = \frac{\xi_0 \lambda_L(0) \pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\lambda_0} \frac{\sqrt{1 - t_i^4}}{(1 - t_i^2)}, \quad (6.14)$$

avec $\xi_0 = 87$ nm, $\lambda_L(0) = 39$ nm et $t_i = \frac{T_i}{T_c}$.

La Figure 6.6 illustre graphiquement les résultats de cette analyse du chi-carré (6.13) pour le premier

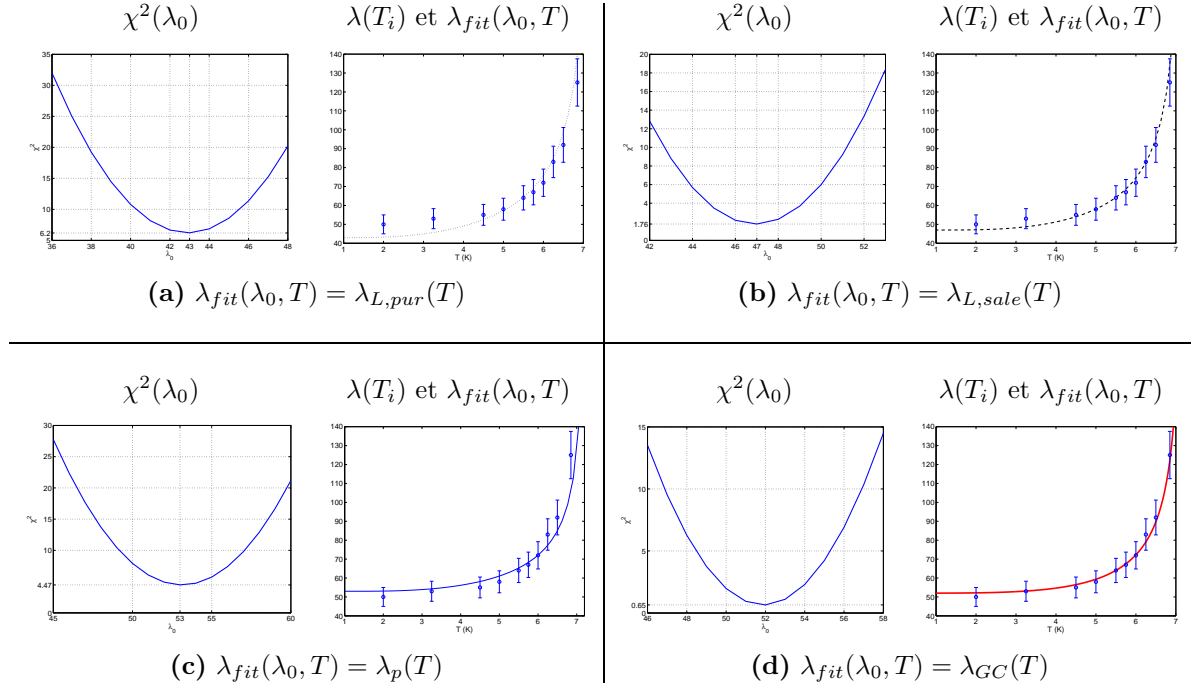


Figure 6.5— Echantillon “R120nm”. Résultats des ajustements par une méthode du chi-carré sur données $\lambda(T_i)$ issues de (5.1) avec les différentes dépendances en température envisagées. Pour chaque cellule, de haut en bas et de gauche à droite, sont représentés respectivement les accords avec $\lambda_{fit} = \lambda_{L,sale}(T)$, $\lambda_{L,pur}(T)$, $\lambda_p(T)$ et $\lambda_{GC}(T)$. Chaque division reprend à gauche le résultat du chi-carré, et à droite les données $\lambda(T_i)$ avec leur marge d’erreur de 10% et la dépendance testée $\lambda_{fit}(\lambda_{0\ min}, T)$ où $\lambda_{0\ min}$ minimise le χ^2 relatif.

échantillon. La projection du χ^2 dans le plan des paramètres libres (λ_0, T_c) indique clairement la position d’un minimum en $(\lambda_{0\ min}, T_{c\ min}) = (47, 7.25)$ (nm,K) (figure de droite). Par convention, les erreurs associées à ces deux quantités se rapportent à une augmentation d’une unité en χ^2 . Ce choix correspond à une modification d’un sigma (68% d’intervalle de confiance) sur les paramètres libres (λ_0, T_c) dans l’hypothèse d’une distribution gaussienne sur chaque donnée $(\lambda(T_i), \xi(T_i))$ [78]. Pour le premier échantillon, les valeurs déterminées pour la longueur de pénétration à zéro kelvin et la température critique sont,

$$\begin{cases} \lambda(0)_{R116nm} &= 47.0^{+1.1}_{-1.1} \text{ nm,} \\ T_{c\ R116nm} &= 7.247^{+0.055}_{-0.046} \text{ K.} \end{cases} \quad (6.15)$$

L’ajustement final des données $\lambda(T_i)$ et $\xi(T_i)$ par les lois empiriques (6.14) est repris sur la Figure 6.7. Les paramètres (λ_0, T_c) employés correspondent alors aux valeurs déterminées par le chi-carré (6.15). Excepté pour le point $\lambda(T_i = 6.85)$, le modèle des deux-fluides ajusté est en accord endéans les 10% de marge d’erreur avec les longueurs caractéristiques déterminées par l’analyse (5.1) du premier échantillon.

L’analyse du second échantillon est reprise graphiquement sur la Figure 6.8. Les résultats de l’ajustement avec le modèle des deux-fluides sont meilleurs (en terme du χ^2_{min}) avec cet échantillon: $\chi^2_{min\ R120nm} = 1.85 < \chi^2_{min\ R116nm} = 2.97$. La longueur de pénétration à zéro kelvin, ainsi que la température critique

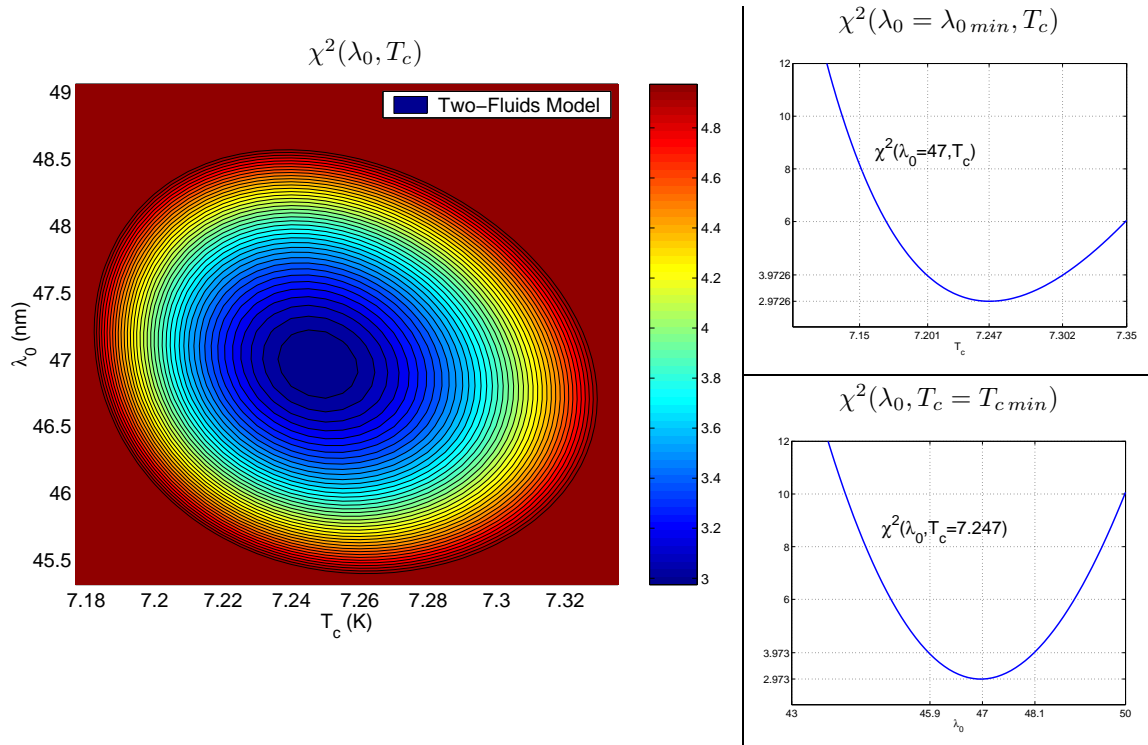


Figure 6.6— Echantillon “R116nm”. Représentation graphique de la méthode du chi-carré employée pour déterminer les paramètres libres λ_0 et T_c au travers du modèle des deux-fluides. La figure à gauche est une projection dans le plan (λ_0, T_c) de χ^2 définie en (6.13). Un minimum, $\chi_{min}^2 = 2.97$, est atteint pour $(\lambda_0, T_c) = (\lambda_{0min}, T_{cmin}) = (47, 7.247)$ (nm,K). Les deux graphes à droite proposent une coupe du $\chi^2(\lambda_0, T_c)$ dans le plan (χ^2, T_c) avec $\lambda_0 = \lambda_{0min} = 47$ nm (figure supérieure) et dans le plan (χ^2, λ_0) avec $T_c = T_{cmin} = 7.247$ K (graphe inférieur). Sur la courbe supérieure, le paramètre libre T_c minimise le chi-carré en $T_c = 7.247$ K. Les deux grandeurs voisines indiquées en abscisse, $T_c = 7.201 = T_{c-}$ et $T_c = 7.302 = T_{c+}$ K, fournissent alors une information sur l’erreur associée à la valeur minimale déterminée. Par convention, elles correspondent à une augmentation d’une unité de chi-carré [78]. Le graphe inférieur est identique au précédent, à la différence que le paramètre libre devient λ_0 ($T_c = T_{cmin} = 7.247$ K). Le χ^2 est alors minimisé en $\lambda_{0min} = 47$ nm avec l’intervalle des incertitudes $\lambda_{0-} = 45.9$ nm et $\lambda_{0+} = 48.1$ nm.

valent alors,

$$\begin{cases} \lambda(0)_{R120nm} = 51.9_{-1.1}^{+1.2} \text{ nm}, \\ T_{c R120nm} = 7.21_{-0.04}^{+0.045} \text{ K}. \end{cases} \quad (6.16)$$

La Figure 6.9 reprend le résultat de l’ajustement par le modèle de Gorter et Casimir avec les paramètres libres déterminés (6.16). Toutes les données déterminées par l’étude de la magnétisation de cet échantillon suivent, endéans 10% de marge d’erreur, la loi empirique des deux-fluides.

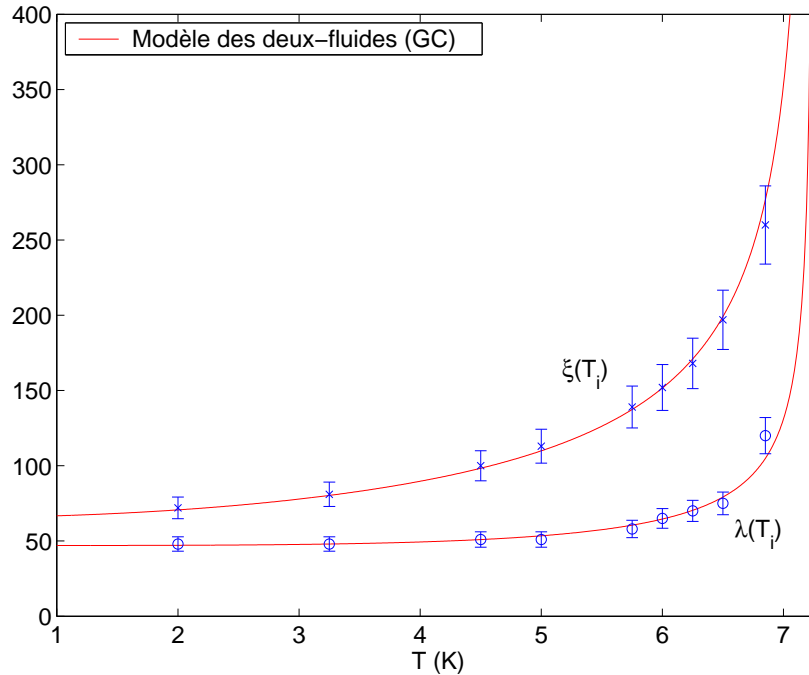


Figure 6.7— Résultats de l’ajustement par les fonctions $\xi(T)$ (courbe supérieure) et $\lambda(T)$ (courbe inférieure) (6.14), sur les données $\xi(T_i)$ (croix) et $\lambda(T_i)$ (cercles) issues de l’analyse de la magnétisation de l’échantillon “R116nm”.

6.6 Comparaison entre les deux échantillons

6.6.1 Température critique

Bien que les deux températures critiques soient légèrement différentes pour les deux échantillons, aucune conclusion sur cette distinction ne peut cependant être établie. En effet, les valeurs moyennes modifiées par leurs marges d’erreur, $T_{c\ R116nm} = 7.247_{-0.046}^{+0.055}$ et $T_{c\ R120nm} = 7.21_{-0.04}^{+0.045}$, se rejoignent, et ne justifient aucune différenciation entre les deux résultats obtenus. Notons que les deux valeurs moyennes obtenues sont proches (endéans leurs barres d’erreur) de la grandeur connue du plomb $T_c = 7.22$ K [80].

6.6.2 Détermination du libre parcours moyen

A l’opposé de la conclusion précédente relative à la température critique, les longueurs de pénétration à zéro kelvin des deux échantillons sont elles bien distinctes. Leurs valeurs moyennes, modifiées par leurs marges d’erreur, ne se rejoignent pas, $\lambda(0)_{R116nm} = 47.0_{-1.1}^{+1.1}$ et $\lambda(0)_{R120nm} = 51.9_{-1.1}^{+1.2}$, et permettent donc de distinguer ces deux grandeurs estimées.

Pour rappel (voir première section), dans la théorie de Pippard, le libre parcours moyen l intervient comme suit dans l’expression de la longueur de pénétration à zéro kelvin,

$$\lambda(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{K(q) + q^2},$$

avec, voir (6.5),

$$K_p(q) = \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\xi_p}{\xi_0} \frac{3}{2(q\xi_p)^3} \left\{ [1 + (q\xi_p)^2] \arctan(q\xi_p) - q\xi_p \right\}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\xi_p} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l}.$$

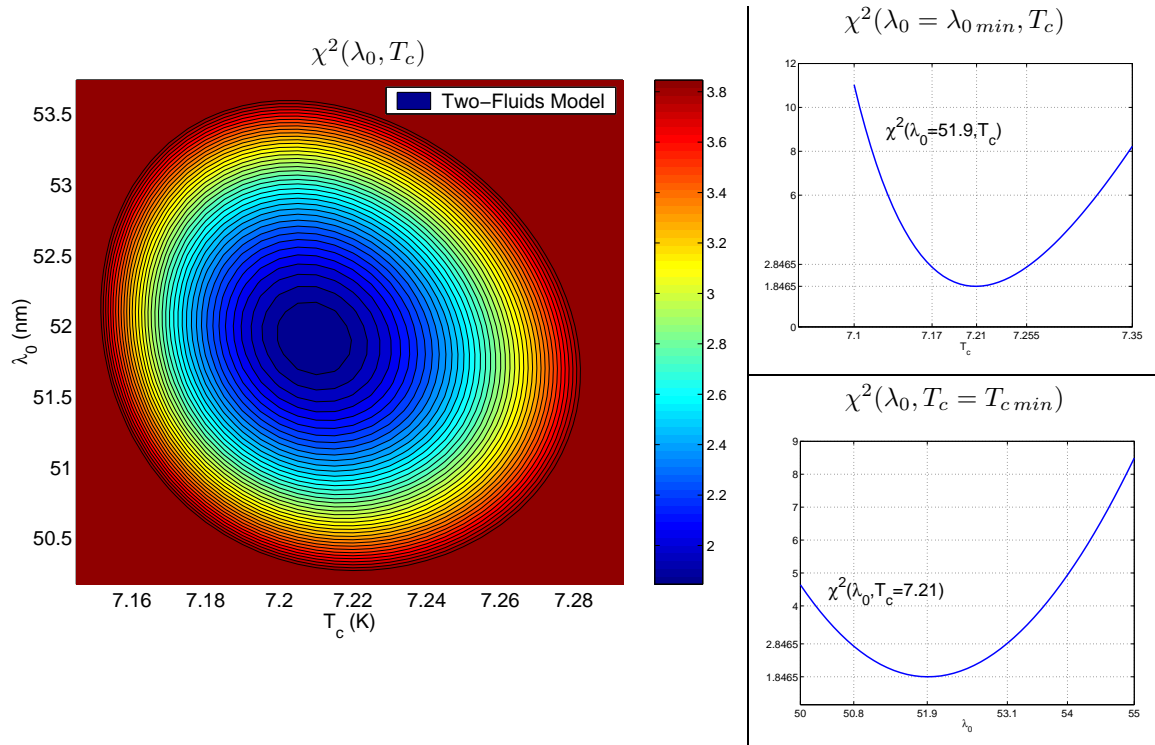


Figure 6.8— Echantillon “R120nm”. Représentation graphique de la méthode du chi-carré employée pour déterminer les paramètres libres λ_0 et T_c au travers du modèle des deux-fluides. La figure à gauche est une projection dans le plan (λ_0, T_c) de χ^2 définie en (6.13). Un minimum, $\chi_{min}^2 = 1.85$, est atteint pour $(\lambda_0, T_c) = (\lambda_{0min}, T_{cmin}) = (51.9, 7.21)$ (nm,K). Les deux graphes à droite proposent une coupe du $\chi^2(\lambda_0, T_c)$ dans le plan (χ^2, T_c) à $\lambda_0 = \lambda_{0min} = 51.9$ nm (figure supérieure) et dans le plan (χ^2, λ_0) à $T_c = T_{cmin} = 7.21$ K (graphe inférieur). Sur la courbe supérieure, le paramètre libre T_c minimise le chi-carré au voisinage de 7.25 K. Les deux grandeurs indiquées en abscisse, $T_c = 7.17 = T_{c-}$ et $T_c = 7.255 = T_{c+}$ K, fournissent alors une information sur l’erreur associée à la valeur minimale déterminée. Par convention, elles correspondent à une augmentation d’une unité du chi-carré [78]. Le graphe inférieur est identique au précédent, à la différence que le paramètre libre devient λ_0 ($T_c = T_{cmin} = 7.21$ K). Le χ^2 est alors minimisé en $\lambda_{0min} = 47$ nm avec l’intervalle des incertitudes $\lambda_{0-} = 50.8$ nm et $\lambda_{0+} = 53.1$ nm.

La longueur de cohérence BCS, $\xi'_0 = \xi_0/J(0, T = 0) = \xi_0$, est donc identique à l’expression de Pippard, ξ_0 , puisqu’à 0 K, le noyau $J(0, T)$ prend la valeur unitaire, $J(0, T = 0) = (1 - 0.25T/T_c) = 1$. Par conséquent, connaissant maintenant la grandeur de $\lambda(0)$ pour chaque échantillon, la seule inconnue subsistante devient le libre parcours moyen l . En résolvant numériquement l’intégrale (6.1) où l est l’unique paramètre encore indéterminé, on est en mesure d’obtenir une information sur le degré d’impureté du matériau étudié. En injectant les grandeurs connues du plomb, $\lambda_L(0) = 39$ nm et $\xi_0 = 87$ nm, l’intégration numérique réalisée en utilisant *Mathematica*©, attribue les valeurs suivantes pour le libre parcours moyen l ,

$$\begin{cases} l_{R116nm} = 360_{+159}^{-83} \text{ nm pour } \lambda(0) = 47_{-1.1}^{+1.1} \text{ nm,} \\ l_{R120nm} = 142_{+21}^{-19} \text{ nm pour } \lambda(0) = 51.9_{-1.1}^{+1.2} \text{ nm.} \end{cases} \quad (6.17)$$

Les erreurs mentionnées indiquent la modification nécessaire à apporter sur l pour reproduire les longueurs de pénétration $\lambda(0)$ entachées de leurs marges d’erreurs. Notons que le signe des erreurs est délibérément inversé puisque la valeur maximale permise pour $\lambda(0)$ correspond à la valeur minimale atteinte par le libre parcours moyen.

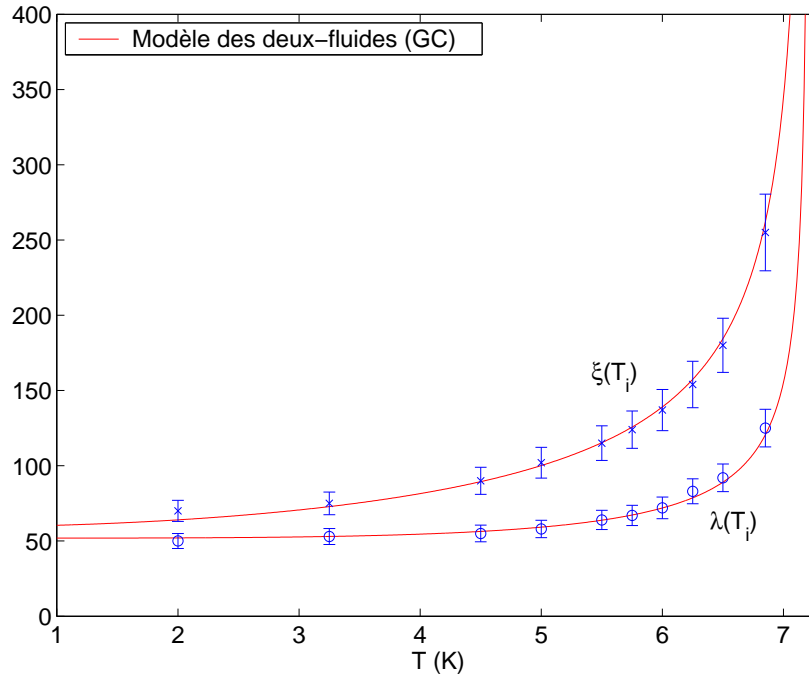


Figure 6.9— Résultats de l’ajustement par les fonctions $\xi(T)$ (courbe supérieure) et $\lambda(T)$ (courbe inférieure) (6.14), sur les données $\xi(T_i)$ (croix) et $\lambda(T_i)$ (cercles) issues de l’analyse de la magnétisation de l’échantillon “R120nm”.

Le deuxième échantillon présente donc plus d’imperfections ou d’impuretés que le premier. Ce constat est en accord avec la technique d’électrodéposition employée pour la fabrication des deux échantillons [83]. A l’opposé du réseau “R116nm”, le second échantillon a été électrodéposé dans un potentiel pulsé. La structure en plomb des nanofils est par conséquent moins ordonnée (structure en petits grains nucléés à chaque pulse de courant élevé pour $V=-0.9$ Volts pendant 2 ms, suivi d’un temps de “repos” pour la croissance à $V=-0.39$ Volts pendant 100 ms), et engendre un libre parcours moyen plus faible que l’électrodéposition à potentiel constant (“R116nm”).

Une mesure récente du libre parcours moyen d’un nanofil électrodéposé en potentiel constant, possédant un rayon de 115 nm, vient d’être réalisée. Cette valeur, déterminée par une mesure de transport, avoisine $l = 140$ nm. Elle est donc trois fois plus faible que celle évaluée par l’analyse précédente. Néanmoins, si les longueurs $\lambda_L(0)$ et ξ_0 sont modifiées endéans leur marge de tolérance retrouvée dans la littérature, $\lambda_L(0) = 33.8$ nm et $\xi_0 = 100.5$ nm (voir section suivante pour la discussion sur les valeurs connues de ξ_0 et $\lambda_L(0)$ du plomb), on obtient alors un libre parcours moyen égal à la grandeur déterminée par la mesure du transport, $l = 140_{+24}^{-18}$ nm. Toujours avec $\lambda_L(0) = 33.8$ nm et $\xi_0 = 100.5$ nm, le libre parcours moyen du second échantillon (mode potentiel pulsé), vaut alors $l = 84.5_{+8}^{-8}$ nm. Les conclusions comparatives entre les deux échantillons analysés sont donc une fois de plus identiques aux constats précédents avec $\lambda_L(0) = 39$ nm et $\xi_0 = 87$ nm. En attente d’informations expérimentales sur le libre parcours moyen du second échantillon, les analyses sont en mesure d’apporter une conclusion, au moins, comparativement correcte.

6.6.3 Les valeurs connues de ξ_0 et $\lambda_L(0)$ du plomb

Bien qu’une modification de la valeur des longueurs ξ_0 et $\lambda_L(0)$ n’altère pas la distinction qualitativement correcte, en terme du libre parcours moyen, entre les deux échantillons, il faut néanmoins ajouter à

l'analyse précédente que les valeurs de ξ_0 et $\lambda_L(0)$ employées ne semblent pas uniques lorsque l'on parcourt la littérature sur ce sujet.

Pour ξ_0 (dont les valeurs varient de $\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$ dans la théorie BCS, jusque $\xi_0 = 1.35 \times \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$ avec un couplage électron-phonon fort [81]), les différentes valeurs renseignées pour le rapport $\frac{2\Delta(0)}{kT_c}$ s'étalent de 3.5 (BCS) à 5.4 [82] (supraconducteurs à couplage fort). Par conséquent, une incertitude élevée accompagne la grandeur de ξ_0 située dans l'intervalle [78, . . . , 129] nm [77]. Il n'est dès lors pas surprenant d'observer des écarts importants également sur la détermination de la longueur de pénétration de London $\lambda_L(0)$ ⁶, puisque cette dernière dépend à la fois du λ effectif trouvé par l'expérience, et de ξ_0 (voir Figure 7 dans [19]).

6.7 Résumé

Au travers du modèle de Pippard, les limites d'application des expressions analytiques de la longueur de pénétration en fonction du libre parcours ont été abordées. En particulier, l'approximation locale "sale" pour cette longueur, $\lambda(l, 0K) = \lambda_L(0)(1 + \frac{\xi_0}{l})^{1/2}$ semble satisfaisante endéans 10% d'erreur pour $l < 1 \mu\text{m}$ dans le cas du plomb. Cette approche permet alors d'éviter l'évaluation de la longueur de pénétration effective λ par l'intégration numérique (6.1) intervenant dans sa définition. Une étude des différentes dépendances en température a également montré que le modèle empirique des deux-fluides proposé par Gorter et Casimir s'avère le meilleur candidat dans le cas du plomb pour étudier cette propriété en température.

L'application de ces propriétés aux données ($\lambda(T_i)$ et $\xi(T_i)$) issues du modèle (5.1) construisant la magnétisation expérimentale, a permis une estimation du libre parcours moyen pour les deux échantillons étudiés. En particulier, par l'intégration numérique de (6.1), une distinction sur le degré d'impureté des deux échantillons fut identifiée. Ce résultat est en accord avec le mode opératoire d'électrodéposition réalisé par l'expérimentateur.

⁶Valeurs comprises entre $\lambda_L(0) = 30.5 \text{ nm}$ [74] et $\lambda_L(0) = 57 \text{ nm}$ [84].

Conclusion

Motivées par des données expérimentales sur la magnétisation de réseau de nanofils de plomb, les résolutions numériques des équations stationnaires de Ginzburg-Landau (GL) se sont focalisées sur les géométries à symétrie axiale. Deux classes de configurations magnétiques se distinguent clairement des analyses numériques exposées aux chapitres 3 et 4.

Dans la première, les solutions préservent la symétrie sous rotation imposée par la structure cylindrique. Les équations du mouvement ne dépendent alors que de la coordonnée radiale. On parlera de modèle à une dimension, 1D. L'effet Meissner, les états représentant un vortex d'Abrikosov ou encore des Vortex Géants ("GiantVortex") centrés à l'origine du cylindre ont alors pu être identifiés. Chacune de ces topologies est décrite par un nombre quantique L associé à la vorticité de la configuration magnétique. En résolvant ces équations du mouvement à une dimension par une méthode numérique appelée méthode de tir, des solutions oscillantes pour le paramètre d'ordre et pour les courants ont également été mises en évidence. En identifiant le type de transition par le caractère continu ou non du paramètre d'ordre autour du changement de phase, une frontière à l'échelle mésoscopique a également pu être identifiée au travers du modèle 1D. Plus spécifiquement, la limite entre les deux types de transitions décrite par le paramètre phénoménologique $\kappa = \lambda/\xi = \kappa_c = 1/\sqrt{2}$ devient une fonction non constante dépendant à la fois du rayon normalisé, $u_b = R/\lambda$, et de la vorticité L : $\kappa_c = \kappa_c(u_b, L)$. Une comparaison avec les résultats obtenus par Zharkov [40] permet de valider notre démarche numérique employée pour la résolution numérique des équations de GL à une dimension.

Dans la seconde catégorie, la symétrie sous rotation des solutions est relâchée (chapitre 4). En appliquant une démarche basée sur le principe de moindre action, la résolution propose alors un schéma numérique indépendant du type d'équations du mouvement à solutionner. Qu'elles soient elliptiques, paraboliques ou hyperboliques, d'autres types d'équations différentielles pourraient être résolues par la procédure commune établie de minimisation dans l'espace des configurations de leur action respective. Dans le cas de solutions présentant également une symétrie sous rotation, des comparaisons avec le modèle à une dimension ont permis d'identifier les paramètres numériques à imposer pour atteindre la précision voulue sur les solutions. Les configurations du type MultiVortex ont également été identifiées, et comparées aux solutions du groupe du Professeur F. Peeters. Ces différents accords ont confirmé la démarche développée.

Une modélisation de la magnétisation expérimentale d'un réseau de nanofils a également été développée. De par la taille réduite des nanofils, l'interaction magnétique entre ceux-ci a pu être négligée. La magnétisation totale du réseau est alors construite par une sommation incluant la contribution individuelle en magnétisation de chaque fil, pondérée par un poids reflétant une distribution gaussienne pour les rayons des fils constituant le réseau. La magnétisation individuelle est évidemment obtenue par résolution des équations du mouvement de GL précédemment étudiées avec les modèles 1D et 2D. En ajustant les paramètres libres associés à ce modèle décrivant la magnétisation totale du réseau, les données expérimentales ont pu être reproduites endéans 10% de marge d'erreur, l'intervalle d'incertitude caractéristique de la théorie effective de Ginzburg-Landau. Ces variables attachées au modèle de la magnétisation totale, reprennent la valeur moyenne μ et l'écart-type σ de la distribution gaussienne, ainsi que les longueurs caractéristiques $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ présentes dans la théorie de GL. Un test totalement

indépendant de l'analyse des magnétisations a permis de valider les valeurs déterminées pour la distribution des rayons. Les grandeurs ajustées pour les longueurs $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ ont fait l'objet d'une analyse supplémentaire dans le chapitre 6. Malgré l'accord entre les données expérimentales et la magnétisation théorique, il est important de mentionner qu'un paramètre libre supplémentaire, associé à l'apparition de configurations décrivant un vortex magnétique, a dû être introduit. Il modifie empiriquement la métastabilité trop longue en mode champ externe décroissant de l'état décrivant un vortex d'Abrikosov. La correction expulse donc le vortex avant sa prédiction théorique liée à la disparition de la barrière de Bean-Livingston. Une étude plus approfondie de cette barrière de potentiel fut donc également réalisée. Cependant, elle n'est pas concluante en regard des données expérimentales analysées. Il n'en demeure pas moins que la transition apparaît dans un domaine en champ magnétique cohérent vis-à-vis de la description en énergie libre des états de vorticités voisines d'une unité de quantum de flux magnétique.

Le dernier chapitre est consacré à la correspondance entre les longueurs caractéristiques du modèle phénoménologique de GL et les longueurs issues des théories microscopiques de Pippard et BCS. Cette étude permet entre autre de comparer les dépendances possibles en température avec les longueurs obtenues de l'analyse de magnétisation des nanofils en plomb. Au delà de l'accord avec le modèle des deux-fluides de Gorter et Casimir, une extrapolation bien en deçà de la température critique T_c est proposée pour les paramètres phénoménologiques $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ de Ginzburg-Landau. Même si la correspondance entre les magnétisations expérimentales et théoriques issue des analyses du chapitre 5 semblait déjà l'indiquer, il est possible d'appliquer les équations de Ginzburg-Landau pour décrire le comportement magnétique du plomb bien en deçà de sa température critique. De plus, les paramètres associés possèdent une dépendance tout à fait conforme à une autre théorie empirique, le modèle des deux-fluides.

Basée sur le modèle de Pippard, une détermination de la valeur du libre parcours moyen des électrons normaux a également été isolée. Elle justifie alors une distinction entre les deux échantillons analysés en terme de leur degré d'impureté. Les résultats obtenus étant en accord avec les procédures de fabrication des nanofils de plomb, cette nouvelle constatation, positive avec l'expérience, confirme une fois de plus la cohérence du modèle développé pour la magnétisation totale, et justifie l'emploi des équations de GL à toutes les températures en dessous de T_c .

Cependant, comme précisé dans le premier paragraphe de l'introduction, d'autres questions surviennent en résolvant les précédentes, et affirmer que le sujet est clôturé serait prétentieux et surtout erroné. Plus spécialement, de par la disparité des grandeurs attribuées à certaines quantités employées, $\lambda_L(0)$ et ξ_0 , afin de déterminer le libre parcours moyen, aucune conclusion fiable sur la valeur de celui-ci ne peut être prononcée. Elles soulèvent également la question relative au couplage fort électron-phonon présent dans un matériau comme le plomb, et mettent en garde face à l'utilisation dans l'analyse du libre parcours moyen des résultats issus d'une théorie à couplage faible comme BCS.

Bien au delà de ces considérations purement théoriques, le paramètre le plus important qui a influencé les démarches de résolution du problème, est certainement l'outil informatique. L'acquisition récemment d'une ferme de microprocesseurs plus puissants nous a par exemple permis d'effectuer l'analyse complète par la méthode du chi-carré, détaillée dans la section sur l'unicité des paramètres du modèle de magnétisation. Il va s'en dire que la démarche d'ajustement pour toutes les températures expérimentalement étudiées aurait pu être effectuée de la même manière avec l'acquisition d'une telle technologie plus tôt. De façon équivalente, l'invariance sous rotation invoquée initialement aux équations de GL était surtout légitime face aux temps de calcul considérables qu'un modèle à deux dimensions imposait. A nouveau, seuls les développements et l'acquisition récente de nouveaux microprocesseurs ont permis une telle approche pour l'analyse des nanofils de plomb. L'étape suivante dans la suppression des symétries imposées pour simplifier le problème serait alors d'étudier les équations dépendantes du temps. L'avancement des technologies le permet, et peut-être que la question relative à la barrière de Bean-Livingston pourra être résolue dans cette démarche encore plus générale.

Bibliographie

- [1] J. Rey-Debove et A. Rey, sous la dir. de, *Le Nouveau Petit Robert, Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française* (DICOROBERT Inc., Montréal, 1993).
- [2] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1996).
- [3] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (W. A. Benjamin, New York, 1966).
- [4] F. London, *Superfluids, Macroscopic Theory of Superconductivity*, Vol. 1 (Dover Publications, New York, 1961).
- [5] J. E. C. Williams, *Superconductivity and its Applications* (Pion Limited, London, 1970).
- [6] D. R. Tilley and J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity* (Van Nostrand Reinhold Company, London, 1974).
- [7] B. Baelus, *Vortex Matter in Mesoscopic Superconductors*, PhD thesis, Universiteit Antwerpen, Antwerpen, 2002.
- [8] H. A. Fairbank, *Phys. Rev.* **66**, 274 (1944).
- [9] H. Kammerlingh Onnes, *Leiden Comm.* **120b**, **122b**, **124c** (1911).
- [10] G. Vidal, *Superconductivity. The Next Revolution ?* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [11] G. Bednorz and K. A. Müller, *Z. Phys.* **B64**, 186 (1986).
- [12] W. Meissner and R. Ochsenfeld, *Naturwissenschaften* **21**, 787 (1933).
- [13] F. and H. London, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A149**, 71 (1935).
- [14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (John Wiley and Sons, New York, 1975).
- [15] C. J. Gorter and H. B. G. Casimir, *Phys. Z.* **35**, 963 (1934); *Physica* **1**, 306 (1934).
- [16] G. E. H. Reuter and E. H. Sondheimer, *Proc. Roy. Soc.* **A195**, 336 (1948).
- [17] A. B. Pippard, *Proc. Roy. Soc.* **A216**, 547 (1953).
- [18] T. E. Faber and A. B. Pippard, *Proc. Roy. Soc.* **A231**, 336 (1955).
- [19] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [20] L. N. Cooper, *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956).
- [21] B. Mühlischlegel, *Zeitschrift für Physik* **155**, 313-327 (1959). (Une traduction anglaise est disponible dans *The Theory of Superconductivity*, edited by N. N. Bogoliubov (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1962), p. 133).

- [22] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950) (in Russian).
- [23] L. P. Gor'kov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 735 (1958); *Sov. Phys. JETP* **7**, 505 (1958).
- [24] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd ed. (John Wiley and Sons, New York, 1985).
- [25] J. D. Livingston, *Phys. Rev.* **129**, 1943 (1963).
- [26] J. Feder and D. S. McLachlan, *Phys. Rev.* **177**, 763 (1969).
- [27] D. Saint-James and P. G. de Gennes, *Phys. Lett.* **7**, 306 (1963).
- [28] A. A. Abrikosov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32**, 1442 (1957); *Soviet Physics JETP* **5**, 1174 (1957).
- [29] W. H. Kleiner, L. M. Roth and S. H. Autler, *Phys. Rev.* **133**, A1226 (1964).
- [30] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol. 2 (Cambridge University Press, Cambridge, 1996), pp. 332-352.
- [31] O. Buisson, P. Gandit, R. Rammal, Y. Y. Wang and B. Pannetier, *Phys. Lett. A* **150**, 36 (1990).
- [32] A. K. Geim, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, J. G. S. Lok, J. C. Maan, A. E. Filippov and F. M. Peeters, *Nature* **390**, 259 (1997).
- [33] H. J. Fink and A. G. Presson, *Phys. Rev.* **151**, 219 (1966); *Phys. Rev.* **168**, 399 (1968).
- [34] V. V. Moshchalkov, X. G. Qiu and V. Bruyndoncx, *Phys. Rev. B* **55**, 11793 (1997).
- [35] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **57**, 13817 (1998).
- [36] J. Govaerts, G. Stenuit, D. Bertrand, O. van der Aa, *Phys. Lett. A* **267**, 56 (2000).
- [37] G. Stenuit, J. Govaerts, D. Bertrand, O. van der Aa, *Physica C* **332**, 277 (2000).
- [38] S. V. Yampolskii, F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **62**, 9663 (2000).
- [39] Hu Zhao, V. M. Fomin, J. T. Devreese, V. V. Moshchalkov, *Solid State Commun.* **125**, 59 (2003).
- [40] G. F. Zharkov, *Phys. Rev. B* **63**, 224513 (2001).
- [41] S. Michotte, L. Piraux, S. Dubois, F. Pailloux, G. Stenuit, J. Govaerts, *Physica C* **377**, 267 (2002).
- [42] V. L. Ginzburg, *Sov. Phys. JETP* **34**, 78 (1958).
- [43] V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and P. Singha Deo, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2783 (1998).
- [44] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2409 (1999).
- [45] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5eme ed. (Academic Press, London, 1994) pp. 960.
- [46] R.-M. Hervé et M. Hervé, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **11**, 427 (1994).
- [47] W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C++, The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2002), pp. 715-719, ou en ligne sur <http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf.html> pour le Numerical Recipes in C.
- [48] G. Stenuit, S. Michotte, J. Govaerts and L. Piraux, *Eur. Phys. J. B.* **33**, 103-107 (2003).

-
- [49] G. Stenuit, S. Michotte, J. Govaerts, L. Piraux and D. Bertrand, Vortex Configurations in Mesoscopic Superconducting Nanowires, *Mod. Phys. Lett. B*, Vol. **17**, Nos. 10, 11 & 12, 537-547 (2003) (*Proceedings of the International Conference on Modern Problems in Superconductivity, Yalta (Ukraine), September 9-14, 2002*).
- [50] A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters and V. A. Schweigert, *Nature* **407**, 55 (2000).
- [51] W. V. Pogosov, *Phys. Rev. B* **65**, 224511 (2002).
- [52] J. Govaerts, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 8955 (2001).
- [53] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974).
- [54] W. D. Gropp, H. G. Kaper, G. K. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo, and V. M. Vinokur, *J. Comput. Phys.* **123**, 254 (1996).
- [55] P. Singha Deo, V. A. Schweigert and F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **59**, 6039 (1999).
- [56] C. P. Bean and J. D. Livingston, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 14 (1964).
- [57] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 449 (1976).
- [58] L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev. B* **19**, 4486 (1979).
- [59] E. Akkermans, D. M. Gangardt and K. Mallick, *Phys. Rev. B* **62**, 12427 (2000).
- [60] B. J. Baelus and F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **65**, 104515 (2002).
- [61] B. J. Baelus, S. V. Yampolskii, F. M. Peeters, E. Montevecchi and J. O. Indekeu, *Phys. Rev. B* **65**, 024510 (2001).
- [62] G. F. Zharkov, *Phys. Rev. B* **63**, 214502 (2001).
- [63] G. Stenuit, J. Govaerts and D. Bertrand, Half-Integer Number Vortices in the Ginzburg-Landau-Higgs Model, eds. J. Annett and S. Kruchinin, NATO Science Series II, Vol. **67**, 375-384 (2002) (*Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop "New Trends in Superconductivity", Yalta (Ukraine), September 16-20, 2001*).
- [64] J. Berger and J. Rubinstein, *Phys. Rev. B* **59** (1999) 8896-8901.
- [65] R. F. Wang, *Physica C* **397**, 80-85 (2003).
- [66] J. Blezius, R. Akis, F. Marsiglio, and J. P. Carbotte, *Phys. Rev. B* **38**, 179 (1988).
- [67] A. B. Pippard, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A216**, 547 (1953).
- [68] W.-H. Li, C. C. Yang, F. C. Tsao, and K. C. Lee, *Phys. Rev. B* **68**, 184507 (2003).
- [69] *A Physicist's Desk Reference*, 2nd ed., edited by H. L. Anderson (AIP, New York, 1989), p. 117, relevé dans la Ref.[68].
- [70] M. Tinkham, *Phys. Rev.* **110**, 26 (1956).
- [71] D. L. Decker, D. E. Mapother and R. W. Shaw, *Phys. Rev.* **112**, 1888 (1958).
- [72] J. Ramer, *EuroPhys. Lett.* **5**, 77-79 (1988).
- [73] G. D. Cody and R. E. Miller, *Phys. Rev.* **173**, 481 (1968).
- [74] R. F. Gasparovic and W. L. McLean, *Phys. Rev. B* **2**, 2519 (1970).

- [75] G. E. Peabody and R. Meservey, *Phys. Rev. B* **6**, 2579 (1972).
- [76] H. R. Kerchner and D. M. Ginsberg, *Phys. Rev. B* **10**, 1916 (1974).
- [77] M. P. Nutley, A. T. Boothroyd, C. R. Staddon, D. M^cK. Paul, J. Penfold, *Phys. Rev. B* **49**, 15789 (1994).
- [78] R. Barlow, *Asymmetric Errors*, [arXiv:physics/0401042](https://arxiv.org/abs/physics/0401042) (Janvier 2004).
- [79] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5eme ed. (Academic Press, London, 1994) pp. 340.
- [80] *American Institute of Physics Handbook*, edited by D. E. Gray, (Mc-Graw-Hill, New York, 1957), p. 4-49.
- [81] H. R. Kerchner and D. M. Ginsberg, *Phys. Rev. B* **8**, 3190 (1973).
- [82] M. P. Sarachik, R. L. Garwin and E. Erlbach, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 52 (1960).
- [83] H. Natter and R. Hempelmann, *Electrochimica Acta* **49**, 51-61 (2003).
- [84] A. Suter, E. Morenzoni, R. Khasanov, H. Luetkens, T. Prokscha and N. Garifianov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 087001-1 (2004).