



Université Catholique de Louvain
Faculté des Sciences

***Les anomalies fortes et électromagnétiques
dans les désintégrations faibles des mésons***

Stéphanie Trine

Dissertation présentée en vue
de l'obtention du grade de
Docteur en Sciences
(Groupe des Sciences Physiques)

Promoteur : Prof. Jean-Marc Gérard

Louvain-la-Neuve – Décembre 2004

Je voudrais tout d'abord remercier mon promoteur, le Professeur Jean-Marc Gérard, pour la confiance qu'il m'a accordée durant toutes ces années, pour son aide précieuse aux différentes étapes de ce travail et pour nos multiples discussions sur la physique des particules en général.

J'aimerais également remercier le Professeur Jean Pestieau, qui m'a permis d'acquérir l'expérience d'une première collaboration, ainsi que le Professeur Jacques Weyers, dont la disponibilité m'a permis de répondre à bien des interrogations.

Mes remerciements vont encore aux Professeurs Jean-Pierre Antoine, Gino Isidori et Michel Tytgat, qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse, pour leurs commentaires sur le présent manuscrit.

Merci aux membres de l'unité FYMA, et à tous ceux cotoyés au cyclotron, pour les années passées ensemble.

Je remercie bien entendu également ma famille et mes amis, et en particulier mes parents, qui m'ont toujours soutenue. Ce travail est spécialement dédié à mon père, qui aurait certainement aimé en voir l'aboutissement.

Merci enfin à Christopher pour son soutien patient, ses questions stimulantes, ses commentaires avisés, mon incursion dans le monde des états liés et le goût qu'il m'a donné des méthodes fonctionnelles.

I am now convinced that theoretical physics is actual philosophy.
Max Born.

Table des matières

Introduction	1
1 Les anomalies fortes et électromagnétiques	5
1.1 Symétries et lois de conservation	5
1.1.1 Le théorème de Noether	5
1.1.2 Les identités de Ward	9
1.1.3 Le phénomène d'anomalie	12
1.2 Les anomalies axiale et de trace	13
1.2.1 L'anomalie axiale	13
1.2.2 L'anomalie de trace	17
1.3 Implications phénoménologiques	20
1.3.1 Préliminaire : le Modèle Sigma Non Linéaire	21
1.3.2 La masse du η' et la masse des nucléons	25
1.3.3 Désintégrations radiatives de (pseudo)scalaires légers	28
1.3.4 Transitions hadroniques entre états du quarkonium	31
2 Opérateurs faibles anomaux induits par les quarks lourds	35
2.1 Intégration d'un quark lourd	37
2.2 Opérateurs faibles du Modèle Standard	41
2.2.1 Opérateurs de dimension six	42
2.2.2 Opérateurs de dimension huit	43
2.2.3 Opérateurs de dimension cinq et sept	47
2.2.4 Effet du quark charmé dans $B \rightarrow K\eta'$	48
2.2.5 Cadre général de l'expansion en produits d'opérateurs	51
2.3 Opérateurs 'faibles' au-delà du Modèle Standard	51
2.4 Introduction de l'électromagnétisme	53
2.4.1 Opérateurs de dimension six	54
2.4.2 Opérateurs de dimension huit	54
2.4.3 Opérateurs de dimension cinq et sept	56
2.4.4 Effet du quark charmé dans $B \rightarrow K\gamma\gamma$	57
2.5 Synthèse	58
3 Opérateurs faibles anomaux induits par les quarks légers	61
3.1 Génération des opérateurs anomaux	62
3.1.1 Evolution de l'opérateur densité	63
3.1.2 Poids relatif des anomalies axiale et de trace	65

3.1.3	Amplification de l'opérateur d'anomalie de trace	65
3.1.4	Les anomalies dans les désintégrations $K \rightarrow \pi\pi$	66
3.2	Hypothèse de dominance des opérateurs anomaux	68
3.2.1	Désintégrations hadroniques : $K \rightarrow \pi\pi, \pi\pi\pi$	69
3.2.2	Désintégrations radiatives : $K_{S,L}^0 \rightarrow \gamma\gamma, K_{L,S}^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$	72
3.2.3	Etude du spectre $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$	75
3.3	Synthèse	82
Conclusion		85
A Lois de conservation classiques et quantiques		87
A.1	Démonstration du théorème de Noether	87
A.2	Démonstration des identités de Ward	89
B Le propagateur en champs externes d'un quark lourd		91
C Base d'opérateurs $\Delta S = 1$ de dimension huit		93
D Le Modèle Sigma Non Linéaire à une boucle		95
E Formules utiles		97
E.1	Les matrices de Gell-Mann et de Pauli	97
E.2	Les matrices de Dirac	98
E.3	Intégration sur les moments	98
E.4	Intégration sur les paramètres de Feynman	99
E.5	Largeurs de désintégration	100
Bibliographie		102

Introduction

La formulation des théories physiques modernes repose sur le concept de symétrie. Depuis Galilée, et son principe de covariance des lois du mouvement sous changement de repère inertiel, l'importance des symétries s'est accrue au point de déterminer la forme même des interactions entre particules élémentaires, en théorie quantique des champs (principe de jauge). Outre les symétries exactes, les symétries brisées, qui ne laissent pas l'état fondamental invariant ou qui ne deviennent de véritables symétries que dans certaines limites (telles que l'annulation de termes de masse, par exemple), se sont également avérées extrêmement utiles afin de décrire le monde physique. Leur existence permet ainsi d'établir des relations entre les amplitudes de divers processus, de comprendre la suppression éventuelle d'un processus donné, d'organiser le spectre physique de la théorie ou de construire des Lagrangiens effectifs à basse énergie.

Curieusement, un certain type de brisure de symétrie est longtemps passé inaperçu : la brisure anormale. Celle-ci correspond à l'éventualité où une symétrie de la théorie classique ne survit pas à la quantification. On dit dans ce cas qu'une anomalie se produit.

Ce phénomène s'est manifesté pour la première fois en 1949, dans les travaux de Jack Steinberger [1]. Celui-ci avait tenté de décrire la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ au moyen d'une boucle de protons avec un vertex pseudoscalaire γ_5 . Or son résultat, en accord excellent avec l'expérience, devait en principe pouvoir être également obtenu à partir d'un couplage $\gamma_\mu\gamma_5$ à l'aide des équations du mouvement classiques, ce qui n'était pas le cas. Le problème devient critique en 1967, lorsque Sutherland [2] et Veltman [3] démontrent sur base de l'algèbre des courants l'impossibilité pour un pion neutre de se désintégrer en deux photons, en contradiction flagrante avec l'observation ! Deux ans plus tard, Adler [4], Bell et Jackiw [5] identifient l'origine de ces incohérences : la symétrie approximative $U(1)$ axiale du Lagrangien de QED , la théorie de jauge spinorielle associée aux interactions électromagnétiques, présente une anomalie. La divergence du courant de Noether correspondant reçoit ainsi la contribution d'un terme additionnel $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, où $F_{\mu\nu}$ désigne le tenseur électromagnétique et $\tilde{F}^{\mu\nu}$, son dual, ce qui modifie les théorèmes d'algèbre des courants. Ce terme indique en outre qu'une utilisation naïve des équations du mouvement classiques n'est plus valide.

D'autres types d'anomalie ont depuis été mis en évidence, avec des répercussions importantes tant au niveau de la compréhension de la théorie quantique des champs proprement dite (notamment de ses aspects topologiques) qu'au niveau de ses applications à la phénoménologie [6]. Pour illustrer ce dernier point, signalons par exemple l'existence de contraintes sévères sur le contenu en particules du Modèle Standard provenant de l'exigence de compensation de ses anomalies de jauge, ceci afin de permettre sa renormalisabilité.

L'anomalie $U(1)_A$ mentionnée ci-dessus possède en quelque sorte un analogue scalaire [7, 8]. L'invariance classique de l'action de QED sous un changement d'échelle (ou dilatation globale de l'espace-temps) dans la limite de masse nulle est en effet elle aussi brisée par des effets de boucles quantiques, et cette brisure est cette fois associée à une densité de photons scalaire $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Ce sont ces deux types d'anomalies - l'anomalie axiale et l'anomalie d'échelle (encore appelée anomalie de trace) - que nous allons considérer dans ce travail, dans le cas de QED mais également dans celui de QCD , la théorie de jauge spinorielle permettant de décrire les interactions fortes entre quarks et gluons.

Les anomalies sont des propriétés fondamentales d'une théorie quantifiée, qui ne sont pas liées à un développement en série de perturbations. Leur impact dans les phénomènes physiques peut donc être considérable. Certaines manifestations des anomalies axiale et de trace de QED et de QCD dans des processus forts ou électromagnétiques seront revues brièvement dans le chapitre 1. Signalons simplement, pour piquer la curiosité du lecteur, que la masse des objets qui nous entourent ne serait pas la même en l'absence d'anomalie d'échelle forte.

Le rôle de ces anomalies dans les désintégrations faibles des mésons n'a cependant pas encore fait l'objet d'une étude systématique. Les effets liés à la conversion d'une densité de gluons anormale pseudoscalaire $G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu}$ ou scalaire $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ en hadrons légers pourraient pourtant s'avérer significatifs. Ce sont précisément ces effets (ainsi que ceux associés à $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$) que nous allons analyser, et ce dans deux régimes extrêmes : tout d'abord lorsque les gluons sont émis à courte distance (c.-à-d. à haute énergie) par des quarks lourds, ensuite lorsqu'ils sont émis à longue distance (c.-à-d. à basse énergie) par des quarks légers.

L'étude des désintégrations faibles des mésons (et en particulier des modes hadroniques) est intéressante au moins pour deux raisons.

Tout d'abord pour avoir une meilleure connaissance des interactions faibles non leptoniques. Celles-ci présentent en effet la particularité de briser l'invariance sous la double opération de conjugaison de charge (C) et de parité (P) suivant un schéma bien précis dans le Modèle Standard, lié à un seul paramètre libre : la phase de la matrice de mélange des quarks, ou matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Elles constituent de ce fait véritablement une fenêtre sur la physique au-delà du Modèle Standard, et en particulier sur le secteur scalaire et le problème de la génération de la masse au niveau élémentaire. Or les effets du boson de jauge faible W , simplement décrits par l'interaction de Fermi dans le cas leptonique, nécessitent la prise en compte de toute une série d'opérateurs locaux en présence d'interactions fortes. Où se situent les effets anormaux dans ce formalisme ? Sont-ils importants ? Pourraient-ils modifier l'extraction des paramètres de CKM ?

D'autres aspects des désintégrations faibles des mésons sont plutôt à mettre sur le compte des interactions fortes à longue distance, c.-à-d. en-dessous du GeV, dans le domaine non perturbatif. C'est le cas par exemple de la dominance de l'amplitude $\Delta I = 1/2$ sur l'amplitude $\Delta I = 3/2$ observée dans les transitions $K \rightarrow \pi\pi$. Des modèles effectifs basés sur les symétries de QCD sont en général invoqués afin de décrire ces interactions. Où se situent les effets anormaux dans ce cadre ? Sont-ils importants ? Les anomalies pourraient-elles aider à passer de la description perturbative en termes de quarks et de gluons à la description effective en termes de hadrons ?

Le rôle des anomalies fortes et électromagnétiques dans les désintégrations faibles des mésons constitue ainsi la question centrale autour de laquelle s'articule ce travail. Certains développements dépassent cependant ce cadre. Ci-dessous, nous donnons un aperçu du contenu des différents chapitres ainsi que de la philosophie adoptée. Les contributions originales correspondent essentiellement aux chapitres 2 et 3.

Chapitre 1 : Les anomalies fortes et électromagnétiques

Ce premier chapitre est destiné à mettre en place les notions utiles aux chapitres suivants. Les aspects des anomalies fortes et électromagnétiques qui y sont exposés, loin de constituer une étude exhaustive, sont donc ciblés.

Nous commencerons par analyser la façon dont les symétries d'une théorie des champs se manifestent aux niveaux classique et quantique. Ceci nous permettra de définir plus précisément le phénomène d'anomalie.

Les anomalies axiale et d'échelle de QED et de QCD seront ensuite dérivées. L'accent sera mis sur les similitudes et différences entre ces deux types d'anomalies. Un traitement parallèle sera par ailleurs adopté tout au long du travail.

Enfin, l'importance des effets anomaux dans les processus forts et électromagnétiques sera illustrée par un certain nombre d'exemples. Nous en profiterons pour introduire le Modèle Sigma Non Linéaire, qui servira à l'analyse à longue distance du chapitre 3.

De manière générale, une attention particulière sera accordée à l'utilisation des équations du mouvement classiques. Ceci permettra la dérivation d'un premier résultat, i.e., les représentations non linéaires dominantes des opérateurs d'anomalie axiale et de trace de QCD en dehors de la limite chirale. Celles-ci sont utiles notamment pour décrire l'hadronisation d'une densité de gluons $G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu}$ ou $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ en pseudoscalaires légers.

Chapitre 2 : Opérateurs faibles anomaux induits par les quarks lourds

L'objectif initial de ce chapitre est la génération de configurations de gluons anomaux scalaires et pseudoscalaires dans le cadre de l'expansion en produits d'opérateurs associée à l'intégration du boson W , en présence d'interactions fortes à courte distance.

Nous verrons que les opérateurs anomaux locaux dominants sont en principe produits par des diagrammes de type 'pingouin' (ou plus précisément des diagrammes qui généralisent la définition de pingouin au cas de l'émission de plusieurs gluons) avec une saveur intermédiaire lourde, dans le cas d'une interaction faible effective initiale à quatre quarks. L'ensemble de ces corrections sera obtenu à partir de l'expansion en la masse inverse du propagateur du quark lourd plongé dans un champ gluonique classique. Ce résultat constitue le point central de ce chapitre. Les contributions des différents opérateurs anomaux seront ensuite discutées.

Etant donné les hypothèses d'un opérateur initial à quatre quarks et d'une saveur intermédiaire lourde, la méthode se trouve être essentiellement bien adaptée à l'estimation des effets du quark c dans les désintégrations des kaons. D'autre part, il se fait que la description des effets de saveurs virtuelles lourdes dans certains éléments de matrice de hadrons légers entre également dans notre formalisme. Le rôle des anomalies induites par les quarks lourds dans les désintégrations des mésons B pourra ainsi être lui aussi investigué à condition de faire appel à l'approximation de factorisation.

Au cours de notre analyse, nous dériverons un nouvel ensemble d'opérateurs de dimension huit $\Delta S = 1$ associé aux boucles de quark charmé. Cet ensemble diffère de celui

présenté dans la littérature. Nous montrerons qu'une mauvaise utilisation des équations du mouvement classiques des champs de quarks est à l'origine de cette différence.

Pour terminer, soulignons le fait que la méthode proposée s'applique à toute interaction effective à quatre quarks, y compris induite par de la physique au-delà du Modèle Standard. Son extension à d'autres interactions de jauge, telles que les interactions électromagnétiques, est en outre immédiate.

Chapitre 3 : Opérateurs faibles anomaux induits par les quarks légers

Dans ce dernier chapitre, nous étudierons les effets anomaux associés aux quarks légers dans les désintégrations faibles des kaons. Les interactions fortes à longue distance seront paramétrisées pour ce faire à l'aide du Modèle Sigma Non Linéaire.

Nous examinerons tout d'abord la possibilité d'une amplification des opérateurs associés aux anomalies axiale et de trace fortes. Ceux-ci seront générés par l'évolution d'une interaction effective $\Delta S = 1$ de type 'densité'. Le résultat de cette évolution sera comparé à celui de l'analyse à courte distance.

Nous discuterons ensuite l'hypothèse de dominance des opérateurs anomaux forts et électromagnétiques proposée dans la référence [9].

Au cours de cette analyse, nous mettrons par ailleurs en évidence une sensibilité importante du processus $K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ aux effets du méson singulet η_0 .

Les stratégies des chapitres 2 et 3 peuvent être résumées comme suit :

Chapitre 2 (Courte distance, quarks lourds)	Chapitre 3 (Longue distance, quarks légers)
Expansion en la masse inverse du propagateur d'un quark lourd ↓ Opérateurs de type 'pingouin' (généralisé) ↓ Opérateurs faibles anomaux ($QCD + QED$)	1. Evolution d'un opérateur de type 'densité' dans le modèle non linéaire ↓ Opérateurs faibles anomaux (QCD) 2. Hypothèse de dominance des opérateurs faibles anomaux ($QCD + QED$)

Les conventions adoptées dans ce travail sont en général identiques à celles de la référence [10]. Elles seront rappelées au fur et à mesure. En particulier, la métrique de Minkowski est donnée par $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$, le tenseur de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est défini avec $\varepsilon^{0123} = +1$, les matrices de Gell-Mann λ^a sont normalisées de façon telle que $\text{tr} \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}$ et $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Chapitre 1

Les anomalies fortes et électromagnétiques

Dans ce premier chapitre, nous nous proposons d'analyser en détails la façon dont les symétries (globales) d'une théorie des champs se manifestent aux niveaux classique et quantique. Ceci nous permettra de mieux comprendre le phénomène d'anomalie.

Nous montrerons ensuite explicitement comment les symétries axiale et d'échelle d'une théorie de jauge spinorielle classique dans la limite de masse nulle sont brisées par des effets de boucles quantiques dans le cas des interactions électromagnétiques, tout d'abord, puis dans le cas des interactions fortes.

Enfin, une dernière section sera consacrée à un certain nombre d'implications phénoménologiques de ces anomalies pour des processus forts ou électromagnétiques. Ceci nous permettra d'illustrer la puissance des effets anomaux. Nous en profiterons également pour introduire le formalisme nécessaire à l'étude des désintégrations faibles à basse énergie du chapitre 3. Ce faisant, nous obtiendrons un premier résultat, i.e., les représentations non linéaires dominantes des opérateurs d'anomalie axiale et de trace de *QCD* en dehors de la limite chirale.

1.1 Symétries et lois de conservation

Commençons par examiner les conséquences de l'invariance d'une théorie des champs sous un groupe de transformations donné, en insistant sur le rôle joué par les équations du mouvement classiques.

De manière générale, symétries et lois de conservation sont intimement liées. Au niveau classique, ce lien est formulé de façon précise par le théorème de Noether.

1.1.1 Le théorème de Noether

Considérons une densité lagrangienne générique $\mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)$, dépendant de n champs ϕ_k et de leurs dérivées premières $\partial_\mu \phi_k$, ainsi qu'un groupe de transformations continues globales G (ou plus précisément un groupe de Lie). Une transformation infinitésimale quelconque de G connectée à l'identité peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu - i\alpha^a \tau^{\mu a} \\ \phi_k(x) \rightarrow \phi'_k(x') = \phi_k(x) + \delta \phi_k(x) \equiv \phi_k(x) - i\alpha^a T_k^a, \end{cases} \quad (1.1)$$

où α^a désigne un paramètre du groupe tandis que $\tau^{\mu a}$ et T_k^a sont définis par les équations ci-dessus. L'indice a est sommé implicitement. L'invariance de l'action classique $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)$ sous l'ensemble des transformations (1.1) implique l'existence d'une loi de conservation par paramètre de G :

$$\boxed{\partial_\mu j^{\mu a} \stackrel{edm}{=} 0}, \quad (1.2)$$

où

$$j^{\mu a} \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} i \Delta^a \phi_k + i \tau^{\mu a} \mathcal{L} \quad (1.3)$$

et

$$\Delta^a \phi_k \equiv T_k^a - \tau^{\mu a} \partial_\mu \phi_k. \quad (1.4)$$

L'équation (1.2) est connue sous le nom de 'théorème de Noether'. Notons que les courants de Noether $j^{\mu a}$ ne sont conservés que le long des solutions des équations du mouvement classiques (*edm*). Plus précisément, l'équation (1.2) découle de l'identité suivante :

$$\partial_\mu j^{\mu a} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \right) i \Delta^a \phi_k = 0, \quad (1.5)$$

qui résulte elle-même de l'invariance de S (cf. annexe A.1). La généralisation de cette identité au cas de symétries brisées nous sera utile dans la section suivante.

Examinons à présent les implications du théorème de Noether pour un champ spinoriel ψ couplé à l'électromagnétisme (le cas des interactions fortes, qui sera considéré par la suite, donne des résultats analogues) :

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (\not{P} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

avec $\not{P} \equiv \gamma^\mu P_\mu$. La dérivée covariante P_μ est définie par :

$$P_\mu \equiv i \partial_\mu + e Q A_\mu \quad (1.7)$$

avec A_μ , le champ électromagnétique et Q , la charge du spineur en unités de charge du positron e . Le tenseur de force électromagnétique est défini par $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et m désigne la masse du spineur.

Les différents groupes de transformations que nous serons amenés à considérer, ainsi que les paramètres $\tau^{\mu a}$ et T_k^a correspondants, sont regroupés dans le tableau 1. Dans ce tableau, D est la dimension canonique du champ ϕ . Ce dernier désigne tour à tour le champ spinoriel ($D = 3/2$) ou électromagnétique ($D = 1$). Dans le cas de transformations faisant intervenir les matrices de Gell-Mann λ^a , ψ doit être compris comme un vecteur colonne composé de trois spineurs¹. Les paramètres m et Q sont alors à valeur matricielle (ils sont dans ce cas notés en gras, de même que le vecteur colonne ψ).

¹Notons que les transformations $SU(3)_A$ définies dans le tableau 1 ne constituent pas à proprement parler un groupe puisque $[\gamma_5 \lambda^a, \gamma_5 \lambda^b] \approx f^{abc} \gamma_5 \lambda^c$. Cet abus de langage est cependant sans conséquences pour les applications qui nous intéressent. Ces transformations seront en effet toujours considérées en même temps que celles du groupe $SU(3)_V$, formant ainsi le produit direct $SU(3)_L \times SU(3)_R$ (cf. section 1.3.1).

G	a	$\tau^{\mu a}$	T^a
$U(1)_V :$		0	ψ
$U(1)_A :$		0	$\gamma_5 \psi$
$SU(3)_V :$	$1, \dots, 8$	0	$\frac{\lambda^a}{2} \psi$
$SU(3)_A :$	$1, \dots, 8$	0	$\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} \psi$
Translations :	$0, \dots, 3$	$i\delta_a^\mu$	0
Dilatations :		ix^μ	$-iD \phi$

Tab.1

Courants vectoriels et axiaux

Les courants de Noether associés aux symétries internes s'obtiennent en posant $\tau^{\mu a} = 0$ dans les équations (1.3) et (1.4). Après changement du signe global (conventionnel), ceux-ci s'écrivent :

$$j^{\mu a} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} (-i) T_k^a, \quad (1.8)$$

c.-à-d., pour la densité lagrangienne (1.6) et les transformations de spineurs définies ci-dessus :

$$\begin{aligned} U(1)_V : \quad j_V^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, & SU(3)_V : \quad j_V^{\mu a} &= \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi, \\ U(1)_A : \quad j_A^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi, & SU(3)_A : \quad j_A^{\mu a} &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} \psi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le courant vectoriel j_V^μ est conservé étant donné l'invariance du Lagrangien (1.6) sous le groupe $U(1)_V$. Ceci correspond à la conservation des nombres baryoniques et leptoniques en théorie des champs classique. Les courants vectoriels associés à la symétrie de saveur $SU(3)_V$ sont également conservés pour autant que $\mathbf{m} \propto \mathbf{1}_{3 \times 3}$.

La conservation des courants axiaux j_A^μ et $j_A^{\mu a}$, quant à elle, requiert la limite $\mathbf{m} = 0$. Ainsi, par exemple, dans le cas de j_A^μ , nous avons :

$$\partial_\mu j_A^\mu \stackrel{edm}{=} 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi \equiv \rho_A \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0, \quad (1.10)$$

où les équations du mouvement classiques ont été utilisées ($\overleftarrow{P}_\mu \equiv -i \overleftarrow{\partial}_\mu + eQA_\mu$) :

$$\overleftarrow{P} \psi = m \psi, \quad \overleftarrow{\psi} \overleftarrow{P}^\dagger = \overleftarrow{\psi} m. \quad (1.11)$$

Il nous sera par ailleurs utile de définir les transformations $U(1)_{em} : \psi \rightarrow \psi' = e^{-iQ\alpha}\psi$. Celles-ci constituent un sous-groupe de $SU(3)_V$ à condition que Q , diagonale et réelle, soit également de trace nulle. Le courant de Noether correspondant est donné par :

$$U(1)_{em} : j_{em}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi, \quad (1.12)$$

et est associé à la conservation de la charge électrique. Avec ces conventions, les équations du mouvement classiques pour le champ électromagnétique s'écrivent : $\partial_\nu F^{\mu\nu} = ej_{em}^\mu$.

Tenseur énergie-moment et courant de dilatation

L'invariance sous translations, quant à elle, mène à la conservation du tenseur énergie-moment canonique :

$$T^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \partial^\nu \phi_k - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1.13)$$

Dans le cas de QED , l'expression ci-dessus devient :

$$T_{QED}^{\mu\nu} = \bar{\psi}i\gamma^\mu \partial^\nu \psi - F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha - \eta^{\mu\nu} \left(\bar{\psi} \not{P} \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (1.14)$$

L'invariance sous dilatations (ou transformations d'échelle) qui se produit en l'absence de paramètres dimensionnels, d'un autre côté, se traduit par la conservation du courant :

$$j_D^\mu = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \phi_k D_k + x_\nu T^{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

avec D_k , la dimension canonique du champ ϕ_k . Dans le cas de QED , celui-ci s'écrit :

$$j_{D,QED}^\mu = \frac{3i}{2} \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - F^{\mu\nu} A_\nu + x_\nu T^{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Remarquons que $T^{\mu\nu}$, s'il est conservé, n'est ni symétrique, ni invariant sous transformations de jauge $U(1)_{em}$. Différents tenseurs 'améliorés' répondant à ces critères peuvent être construits à partir de $T^{\mu\nu}$ [11], notamment via l'utilisation des équations du mouvement classiques. La façon la plus simple d'obtenir un tel tenseur consiste à considérer la variation de l'action S par rapport à une métrique non triviale $g^{\mu\nu}(x)$:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Theta_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.17)$$

Le tenseur $\Theta_{\mu\nu}$ conservé, symétrique et invariant de jauge ainsi défini n'est autre que le terme de source des équations d'Einstein dans un espace-temps courbe. La particularisation de l'équation (1.17) au cas de QED donne, après évaluation sur un espace-temps plat² :

$$\Theta_{QED}^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left(\bar{\psi}\gamma^\mu \not{P}^\nu \psi + \bar{\psi}\gamma^\nu \not{P}^\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{P}^{\nu\dagger} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{P}^{\mu\dagger} \gamma^\nu \psi \right) - F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \bar{\psi} \not{P} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} \overleftarrow{P}^\dagger \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (1.18)$$

²Le caractère hermitien du Lagrangien de QED a été rendu explicite avant le passage à une métrique non triviale. Le traitement des champs spinoriels requiert par ailleurs le formalisme du 'vierbein' [12].

Lorsque la théorie est invariante sous dilatations, $\Theta^{\mu\nu}$ est également de trace nulle le long des solutions des équations du mouvement classiques. Nous avons en effet la relation :

$$\partial_\mu j_D^\mu \stackrel{edm}{=} \Theta_\mu^\mu. \quad (1.19)$$

L'invariance conforme de l'action de QED dans la limite chirale correspond ainsi à un tenseur amélioré sans trace, aux équations (1.11) près :

$$\partial_\mu j_{D,QED}^\mu \stackrel{edm}{=} \Theta_{\mu,QED}^\mu \stackrel{edm}{=} m\bar{\psi}\psi \equiv \rho_D \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0. \quad (1.20)$$

Que deviennent les équations (1.2), et en particulier les équations (1.10) et (1.20), dans la théorie quantifiée ?

1.1.2 Les identités de Ward

Après quantification, l'information contenue dans la théorie est encodée dans les fonctions de Green, ou fonctions de corrélation :

$$\langle 0 | T \{ \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \} | 0 \rangle, \quad (1.21)$$

notées en abrégé $\langle \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle$. L'état $|0\rangle$ désigne le 'vide', c.-à-d. l'état fondamental de la théorie, T représente le produit ordonné dans le temps, et ϕ_{k_i} sont les opérateurs de champ dans l'image de Heisenberg ($k_i = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m$). Les fonctions (1.21) peuvent également contenir des produits d'opérateurs locaux, tels par exemple les courants de Noether (1.3).

Considérons en particulier la fonction de corrélation d'un courant de Noether $j^{\mu a}$ avec m champs ϕ_{k_i} . La présence du produit ordonné dans le temps implique :

$$\begin{aligned} \partial_{x_\mu} \langle j^{\mu a}(x) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle &= \langle \partial_{x_\mu} j^{\mu a}(x) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \delta^{(4)}(x - x_i) \langle \phi_{k_1}(x_1) \dots \Delta^a \phi_{k_i}(x_i) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle, \end{aligned} \quad (1.22)$$

où ∂_{x_μ} désigne la dérivée par rapport à x^μ et $\Delta^a \phi_{k_i}$, défini en (1.4), caractérise la variation de forme du champ ϕ_{k_i} sous l'action des transformations associées à $j^{\mu a}$. Le théorème de Noether (1.2) peut-il être appliqué en tant qu'identité opératorielle dans l'équation ci-dessus ?

Afin de répondre à cette question, nous nous tournons vers le formalisme d'intégration fonctionnelle. Dans ce formalisme, les fonctions de corrélation (1.21) s'expriment de la façon suivante :

$$\langle \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi_k \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) e^{iS_T}}{\int \mathcal{D}\phi_k e^{iS_T}}. \quad (1.23)$$

Les variables d'intégration du membre de droite ont été nommées de façon identique aux opérateurs de champ ϕ_{k_i} afin de simplifier l'écriture. L'intégration se fait sur les différents champs ϕ_k contenus dans la théorie, et $S_T \equiv \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)$. L'invariance de l'action S sous les transformations (1.1) implique cette fois, sous la condition additionnelle $\mathcal{D}\phi_k = \mathcal{D}\phi'_k$ [10] :

$$\begin{aligned} &\partial_{x_\mu} \langle j^{\mu a}(x) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \delta^{(4)}(x - x_i) \langle \phi_{k_1}(x_1) \dots \Delta^a \phi_{k_i}(x_i) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le théorème de Noether subsiste donc sous forme opératorielle après quantification pourvu que l'action *et* la mesure d'intégration fonctionnelle soient invariantes. Les relations (1.24) constituent les 'identités de Ward'. Ce sont elles qui encodent à proprement parler les conséquences de l'invariance de la théorie au niveau quantique.

Ainsi, par exemple, l'invariance sous le groupe $U(1)_{em}$ de la densité lagrangienne (1.6) implique l'identité bien connue suivante ('Ward-Takahashi') :

$$\partial_{x\mu} \langle j_{em}^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \rangle = Q \delta^{(4)}(x-y) \langle \psi(y) \bar{\psi}(z) \rangle - Q \delta^{(4)}(x-z) \langle \psi(y) \bar{\psi}(z) \rangle. \quad (1.25)$$

Que deviennent les identités de Ward (1.24) lorsque la symétrie (1.1) est brisée par le Lagrangien classique ? Dans ce cas, la divergence des courants de Noether classiques devient :

$$\partial_\mu j^{\mu a} \stackrel{edm}{=} \rho^a, \quad (1.26)$$

où la densité ρ^a est définie de façon non ambiguë (i.e., sans utilisation des équations du mouvement) par la généralisation de l'équation (1.5) :

$$\partial_\mu j^{\mu a} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \right) i \Delta^a \phi_k \equiv \rho^a. \quad (1.27)$$

Cette définition correspond à celle de la densité ρ_A introduite en (1.10) dans le cas des transformations $U(1)_A$ (au signe près étant donné la normalisation adoptée pour j_A^μ), ainsi qu'à celle de la densité ρ_D introduite en (1.20) dans le cas des transformations d'échelle. Après quantification, l'invariance de la mesure d'intégration fonctionnelle implique la relation suivante entre fonctions de Green (cf. annexe A.2) :

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_{x\mu} \langle j^{\mu a}(x) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle &= \langle \rho^a(x) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \delta^{(4)}(x-x_i) \langle \phi_{k_1}(x_1) \dots \Delta^a \phi_{k_i}(x_i) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle. \end{aligned}} \quad (1.28)$$

L'équation (1.26) survit donc elle aussi à la quantification pour autant que $\mathcal{D}\phi_k = \mathcal{D}\phi'_k$.

Détaillons à présent les identités de Ward brisées (1.28) dans le cas de fonctions de Green de *QED* constituées de deux courants électromagnétiques et d'un courant axial ou de dilatation, en supposant dans un premier temps que la mesure d'intégration fonctionnelle est effectivement invariante sous les transformations correspondantes.

Identité de Ward 'naïve' pour le courant axial

Les courants électromagnétiques j_{em}^μ sont invariants sous $U(1)_A$. L'identité de Ward brisée (1.28) s'écrit donc :

$$\partial_{x\mu} \langle j_A^\mu(x) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \rangle = \langle \rho_A(x) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \rangle, \quad (1.29)$$

avec $j_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ et $\rho_A = 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi$, comme indiqué en (1.9) et (1.10), respectivement. Considérons la transformée de Fourier de l'équation ci-dessus. Celle-ci nous sera utile par la suite. Après factorisation d'une fonction delta associée à la conservation de l'énergie et du moment, nous obtenons :

$$q_\mu \mathcal{T}^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = 2m \mathcal{T}^{\alpha\beta}(k_1, k_2), \quad (1.30)$$

avec $q = k_1 + k_2$ et

$$iT^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = \int d^4y d^4z e^{ik_1y} e^{ik_2z} \left\langle j_A^\mu(0) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \right\rangle, \quad (1.31)$$

$$iT^{\alpha\beta}(k_1, k_2) = \int d^4y d^4z e^{ik_1y} e^{ik_2z} \left\langle \bar{\psi}(0) \gamma_5 \psi(0) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \right\rangle. \quad (1.32)$$

En termes de diagrammes de Feynman, cette relation implique, à l'ordre le plus bas du développement en la constante de couplage e :

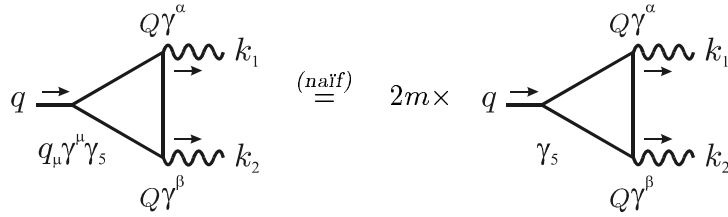


Fig.1

Chacun des diagrammes ci-dessus représente en fait la somme de deux amplitudes, une pour chaque sens de circulation du moment de la boucle. Ces diagrammes sont connus sous le nom générique de ‘diagrammes triangulaires’ (*AVV* et *PVV*, respectivement).

Identité de Ward ‘naïve’ pour le courant de dilatation

Dans le cas de transformations d’échelle, l’identité de Ward brisée (1.28) devient :

$$\begin{aligned} \partial_{x\mu} \langle j_{D,QED}^\mu(x) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \rangle &= \langle \rho_D(x) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \rangle \\ -i\delta^{(4)}(x-y) \langle (3 + y^\mu \partial_{y\mu}) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \rangle &- i\delta^{(4)}(x-z) \langle j_{em}^\alpha(y) (3 + z^\mu \partial_{z\mu}) j_{em}^\beta(z) \rangle. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Le courant de dilatation j_D^μ et la densité correspondante ρ_D ont été définis en (1.16) et (1.20), respectivement. La transformée de Fourier de cette équation s’écrit :

$$iq_\mu \Delta^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = m\Delta^{\alpha\beta}(k_1, k_2) - 3\Pi^{\alpha\beta}(k_1) + \left(1 + k_2^\mu \frac{\partial}{\partial k_2^\mu}\right) \Pi^{\alpha\beta}(k_2), \quad (1.34)$$

avec $q = k_2 - k_1$ et

$$\Delta^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = \int d^4y d^4z e^{-ik_1y} e^{ik_2z} \left\langle j_{D,QED}^\mu(0) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \right\rangle, \quad (1.35)$$

$$\Delta^{\alpha\beta}(k_1, k_2) = \int d^4y d^4z e^{-ik_1y} e^{ik_2z} \left\langle \bar{\psi}(0) \psi(0) j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(z) \right\rangle, \quad (1.36)$$

$$-i\Pi^{\alpha\beta}(k_l) = \int d^4y e^{-ik_l y} \left\langle j_{em}^\alpha(y) j_{em}^\beta(0) \right\rangle \quad (l = 1, 2). \quad (1.37)$$

Dans la limite $q \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$\left(2 - k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu}\right) \Pi^{\alpha\beta}(k) = m\Delta^{\alpha\beta}(k), \quad (1.38)$$

avec $k \equiv k_1 = k_2$. Ceci se représente graphiquement, à une boucle, de la manière suivante :

$$i \left(2 - k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \right) k \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} k \stackrel{(naïf)}{=} m \times k \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} k$$

Fig.2

L'invariance d'échelle brisée de QED implique ainsi une relation entre la fonction de polarisation du vide et le diagramme triangulaire scalaire à énergie nulle.

Les identités ci-dessus reposent cependant sur l'hypothèse d'invariance de la mesure d'intégration fonctionnelle $\mathcal{D}\phi_k$. Or cette hypothèse n'est pas nécessairement vérifiée. Un procédé de régularisation est en effet indispensable afin de donner un sens aux fonctions de corrélation (1.23). Il se peut que ce procédé, quel qu'il soit, ne puisse préserver toutes les symétries de l'action classique, de par la structure même de la théorie quantique.

1.1.3 Le phénomène d'anomalie

Lorsqu'une symétrie de l'action classique ne parvient pas à satisfaire la condition $\mathcal{D}\phi_k = \mathcal{D}\phi'_k$, elle ne subsiste pas en tant que symétrie de la théorie quantique complète. On dit qu'une anomalie se produit. Les identités de Ward exactes (1.24) et brisées (1.28) ne sont dans ce cas plus valides. Les théorèmes (1.2) et (1.26) doivent être modifiés en conséquence.

La non-invariance de la mesure d'intégration fonctionnelle peut être reliée à la nécessité de régulariser la théorie, comme indiqué ci-dessus. Alternativement, dans le formalisme de quantification canonique, le fait que les équations du mouvement dans l'image de Heisenberg ne s'appliquent pas aux courants quantifiés peut être associé aux singularités introduites dans ces courants par les relations de commutation à temps égaux³.

Les symétries axiale et d'échelle de QED discutées ci-dessus contiennent des anomalies, comme nous allons le voir dans la section suivante. Celles-ci surviennent à travers les processus de régularisation requis par les membres de gauche des identités de Ward naïves (1.29) et (1.33). Un terme anomal \mathcal{A} vient ainsi modifier la relation générique (1.28) :

$$\partial_{x\mu} \langle j^{\mu a}(x) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle = \langle (\rho^a(x) + \mathcal{A}^a(x)) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle + \sum_{i=1}^m \delta^{(4)}(x - x_i) \langle \phi_{k_1}(x_1) \dots \Delta^a \phi_{k_i}(x_i) \dots \phi_{k_m}(x_m) \rangle, \quad (1.39)$$

c.-à-d., au niveau opératoirel :

$$\partial_{\mu} j^{\mu a} \stackrel{edm}{=} \underbrace{\rho^a}_{\text{brisure explicite (classique)}} + \underbrace{\mathcal{A}^a}_{\text{brisure anomale (quantique)}}. \quad (1.40)$$

Insistons sur le fait que ce terme est une caractéristique de la structure même de la théorie. Il ne dépend donc pas du processus de régularisation particulier qui a permis de le mettre en évidence.

³ Nous ne prétendons pas donner ici une description complète du phénomène d'anomalie, mais simplement une idée des mécanismes en jeu. Les anomalies présentent de multiples facettes. Une façon encore différente de voir les choses peut ainsi par exemple être trouvée dans la référence [13].

1.2 Les anomalies axiale et de trace

Dans cette section, nous allons dériver les anomalies qui surviennent dans les symétries axiale et d'échelle d'une théorie des champs spinorielle en présence de champs de jauge. Nous traiterons tout d'abord le cas de l'anomalie axiale, puis celui de l'anomalie de trace, en mettant l'accent sur les similitudes et différences entre ces deux types d'anomalies. Les calculs seront effectués dans le cas de *QED*, puis généralisés à celui de *QCD*.

Le phénomène d'anomalie n'est pas lié à un développement en série de perturbations. Ceci ne signifie pas que tout calcul perturbatif est exclu. Il existe en fait une multitude de méthodes, perturbatives ou non perturbatives, permettant de mettre en évidence les brisures anormales des identités de Ward (1.29) et (1.33).

Nous allons opter dans ce chapitre introductif pour la méthode perturbative des relations de dispersion. Celle-ci exploite le caractère analytique des fonctions de corrélation (excepté le long d'une coupure sur l'axe réel positif) afin d'exprimer leur partie réelle à un ordre donné comme une intégrale sur leur partie imaginaire à cet ordre [14]. L'aspect infrarouge des anomalies, moins connu, transparaîtra ainsi [6, 15, 16]. Différentes dérivations perturbatives basées sur des méthodes de régularisation ultraviolette peuvent par exemple être trouvées dans les références [6, 10]. Ces dernières contiennent également le calcul non perturbatif de Fujikawa [17], qui repose sur l'analyse de la variation de la mesure d'intégration fonctionnelle $\mathcal{D}\phi_k$.

1.2.1 L'anomalie axiale

Commençons par examiner la façon dont l'identité de Ward naïve (1.30) est corrigée à une boucle. Pour ce faire, il nous faut paramétriser les fonctions de corrélation (1.31) et (1.32) en termes de facteurs de forme. Considérons pour simplifier que les photons couplés aux courants vectoriels j_V^α et j_V^β sont sur leur couche de masse, i.e., $k_1^2 = k_2^2 = 0$. Compte tenu de la statistique de Bose, la première amplitude s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = & F_1(q^2) \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma} (k_1 + k_2)^\mu + F_2(q^2) \left(\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} k_2^\beta - \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} k_1^\alpha \right) k_{1\rho} k_{2\sigma} \\ & + F_3(q^2) \left[\left(\varepsilon^{\mu\alpha\rho\sigma} k_1^\beta - \varepsilon^{\mu\beta\rho\sigma} k_2^\alpha \right) k_{1\rho} k_{2\sigma} - \varepsilon^{\mu\alpha\beta\sigma} (k_1 - k_2)_\sigma (k_1 k_2) \right]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Notez que les identités de Ward associées aux courants vectoriels j_V^α et j_V^β ont d'ores et déjà été imposées, i.e., $k_{1\alpha} \mathcal{T}^{\mu\alpha\beta} = k_{2\beta} \mathcal{T}^{\mu\alpha\beta} = 0$. La contraction de l'amplitude ci-dessus avec le moment entrant q_μ s'écrit :

$$q_\mu \mathcal{T}^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = q^2 F(q^2) \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (1.42)$$

avec $F(q^2) \equiv F_1(q^2) + F_3(q^2)$. La seconde amplitude, quant à elle, admet la décomposition tensorielle suivante :

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta}(k_1, k_2) = G(q^2) \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}. \quad (1.43)$$

L'identité de Ward naïve (1.30) devient ainsi :

$$q^2 F(q^2) = 2mG(q^2). \quad (1.44)$$

Cette relation est satisfaite par les parties imaginaires des fonctions F et G à l'ordre d'une boucle :

$$q^2 \text{Im } F^{(1)}(q^2) = 2m \text{Im } G^{(1)}(q^2). \quad (1.45)$$

En effet, celles-ci sont reliées par le théorème optique à des amplitudes de type ‘tree-level’, c.-à-d. exemptes de boucles. Leur définition ne présente donc pas d’ambiguïté liée à un processus de régularisation.

Les facteurs de forme totaux s’obtiennent à partir de leur partie imaginaire au moyen de relations de dispersion non soustraites⁴ :

$$F(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im } F(t)}{t - q^2}, \quad G(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im } G(t)}{t - q^2}. \quad (1.46)$$

Multiplions $F^{(1)}$ par $q^2 = t - (t - q^2)$ à l’intérieur de la première des ces deux équations. La relation (1.45) implique dans ce cas :

$$q^2 F^{(1)}(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{t \text{Im } F^{(1)}(t)}{t - q^2} - \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \text{Im } F^{(1)}(t) = 2mG^{(1)}(q^2) + K_A^{(1)}, \quad (1.47)$$

avec

$$K_A^{(1)} = -\frac{2m}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im } G^{(1)}(t)}{t}. \quad (1.48)$$

La partie imaginaire du facteur de forme G à une boucle s’obtient par les règles de Cutkosky :

$$\text{Im } G^{(1)}(t) = -\frac{Q^2}{2\pi} \frac{m}{t} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4m^2/t}}{1 - \sqrt{1 - 4m^2/t}} \right) \theta(t - 4m^2), \quad (1.49)$$

avec $\theta(x) \equiv 1$ pour $x \geq 0$ et $\theta(x) \equiv 0$ pour $x < 0$. L’intégration est immédiate. Nous obtenons la valeur (non nulle!) :

$$K_A^{(1)} = Q^2/2\pi^2. \quad (1.50)$$

L’identité de Ward (1.44) est donc corrigée par un terme constant $Q^2/2\pi^2$ à l’ordre d’une boucle. Celui-ci n’est autre que la valeur en $q^2 = 0$ du diagramme triangulaire PVV :

$$K_A^{(1)} = -2mG^{(1)}(0), \quad (1.51)$$

comme il ressort de l’équation (1.48).

Notez que, bien que l’intégrale (1.48) soit indépendante de m , l’intégrant correspondant s’annule en chaque point excepté à l’origine lorsque m tend vers zéro. Nous avons plus précisément :

$$\lim_{m \rightarrow 0} \left(-\frac{2m}{\pi} \frac{\text{Im } G^{(1)}(t)}{t} \right) = K_A^{(1)} \delta(t). \quad (1.52)$$

⁴Le long de la coupure $q^2 \geq 4m^2$, $F(q^2)$ est défini par : $F(q^2) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(q^2 + i\varepsilon)$.

Graphiquement, ceci se traduit par :

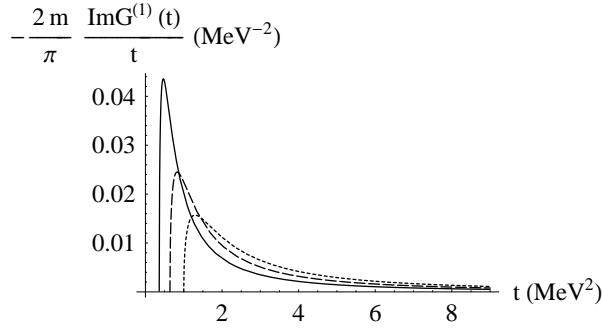


Fig.3

Traits courts : $m = 0.5 \text{ MeV}$.
 Traits longs : $m = 0.4 \text{ MeV}$.
 Continu : $m = 0.3 \text{ MeV}$.

L'équation (1.52) peut encore s'écrire, via la relation (1.45) :

$$\lim_{m \rightarrow 0} \text{Im} F^{(1)}(t) = -\pi K_A^{(1)} \delta(t). \quad (1.53)$$

L'anomalie axiale (1.48) apparaît donc dans le formalisme adopté ici comme une conséquence de la singularité qui survient dans la fonction de corrélation (1.31) en $q^2 = 0$ lorsque m est posée égale à zéro. La masse m joue ainsi le rôle de régulateur infrarouge. Le processus de régularisation est constitué des équations (1.41) et (1.46) pour $m \neq 0$. Notons encore que cette singularité, qui se manifeste par une fonction delta dans la partie imaginaire de F , se traduit par un pôle en $q^2 = 0$ dans le facteur de forme complet.

Finalement, l'identité de Ward naïve (1.30) est modifiée à une boucle de la façon suivante :

$$q_\mu T^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) = 2mT^{\alpha\beta}(k_1, k_2) + \frac{Q^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (1.54)$$

ce qui correspond au niveau opératoire à la relation :

$$\partial_\mu j_{A,QED}^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi - \frac{\alpha Q^2}{2\pi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.55)$$

avec $\alpha \equiv e^2/4\pi$ et $\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$.

Il se fait que cette équation, dérivée à l'ordre dominant du développement en la constante de couplage e , reste en fait valable aux ordres supérieurs pour autant que les paramètres nus soient remplacés par les paramètres renormalisés [18]. Le diagramme triangulaire AVV contient donc la structure complète de l'anomalie axiale.

Revenons un instant sur l'imposition des identités de Ward vectorielles en (1.41) et (1.43). Celles-ci garantissent le maintien de l'invariance de jauge $U(1)_{em}$ après quantification. De manière générale, ce maintien n'est pas automatique. En effet, il s'avère que le processus de régularisation, quel qu'il soit, ne peut à la fois préserver les identités de Ward vectorielles et axiales, mais la symétrie à sacrifier n'est pas précisée. Le choix de la symétrie axiale est dicté par l'exigence de renormalisabilité de la théorie de jauge $U(1)_{em}$.

Que devient l'équation anomale (1.55) dans le cas d'une théorie de jauge spinorielle non abélienne telle que QCD ? Pour un quark coloré de masse m , la densité lagrangienne à considérer s'écrit :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(\mathcal{P} - m)\psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}, \quad (1.56)$$

avec P_μ , la dérivée covariante sur les champs de spineurs :

$$P_\mu \equiv i\partial_\mu + g_s A_\mu, \quad (1.57)$$

et $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a \lambda^a / 2 = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig_s [A_\mu, A_\nu]$, le tenseur de force correspondant ($a = 1, \dots, 8$). Le champ du gluon est noté par $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2$ et g_s désigne la constante de couplage forte. Les courants associés à la symétrie de jauge $SU(3)_C$ sont formellement identiques à ceux trouvés en (1.9) dans le cas de la symétrie globale $SU(3)_V$. La substitution de ces courants à j_{em}^α et j_{em}^β dans l'identité de Ward anomale (1.54) produit simplement un facteur de couleur :

$$Q^2 \rightarrow Tr \left(\frac{\lambda^a \lambda^b}{2} \right) = \frac{\delta^{ab}}{2}, \quad (1.58)$$

ce qui implique pour la divergence du courant axial [19] :

$$\partial_\mu j_{A,QCD}^\mu = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi - \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}, \quad (1.59)$$

avec $\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi$ et $\tilde{G}^{\mu\nu a} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^a$. Le diagramme triangulaire AVV suffit donc cette fois encore au calcul de l'anomalie. Notons toutefois la présence de termes non linéaires en A^μ dans l'équation ci-dessus. Ceux-ci témoignent de l'existence de nouveaux diagrammes anomaux.

Pour terminer, combinons les résultats (1.55) et (1.59) pour les trois saveurs légères u , d et s . Le champ ψ désigne cette fois un vecteur colonne à trois composantes, tandis que les paramètres m et Q deviennent des matrices 3×3 :

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Outre le courant axial singulet de saveur $j_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$, certains des courants $j_A^{\mu a}$ définis en (1.9) sont également susceptibles de recevoir des contributions anomaux⁵. Introduisons la notation $j_A^{\mu 0} \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\lambda^0}{2}\psi$, avec $\lambda^0 \equiv 1_{3 \times 3}\sqrt{2/3}$. Le courant axial peut ainsi être traité comme une neuvième composante de l'octet $\{j_A^{\mu a}\}$. Les résultats qui précèdent impliquent :

$$\partial_\mu j_A^{\mu a} = i\bar{\psi} \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \mathbf{m} \right\} \gamma_5 \psi - \frac{\alpha_s}{4\pi} Tr \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} - N_C \frac{\alpha}{2\pi} Tr \left(\frac{\lambda^a}{2} \mathbf{Q}^2 \right) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (1.61)$$

avec $N_C = 3$, le nombre de couleurs, et $a = 0, \dots, 8$. Une anomalie se présente effectivement

⁵ Notons que, par rapport à la définition (1.9), chacune des composantes de ψ est cette fois elle-même constituée de trois spineurs, correspondant aux trois couleurs de QCD . Les matrices de Gell-Mann n'agissent cependant pas sur ceux-ci, et les courants $j_A^{\mu a}$ sont singulets de couleur.

pour $a = 0, 3$ et 8 :

a	$j_A^{\mu a}$	$-\frac{\alpha_s}{4\pi} Tr \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)$	$-N_C \frac{\alpha}{2\pi} Tr \left(\frac{\lambda^a}{2} Q^2 \right)$
3	$(\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 d)/2$	0	$-\frac{\alpha}{4\pi}$
8	$(\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 d - 2\bar{s}\gamma^\mu\gamma_5 s)/2\sqrt{3}$	0	$-\frac{\alpha}{4\pi\sqrt{3}}$
0	$(\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u + \bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 d + \bar{s}\gamma^\mu\gamma_5 s)/\sqrt{6}$	$-\frac{3\alpha_s}{4\pi\sqrt{6}}$	$-\frac{\alpha}{\pi\sqrt{6}}$

Tab.2

1.2.2 L'anomalie de trace

Considérons à présent la brisure anormale de l'identité de Ward naïve (1.38). Nous allons suivre pas à pas l'analyse de la section précédente afin de mettre en évidence les similitudes et différences entre les deux types d'anomalies. Compte tenu de la nécessité de conserver le courant électromagnétique, les fonctions de corrélation (1.36) et (1.37) admettent les paramétrisations suivantes :

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = \Pi(k^2) (k^\alpha k^\beta - k^2 \eta^{\alpha\beta}), \quad (1.62)$$

$$\Delta^{\alpha\beta}(k) = \Delta(k^2) (k^\alpha k^\beta - k^2 \eta^{\alpha\beta}). \quad (1.63)$$

La relation (1.38) peut ainsi se réécrire :

$$-2k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \Pi(k^2) = m \Delta(k^2). \quad (1.64)$$

De même que l'équation (1.44), l'identité ci-dessus est satisfaite par les parties imaginaires des facteurs de forme Π et Δ à l'ordre d'une boucle :

$$-2k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \text{Im} \Pi^{(1)}(k^2) = m \text{Im} \Delta^{(1)}(k^2). \quad (1.65)$$

D'autre part, l'utilisation d'une relation de dispersion non soustraite dans le membre de gauche de l'équation (1.64) permet d'écrire :

$$-2k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \Pi^{(1)}(k^2) = -\frac{2k^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im} \Pi^{(1)}(t)}{(t-k^2)^2} = -\frac{2k^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\partial \text{Im} \Pi^{(1)}(t)/\partial t}{t-k^2}, \quad (1.66)$$

où la dernière égalité est obtenue par une intégration par parties (le terme intégré est nul). Une manipulation analogue à celle utilisée en (1.47) permet à présent de conclure :

$$\begin{aligned} -2k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \Pi^{(1)}(k^2) &= -\frac{2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{t \partial \text{Im} \Pi^{(1)}(t)/\partial t}{t-k^2} + \frac{2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\partial \text{Im} \Pi^{(1)}(t)}{\partial t} \\ &= m \Delta^{(1)}(k^2) + K_D^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

avec le terme anomal

$$K_D^{(1)} = -\frac{m}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dt \frac{\text{Im} \Delta^{(1)}(t)}{t} = -m \Delta^{(1)}(0). \quad (1.68)$$

La partie imaginaire de $\Delta^{(1)}$ est donnée par :

$$\text{Im } \Delta^{(1)}(t) = -\frac{2Q^2 m^3}{\pi t^2} \frac{1}{\sqrt{1-4m^2/t}} \theta(t-4m^2). \quad (1.69)$$

Après intégration, nous obtenons :

$$K_D^{(1)} = Q^2/6\pi^2. \quad (1.70)$$

Remarquons la similarité entre les équations (1.68) et (1.48) : dans les deux cas, l'anomalie s'exprime comme une intégrale sur la partie imaginaire du terme de brisure classique ou, alternativement, comme la valeur à énergie nulle de ce terme. Dans ce cas-ci, l'anomalie peut en outre être obtenue via un processus de limite :

$$K_D^{(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \text{Im } \Pi^{(1)}(t), \quad (1.71)$$

comme il ressort de l'intégration par rapport à t de $\partial \text{Im } \Pi^{(1)}(t)/\partial t$ dans l'équation (1.67).

Notons que l'intégrand (1.68) tend à nouveau vers une fonction delta lorsque la masse du spineur tend vers zéro :

$$\lim_{m \rightarrow 0} \left(-\frac{m}{\pi} \frac{\text{Im } \Delta^{(1)}(t)}{t} \right) \rightarrow K_D^{(1)} \delta(t). \quad (1.72)$$

Graphiquement, ce processus de limite est toutefois différent de celui observé en (1.52) :

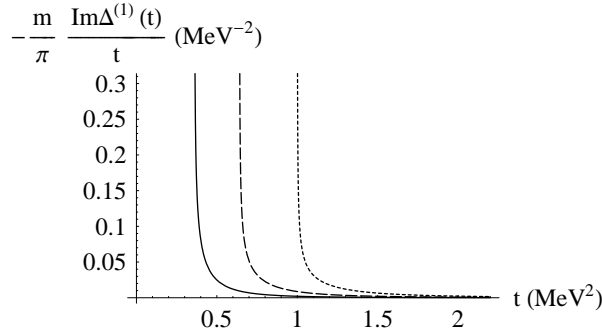


Fig.4

Traits courts : $m = 0.5$ MeV.

Traits longs : $m = 0.4$ MeV.

Continu : $m = 0.3$ MeV.

L'identité de Ward anormale (1.67) implique la modification suivante de l'équation (1.38) à l'ordre d'une boucle :

$$\left(2 - k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} \right) \Pi^{\alpha\beta}(k) = m \Delta^{\alpha\beta}(k) + \frac{Q^2}{6\pi^2} \left(k^\alpha k^\beta - k^2 \eta^{\alpha\beta} \right), \quad (1.73)$$

c.-à-d., au niveau opératoirel :

$$\partial_\mu j_{D,QED}^\mu = m \bar{\psi} \psi + \frac{\alpha Q^2}{6\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.74)$$

Remarquons à nouveau la similitude entre les équations (1.55) et (1.74).

Les brisures anormales des symétries axiale et d'échelle semblent donc être analogues. Ceci est toutefois un artéfact de la méthode utilisée. Un terme anomal de type nouveau, proportionnel au paramètre m , doit en effet être ajouté à la divergence du courant ci-dessus, à l'ordre considéré.

Il existe une façon simple, bien que heuristique, de dériver ce terme, ainsi que les corrections d'ordre supérieur en α à l'équation (1.74). La brisure anormale de la symétrie d'échelle peut en effet être associée à la nécessité de définir la théorie à une échelle μ donnée au niveau quantique : l'échelle de renormalisation. La dépendance en μ des constantes de couplage (g) et masse (m) renormalisées d'une théorie quantique des champs arbitraire (mais tout de même renormalisable) est encodée dans les fonctions $\beta(g)$ et $\gamma_m^{(g)}$ du groupe de renormalisation⁶, respectivement :

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad \gamma_m^{(g)} \equiv -\mu \frac{\partial \ln m}{\partial \mu}. \quad (1.75)$$

Intuitivement, cette dépendance confère aux paramètres g et m les propriétés de transformation suivantes sous un changement d'échelle infinitésimal⁷ :

$$g(\mu) \rightarrow g(e^{-\alpha}\mu) \simeq g(\mu) - \alpha \mu \partial g / \partial \mu = g(\mu) - \alpha \beta(g), \quad (1.76)$$

$$m(\mu) \rightarrow m(e^{-\alpha}\mu) \simeq m(\mu) - \alpha \mu \partial m / \partial \mu = m(\mu) + \alpha m \gamma_m^{(g)}. \quad (1.77)$$

La variation de l'action correspondante est donnée par :

$$\delta S_{ano} = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \delta g + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} \delta m \right) = -\alpha \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \beta(g) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} m \gamma_m^{(g)} \right). \quad (1.78)$$

L'expression entre parenthèses peut être interprétée comme une contribution additionnelle, d'origine quantique, à la divergence du courant de dilatation classique. Ceci nous mène à l'équation anormale :

$$\partial_\mu j_D^\mu = \rho_D + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} \beta(g) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} m \gamma_m^{(g)}. \quad (1.79)$$

L'anomalie (1.78) est indifféremment appelée 'anomalie d'échelle' ou 'anomalie de trace' étant donné la relation (1.19). Le résultat ci-dessus peut par ailleurs être généralisé à plusieurs masses et constantes de couplage.

Dans le cas de QED , nous avons explicitement [20] :

$$\partial_\mu j_{D,QED}^\mu = m(1 + \gamma_m^{(e)}) \bar{\psi} \psi + \frac{\beta(e)}{2e} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.80)$$

La fonction $\beta(e)$ est donnée à l'ordre dominant par : $\beta(e) = 4e^3/3(4\pi)^2 + \mathcal{O}(e^5)$, ce qui correspond au coefficient anomal suivant (avec $Q \neq 1$) :

$$\frac{\beta(eQ)}{2eQ} = \frac{\alpha Q^2}{6\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (1.81)$$

⁶ La fonction $\gamma_m^{(g)}$ est connue sous le nom de 'dimension anormale'.

⁷ Le paramètre α qui apparaît dans les équations (1.76) et (1.77) est bien entendu celui du tableau 1 (p.7), et n'a rien à voir avec la constante de structure fine.

Ce coefficient est bien identique à celui obtenu en (1.74). Le fait que le premier terme de la fonction bêta ait été reproduit par l'analyse de l'identité de Ward naïve (1.38) à l'ordre d'une boucle est bien sûr lié à la présence de la fonction de polarisation du vide $\Pi(k)$. Le terme proportionnel à $\gamma_m^{(e)}$, d'un autre côté, ne s'est pas manifesté. Il requiert visiblement l'analyse d'autres identités de Ward.

Dans le cas de QCD , la divergence du courant de dilatation est donnée par une expression analogue à celle de l'équation (1.80), avec $F_{\mu\nu}$ remplacé par $G_{\mu\nu}^a$. Le premier terme de la fonction bêta correspondante s'écrit : $\beta(g_s) = -(11N_C/3 - 2n_f/3)g_s^3/(4\pi)^2 + \mathcal{O}(g_s^5)$, c.-à-d. :

$$\frac{\beta(g_s)}{2g_s} = -\frac{\alpha_s}{8\pi} \left(\frac{11N_C}{3} - \frac{2n_f}{3} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (1.82)$$

où n_f désigne le nombre de saveurs actives.

En définitive, l'anomalie de trace peut être vue comme un analogue scalaire à l'anomalie axiale, avec toutefois un certain nombre de différences, dont voici les plus frappantes :

- L'anomalie de trace n'est pas contenue entièrement dans la limite $m \rightarrow 0$. Elle comprend en effet des termes proportionnels aux masses des champs de matière, contrairement à l'anomalie axiale.
- La structure de l'anomalie de trace n'est pas donnée complètement par le premier terme du développement perturbatif en la constante de couplage g de la théorie considérée.
- Dans le cas de QCD , l'anomalie de trace est non seulement sensible aux contributions des boucles de quarks, mais également à celles des gluons virtuels, comme en témoigne le premier terme de l'équation (1.82).

D'autre part, de même que l'anomalie axiale peut être vue comme le résultat d'un conflit entre invariance de jauge et invariance sous $U(1)_A$, on peut montrer que l'anomalie d'échelle provient d'une incompatibilité entre les identités de Ward associées aux translations, aux dilatations et aux transformations de jauge [16].

Enfin, notons pour référence ultérieure la divergence du courant de dilatation dans le cas des trois saveurs légères u , d et s couplées aux interactions fortes et électromagnétiques, au premier ordre en α et à tous les ordres en α_s (ou plus précisément aux ordres $\alpha_s^n \alpha^0$) :

$$\partial_\mu j_D^\mu = \bar{\psi} \mathbf{m} \left(1 + \gamma_m^{(e)} + \gamma_m^{(g_s)} \right) \psi + \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + N_C \frac{\alpha}{6\pi} \text{Tr}(\mathbf{Q}^2) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.83)$$

où les dimensions anomales $\gamma_m^{(e)}$ et $\gamma_m^{(g_s)}$ sont à valeur matricielle.

1.3 Implications phénoménologiques

Nous avons vu que les équations classiques (1.10) et (1.20) devaient être modifiées après quantification, en présence d'interactions fortes ou électromagnétiques. Les effets observables de ces modifications sont multiples. Nous n'allons pas tenter ici une revue systématique, mais plutôt nous concentrer sur ceux de ces effets qui nous seront utiles dans l'analyse du chapitre 3 (en poursuivant toutefois une étude comparée des deux types d'anomalies). Ceux-ci suffiront d'ailleurs à illustrer l'importance des anomalies au niveau phénoménologique, ce qui constitue l'objectif principal de cette section.

Nous allons auparavant introduire un modèle effectif, le 'Modèle Sigma Non Linéaire', afin de paramétriser les interactions fortes des mésons pseudoscalaires légers à basse

énergie, impossibles à décrire par des méthodes perturbatives en g_s . Ce modèle n'est pas à proprement parler indispensable à l'analyse des effets anomaux que nous souhaitons effectuer. Au 'tree-level', la plupart de ses prédictions sont en effet identiques à celles des théorèmes d'algèbre des courants⁸. Or la formulation des sections suivantes dans ce langage permettra de déjà mettre en place le formalisme utilisé dans le chapitre 3.

1.3.1 Préliminaire : le Modèle Sigma Non Linéaire

Dans la limite de quarks de masse nulle, le Lagrangien fort associé aux saveurs légères u , d et s est invariant sous les symétries globales $SU(3)_V$ et $SU(3)_A$ (cf. section 1.1.1). Cette propriété d'invariance ne se manifeste cependant pas, au niveau du spectre hadronique, par la présence de multiplets de $SU(3)$ quasi dégénérés de parités opposées, comme ce serait le cas si la symétrie était réalisée dans le mode de Wigner-Weyl. Les faibles valeurs des masses des huit pseudoscalaires les plus légers⁹ [21],

$$\begin{aligned} m_{\pi^0} &= 134.9766 \pm 0.0006 \text{ MeV}, & m_{\pi^\pm} &= 139.57018 \pm 0.00035 \text{ MeV}, \\ m_{K^0, \bar{K}^0} &= 497.648 \pm 0.022 \text{ MeV}, & m_{K^\pm} &= 493.677 \pm 0.016 \text{ MeV}, \\ m_\eta &= 547.75 \pm 0.12 \text{ MeV}, & m_{\eta'} &= 957.78 \pm 0.14 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

suggèrent au contraire une réalisation de la symétrie $SU(3)_A$ dans le mode de Nambu-Goldstone, avec les composantes de l'octet (π, K, η) comme bosons de masse (quasi) nulle caractéristiques.

Introduisons la notation $\psi_L^R \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi$. Les composantes gauches (L) et droites (R) de ψ se transforment indépendamment sous une transformation combinée de $SU(3)_V$ et $SU(3)_A$:

$$\psi_{L(R)} \rightarrow \psi'_{L(R)} = e^{-i\alpha_{L(R)}^a \lambda^a / 2} \psi_{L(R)}, \quad \alpha_L^{Ra} \equiv \alpha_V^a \pm \alpha_A^a \quad (a = 1, \dots, 8), \quad (1.85)$$

ce qui définit le groupe chiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Les propriétés de transformation non linéaires des pseudo-bosons de Goldstone (π, K, η) peuvent s'écrire facilement en termes de α_L^a et α_R^a à condition de rassembler les champs correspondants au sein d'une matrice 3×3 unitaire unimodulaire \hat{U} :

$$\hat{U} \rightarrow \hat{U}' = \left(e^{-i\alpha_L^a \lambda^a / 2} \right) \hat{U} \left(e^{i\alpha_R^a \lambda^a / 2} \right). \quad (1.86)$$

Différentes paramétrisations de \hat{U} sont possibles. Nous adopterons la représentation exponentielle :

$$\hat{U} = e^{i\sqrt{2}\hat{\Phi}/F_\pi} = 1_{3 \times 3} + \frac{i\sqrt{2}}{F_\pi} \hat{\Phi} - \frac{1}{F_\pi^2} \hat{\Phi}^2 - \frac{i\sqrt{2}}{3F_\pi^3} \hat{\Phi}^3 + \frac{1}{6F_\pi^4} \hat{\Phi}^4 + \dots, \quad (1.87)$$

où F_π a les dimensions d'une masse et

$$\hat{\Phi} \equiv \frac{\lambda^a \varphi^a}{\sqrt{2}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\pi^3}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^3}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & K^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

⁸Nous serons toutefois amenés à considérer la limite de grand N_C , qui n'est habituellement pas incorporée dans ces théorèmes, afin d'introduire explicitement l'anomalie axiale forte dans le modèle non linéaire.

⁹Ces valeurs sont celles que nous utiliserons par la suite. Le η' , plus lourd, a été indiqué afin de permettre une référence ultérieure.

D'autre part, l'anomalie $U(1)_A$ disparaît dans la limite de grand N_C [22]. Le groupe chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ peut donc être étendu à $U(3)_L \times U(3)_R$ dans cette limite. La prise en compte du neuvième boson de Goldstone généré dans ce cas par la brisure spontanée de la symétrie $U(1)_L \times U(1)_R$ vers le sous-groupe diagonal $U(1)_V$ nécessite l'adjonction d'une phase à la matrice \widehat{U} . La représentation exponentielle est ainsi généralisée de la façon suivante :

$$U = e^{i\sqrt{2}\Phi/F_\pi} = e^{i\sqrt{2}\eta_0/\sqrt{3}F_\pi}\widehat{U}, \quad \Phi = \widehat{\Phi} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}}1_{3 \times 3}. \quad (1.89)$$

En pratique, bien sûr, le nombre de couleurs n'est pas infini et les masses des quarks ne sont pas nulles. Ces deux limites constituent néanmoins, après introduction des corrections dominantes, un 'ordre zéro' raisonnable à partir duquel d'autres corrections peuvent éventuellement être effectuées (on parle alors de 'Théorie de Perturbations Chirales', notée *ChPT*) [23–25]. Le Lagrangien effectif à basse énergie décrivant les interactions des neuf degrés de liberté (π, K, η_8, η_0) de façon compatible avec la symétrie chirale à l'ordre le plus bas de l'expansion combinée en les moments, les masses des quarks et $1/N_C$ est celui du 'Modèle Sigma Non Linéaire' [26] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NL} = & \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) + \frac{F_\pi^2}{4} r \text{Tr} \left(\mathbf{m} U^\dagger + U \mathbf{m}^\dagger \right) \\ & + \frac{F_\pi^2}{16N_C} m_0^2 \left(\text{Tr} \ln U - \text{Tr} \ln U^\dagger \right)^2 + \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} \left(\lambda \left(U U^\dagger - 1_{3 \times 3} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.90)$$

où la matrice des paramètres de Lagrange λ implémente la contrainte $U U^\dagger = 1$. Notons que la double invariance sous P et sous CP a été imposée.

La matrice de masse des quarks \mathbf{m} est diagonale et réelle. Nous avons toutefois gardé une expression compatible avec un paramètre de brisure explicite non hermitien en vue de l'analyse du chapitre 3.

Le développement de l'exponentielle dans le second terme du Lagrangien (1.90) permet d'exprimer les masses des pions et des kaons en termes de celles des quarks et de la constante r , liée au condensat $\langle \bar{q}q \rangle$ ($q = u, d, s$) :

$$m_{\pi^+}^2 = \frac{r}{2} (m_u + m_d), \quad m_{K^+}^2 = \frac{r}{2} (m_u + m_s), \quad m_{K^0}^2 = \frac{r}{2} (m_d + m_s). \quad (1.91)$$

En outre, la masse du π^0 est égale à celle du π^+ à des corrections d'ordre $(m_u - m_d)^2$ près. Celles-ci proviennent du mélange à trois particules $\pi^3 - \eta_8 - \eta_0 \rightarrow \pi^0 - \eta - \eta'$, également généré par le terme de masses des quarks du Lagrangien (1.90), et qui requiert une brisure de l'invariance sous $SU(2)_I$.

Notons que, dans le cas de particules chargées, la comparaison des expressions ci-dessus aux masses expérimentales (1.84) nécessite la prise en compte des effets électromagnétiques. Ceux-ci peuvent être estimés facilement à l'aide du théorème de Dashen [27] :

$$\left(m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 \right)_{em} \simeq \left(m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 \right)_{em}, \quad (1.92)$$

où le membre de droite est donné en bonne approximation par la différence des masses observées $\delta_{em}^2 \equiv m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 \simeq (35.5 \text{ MeV})^2$.

Le troisième terme du Lagrangien (1.90), responsable de la brisure explicite de la symétrie $U(1)_A$ à l'ordre le plus bas (non trivial) de l'expansion en $1/N_C$, résulte par

ailleurs en une contribution supplémentaire m_0 à la masse du méson η_0 . Celle-ci modifie de manière dramatique les paramètres du mélange $\pi^3\text{-}\eta_8\text{-}\eta_0$ (ou simplement $\eta_8\text{-}\eta_0$ dans la limite d'isospin). Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

Introduisons la définition $\bar{m} \equiv (m_u + m_d)/2$. Dans la limite d'isospin, $m_u = m_d = \bar{m}$. Soient m_π et m_K , les masses issues de l'équation (1.91) dans cette limite. Tenant compte des effets électromagnétiques mentionnés ci-dessus, ces deux quantités peuvent être estimées à partir des masses (1.84) de la façon suivante :

$$m_K^2 \simeq (m_{K^+}^2 - \delta_{em}^2 + m_{K^0}^2)/2 \simeq (495 \text{ MeV})^2, \quad m_\pi \simeq m_{\pi^0}. \quad (1.93)$$

Explicitons encore les équations du mouvement associées au Lagrangien (1.90) :

$$\partial_\mu (U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{r}{2} (\mathbf{m} U^\dagger - U \mathbf{m}^\dagger) = \frac{m_0^2}{2N_C} \text{Tr} (\ln U - \ln U^\dagger), \quad (1.94)$$

$$\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \frac{r}{2} (\mathbf{m} U^\dagger + U \mathbf{m}^\dagger) = -\lambda. \quad (1.95)$$

Examinons à présent la façon dont les anomalies de QCD (1.61) et (1.83) se manifestent au niveau de la théorie effective (1.90).

Considérons tout d'abord la brisure anormale de la symétrie $U(1)_A$. De manière générale, l'invariance sous $U(3)_A$ du modèle non linéaire est brisée explicitement par les deuxième et troisième termes de l'équation (1.90). Les courants de Noether correspondants,

$$J_A^{\mu a} = i \frac{F_\pi^2}{2} \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \{U, \partial^\mu U^\dagger\} \right) \quad (a = 0, \dots, 8), \quad (1.96)$$

ne sont donc pas conservés le long des solutions des équations du mouvement classiques (1.94) et (1.95). Plus précisément, les densités de Noether associées, définies en (1.27), ne sont pas identiquement nulles. Nous avons plutôt :

$$\begin{aligned} \varrho_A^a &= -i \frac{F_\pi^2}{4} r \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} (\{ \mathbf{m}, U^\dagger \} - \{ U, \mathbf{m}^\dagger \}) \right) \\ &\quad + i \frac{F_\pi^2}{2N_C} m_0^2 \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) \text{Tr} (\ln U - \ln U^\dagger). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Il est trivial de vérifier que $\partial_\mu J_A^{\mu a}$ est bien égal à ϱ_A^a le long des solutions de l'équation (1.94). La comparaison des équations (1.61) et (1.97) dans le cas d'une matrice \mathbf{m} diagonale et réelle (et en l'absence de corrections électromagnétiques, bien entendu) permet d'obtenir, pour $a = 0$, les représentations chirales dominantes des termes de brisure explicite et anormale de la symétrie $U(1)_A$:

$$2i \bar{\psi} \mathbf{m} \gamma_5 \psi \rightarrow i \frac{F_\pi^2}{2} r \text{Tr} (\mathbf{m} (U - U^\dagger)), \quad (1.98)$$

$$-\frac{3\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \rightarrow i \frac{F_\pi^2}{2} m_0^2 \text{Tr} (\ln U - \ln U^\dagger) = -F_\pi m_0^2 \sqrt{6} \eta_0. \quad (1.99)$$

Cette identification terme à terme est permise parce que, (i) au niveau fondamental comme au niveau effectif, les équations du mouvement n'ont pas été utilisées et (ii) au niveau effectif, les effets de boucles (et donc les corrections éventuelles au théorème de Noether) sont d'ordre supérieur.

D'autre part, l'équation (1.96) permet d'identifier F_π à la constante de désintégration du pion, à l'ordre p^2 . Cette dernière est en effet définie par :

$$i\sqrt{2}\tilde{F}_\pi p^\mu \equiv \langle 0 | \bar{d}\gamma^\mu \gamma_5 u | \pi^+(\mathbf{p}) \rangle, \quad (1.100)$$

or l'opérateur $\bar{d}\gamma^\mu \gamma_5 u$ peut être représenté par la combinaison de courants $J_A^{\mu 1} - iJ_A^{\mu 2} = -F_\pi \sqrt{2} \partial^\mu \pi^+ + \dots$ à l'ordre p^2 . Expérimentalement, $F_\pi = 92.4$ MeV [21].

La présence des paramètres dimensionnels F_π , $r\mathbf{m}$ et m_0 dans le Lagrangien (1.90) brise par ailleurs l'invariance de l'action correspondante sous les transformations d'échelle. La représentation non linéaire du courant de dilatation s'écrit :

$$J_D^\mu = x_\nu \left[\frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} \left(\partial^\nu U \partial^\mu U^\dagger + \partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger \right) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{NL} \right]. \quad (1.101)$$

La quantité entre crochets n'est autre que le tenseur énergie-moment amélioré $\Theta_{NL}^{\mu\nu}$. La densité de Noether associée est non nulle puisque le modèle n'est pas invariant sous dilatations. Nous avons explicitement :

$$\begin{aligned} \varrho_D &= -\frac{F_\pi^2}{2} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) - F_\pi^2 r \text{Tr} \left(\mathbf{m} U^\dagger + U \mathbf{m}^\dagger \right) \\ &\quad - \frac{F_\pi^2}{4N_C} m_0^2 \left(\text{Tr} \ln U - \text{Tr} \ln U^\dagger \right)^2. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Remarquons que ϱ_D est bien égal à $\Theta_{\mu,NL}^\mu$ (sans qu'il soit nécessaire d'utiliser les équations du mouvement). Comparons à présent les équations (1.83) et (1.102) pour une matrice \mathbf{m} diagonale et réelle (et ignorant toujours les effets de l'anomalie de QED). Le terme proportionnel à m_0^2 dans l'équation ci-dessus, lié à la dynamique des instantons, n'a pas d'équivalent au niveau de la divergence du courant de dilatation (1.83). Nous avons donc :

$$\bar{\psi} \mathbf{m} \left(1 + \gamma_m^{(g_s)} \right) \psi \rightarrow -F_\pi^2 r \text{Tr} \left(\mathbf{m} \left(U + U^\dagger \right) \right), \quad (1.103)$$

$$\frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \rightarrow -\frac{F_\pi^2}{2} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right). \quad (1.104)$$

Ceci correspond à une matrice de dimensions anomales $\gamma_m^{(g_s)}$ égale à $3 \times 1_{3 \times 3}$ étant donné la représentation chirale de l'opérateur $\bar{\psi} \mathbf{m} \psi$ fournie par le terme de masses du Lagrangien (1.90).

Notons qu'un terme proportionnel à $\text{Tr} \left(\mathbf{m} \left(U + U^\dagger \right) \right)$ n'est habituellement pas exclu de la bosonisation de l'opérateur anomal $G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}$ à l'ordre dominant. De notre point de vue, cependant, le second terme de l'équation (1.102) ne peut être attribué (en tout ou en partie) à l'anomalie $G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}$ puisqu'il est le pur produit de la brisure de la symétrie d'échelle par la matrice de masses des quarks \mathbf{m} , les équations du mouvement n'ayant pas été utilisées.

Les équations (1.99) et (1.104) présentent un intérêt particulier : elles permettent l'estimation des éléments de matrice hadroniques à basse énergie des opérateurs anomaux, potentiellement importants mais impossibles à obtenir par une résolution perturbative de QCD . Nous avons ainsi, par exemple :

$$\left\langle \eta_0 \left| \frac{-3\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle \simeq -F_\pi \sqrt{6} m_0^2, \quad (1.105)$$

$$\left\langle \pi^+(\mathbf{p}_1)\pi^-(\mathbf{p}_2) \left| \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle \simeq 2p_1 p_2. \quad (1.106)$$

Nous reviendrons sur ces équations (et sur leur comparaison avec les estimations des références [28] et [29]) dans la section 1.3.4.

Pour terminer, rassemblons ici les valeurs de quelques temps de vie et largeurs de désintégration qui nous seront utiles par la suite [21] :

$$\begin{aligned} \tau_{\pi^0} &= (8.4 \pm 0.6) 10^{-17} \text{ s}, & \tau_{K^\pm} &= (1.2384 \pm 0.0024) 10^{-8} \text{ s}, \\ \Gamma_\eta &= 1.29 \pm 0.07 \text{ KeV}, & \Gamma_{\eta'} &= 0.202 \pm 0.016 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Les états propres de saveur K^0 et \bar{K}^0 , quant à eux, diffèrent des états étranges neutres physiques étant donné la possibilité de transitions $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ au second ordre en interactions faibles. Cette distinction, qui pouvait être ignorée en (très) bonne approximation au niveau des masses (1.84), ne peut plus l'être au niveau des temps de vie. Dans la limite de conservation de CP , que nous adopterons tout au long de ce travail, les états physiques K_S^0 et K_L^0 coïncident avec les états propres de CP K_1^0 et K_2^0 :

$$K_S^0 \simeq K_1^0 \equiv \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}} \quad (J^{PC} = 0^{- -}), \quad K_L^0 \simeq K_2^0 \equiv \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}} \quad (J^{PC} = 0^{- +}). \quad (1.108)$$

Les temps de vie correspondants sont donnés par [21] :

$$\tau_{K_S^0} = (0.8958 \pm 0.0006) 10^{-10} \text{ s}, \quad \tau_{K_L^0} = (5.18 \pm 0.04) 10^{-8} \text{ s}. \quad (1.109)$$

1.3.2 La masse du η' et la masse des nucléons

Nous avons vu que la brisure anormale de la symétrie $U(1)_A$ de QCD était à l'origine d'un terme de masse effectif m_0^2 au niveau du Lagrangien (1.90). Il existe un équivalent scalaire à ce phénomène de génération de masse : l'anomalie d'échelle de QCD , elle aussi, affecte le spectre hadronique.

Examinons ces effets anormaux de plus près, à commencer par celui de l'anomalie axiale, responsable d'une modification du mélange η_8 - η_0 .

Le mélange η_8 - η_0 et la masse du η'

De manière générale, toute interaction qui brise la symétrie $SU(3)_V$ est susceptible d'induire un mélange entre la huitième composante de l'octet η_8 et le singulet η_0 . Considérons un mélange à deux particules. La matrice de masses carrées correspondante s'écrit :

$$\mathbf{M}_{80}^2 = \begin{pmatrix} m_{\eta_8}^2 & m_{80}^2 \\ m_{80}^2 & m_{\eta_0}^2 \end{pmatrix}. \quad (1.110)$$

Supposons en outre un angle de mélange θ_P indépendant de l'énergie. Les états physiques η et η' s'expriment dans ce cas en termes de η_8 et de η_0 de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_P & -\sin\theta_P \\ \sin\theta_P & \cos\theta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad (1.111)$$

avec $\theta_P \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Ces états diagonalisent la matrice (1.110). Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}2\theta_P &= \frac{2m_{80}^2}{m_{\eta_0}^2 - m_{\eta_8}^2}, \\ m_\eta^2 &= \frac{m_{\eta_8}^2 + m_{\eta_0}^2}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(m_{\eta_0}^2 - m_{\eta_8}^2)^2 + 4(m_{80}^2)^2}, \\ m_{\eta'}^2 &= \frac{m_{\eta_8}^2 + m_{\eta_0}^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(m_{\eta_0}^2 - m_{\eta_8}^2)^2 + 4(m_{80}^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Les signes supérieurs correspondent à la situation $m_{\eta_0}^2 > m_{\eta_8}^2$ tandis que les signes inférieurs décrivent le cas $m_{\eta_0}^2 < m_{\eta_8}^2$.

Une violation de l'invariance sous $SU(2)_I$ a bien sûr pour effet d'étendre le mélange ci-dessus aux trois états π^3 - η_8 - η_0 . Dans le modèle non linéaire, en particulier, la matrice de masses carrées des mésons neutres est ainsi donnée par :

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} \frac{r}{2}(m_u + m_d) & \frac{r}{2\sqrt{3}}(m_u - m_d) & \frac{r}{\sqrt{6}}(m_u - m_d) \\ \frac{r}{2\sqrt{3}}(m_u - m_d) & \frac{r}{6}(m_u + m_d + 4m_s) & \frac{r}{3\sqrt{2}}(m_u + m_d - 2m_s) \\ \frac{r}{\sqrt{6}}(m_u - m_d) & \frac{r}{3\sqrt{2}}(m_u + m_d - 2m_s) & m_0^2 + \frac{r}{3}(m_u + m_d + m_s) \end{pmatrix}. \quad (1.113)$$

Les éléments $\pi^3\eta_8$ et $\pi^3\eta_0$ de cette matrice nous seront utiles dans le chapitre 3.

Revenons toutefois pour le moment à un mélange à deux particules, c.-à-d., au niveau du Lagrangien (1.90), à l'approximation $m_u = m_d$. Les masses des quarks ainsi que le paramètre r peuvent être éliminés au profit des masses m_π et m_K grâce aux relations (1.91), considérées dans la limite d'isospin :

$$\mathbf{M}_{80,NL}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4m_K^2 - m_\pi^2) & \frac{-2\sqrt{2}}{3}(m_K^2 - m_\pi^2) \\ \frac{-2\sqrt{2}}{3}(m_K^2 - m_\pi^2) & m_0^2 + \frac{1}{3}(2m_K^2 + m_\pi^2) \end{pmatrix}. \quad (1.114)$$

Remarquons au passage la relation de Gell-Mann-Okubo : $m_{\eta_8}^2 = (4m_K^2 - m_\pi^2)/3$. L'invariance de la trace de la matrice ci-dessus sous changement de base permet d'estimer la contribution anormale m_0^2 :

$$m_0^2 = m_\eta^2 + m_{\eta'}^2 - 2m_K^2 \simeq (853 \text{ MeV})^2. \quad (1.115)$$

Les équations (1.112) impliquent à présent :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}2\theta_P &= \frac{-4\sqrt{2}(m_K^2 - m_\pi^2)}{3m_0^2 - 2(m_K^2 - m_\pi^2)} \simeq -0.74, & \text{c.-à-d. } \theta_P &\simeq -18.3^\circ, \\ m_\eta^2 &= m_K^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{m_0^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4(m_K^2 - m_\pi^2)}{3m_0^2} + \frac{4(m_K^2 - m_\pi^2)^2}{m_0^4}} \\ &\simeq (500 \text{ MeV})^2, \\ m_{\eta'}^2 &= m_K^2 + \frac{m_0^2}{2} + \frac{m_0^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4(m_K^2 - m_\pi^2)}{3m_0^2} + \frac{4(m_K^2 - m_\pi^2)^2}{m_0^4}} \\ &\simeq (984 \text{ MeV})^2. \end{aligned} \quad (1.116)$$

Les masses (1.116) reproduisent les valeurs expérimentales (1.84) avec une erreur de l'ordre de 10% (inférieure, donc, à la précision attendue du modèle non linéaire, de l'ordre de 25%). Signalons que des corrections d'ordre supérieur en $1/N_C$ sont habituellement invoquées afin d'améliorer ce résultat [30–32].

En l'absence d'anomalie (i.e., $m_0 = 0$), nous aurions obtenu un angle de mélange idéal $\theta_P = \arctg(1/\sqrt{2}) \simeq 35^\circ$, ainsi qu'une dégénérescence des états π^0 et η' , en contradiction flagrante avec les données (1.84) [33]. Ceci témoigne de la puissance des anomalies au niveau phénoménologique¹⁰.

Il existe bien entendu d'autres façons d'extraire l'angle de mélange (1.111) à partir des masses des neuf pseudoscalaires légers. Suivant une procédure répandue, les paramètres $m_{\eta_0}^2$ et m_{80}^2 sont exprimés en fonction de $m_{\eta_8}^2$ et des valeurs expérimentales m_η^2 et $m_{\eta'}^2$ à l'aide des propriétés d'invariance de la trace et du déterminant de la matrice (1.110) sous changement de base. Le paramètre $m_{\eta_8}^2$ est alors supposé satisfaire la relation de Gell-Mann-Okubo corrigée d'une quantité δ :

$$m_{\eta_8}^2 = \frac{1}{3}(4m_K^2 - m_\pi^2)(1 + \delta). \quad (1.117)$$

L'angle θ_P ainsi obtenu est toutefois très sensible à la valeur de δ , calculée en théorie de perturbations chirales $SU(3)_L \times SU(3)_R$ [34]. De plus, la paramétrisation (1.111) n'est plus nécessairement valide au-delà du 'tree-level'.

La discussion d'une détermination précise de la structure des états physiques η et η' à partir de l'analyse simultanée d'un ensemble de données expérimentales dépasse le cadre de ce travail. Signalons simplement qu'un angle de mélange de l'ordre de -20° (compatible, donc, avec la valeur obtenue ici) a longtemps été privilégié. D'autres modélisations du mélange η_8 - η_0 ont cependant été proposées plus récemment [35]. Notons également qu'une éventuelle composante gluonique ou $c\bar{c}$ n'est pas exclue.

La masse des nucléons

De même que l'anomalie axiale affecte le spectre des mésons, l'anomalie de trace affecte le spectre des baryons, comme nous allons le voir maintenant dans le cas des nucléons.

La valeur moyenne de la trace du tenseur énergie-moment pour l'état à un nucléon N est donnée par :

$$\begin{aligned} m_N \bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) &= \langle N(\mathbf{p}) | \Theta_\mu^\mu | N(\mathbf{p}) \rangle \\ &= \left\langle N(\mathbf{p}) \left| \bar{\psi} m (1 + \gamma_m^{(g_s)}) \psi + \frac{\beta(g_s)}{2g_s} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right| N(\mathbf{p}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.118)$$

où $u(\mathbf{p})$ désigne l'onde plane d'impulsion \mathbf{p} et m_N est la masse du nucléon. La fonction β ci-dessus correspond à celle de l'équation (1.82) avec $N_C = n_f = 3$. Les contributions des quarks lourds $q_h = c, b, t$ se découplent dans la limite $m_{q_h} \rightarrow \infty$, et peuvent de ce fait être négligées¹¹ [36].

L'équation (1.118) indique que la masse des nucléons reçoit non seulement des contributions des masses des quarks de valence u et d , mais également de la masse du quark étrange s et de l'anomalie bêta de QCD . Il s'avère en fait que cette dernière domine.

¹⁰Notons que la valeur particulièrement élevée de la masse m_0 est par ailleurs responsable de la qualité de la symétrie d'isospin dans le spectre des pseudoscalaires légers.

¹¹Nous reviendrons sur ce point dans la section 2.3, au premier ordre en α_s .

Les termes proportionnels à $m_{u,d}$ et à m_s reproduisent en effet environ 6% et 40% de la valeur de m_N , respectivement, tandis que l'anomalie rend compte des 54% restants, d'après l'analyse de la référence [37]. Si les masses courantes des quarks légers étaient nulles, plus de la moitié de la masse du nucléon serait ainsi tout de même générée grâce à la brisure anormale de la symétrie d'échelle de *QCD*.

Notons qu'un pendant pseudoscalaire à l'équation (1.118) peut être obtenu simplement en remplaçant la trace du tenseur énergie-moment par la divergence du courant axial singulet de saveur. L'élément de matrice résultant est dans ce cas lié à la charge axiale g_A^0 , caractéristique de la structure du spin du proton [38].

1.3.3 Désintégrations radiatives de (pseudo)scalaires légers

Tournons-nous à présent vers les anomalies électromagnétiques. Nous allons analyser en particulier la façon dont les termes anomaux $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ de l'équation (1.61) et $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ de l'équation (1.83) permettent de décrire les désintégrations radiatives des pseudoscalaires et des scalaires légers, respectivement.

Les désintégrations $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma$

L'incorporation de l'anomalie axiale de *QED* dans le formalisme des Lagrangiens chiraux se fait au travers de l'action de Wess-Zumino-Witten [25,39], à l'ordre dominant. Alternativement, dans le modèle non linéaire (1.90), le terme anormal $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ de l'équation (1.61) peut simplement être ajouté à la divergence du courant axial (1.97), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_A^{\mu a} &= i\frac{F_\pi^2}{4} r \text{Tr} \left(\left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \mathbf{m} \right\} (U - U^\dagger) \right) \\ &\quad + i\frac{F_\pi^2}{2N_C} m_0^2 \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) \text{Tr} (\ln U - \ln U^\dagger) \\ &\quad - N_C \frac{\alpha}{2\pi} \text{Tr} \left(\frac{\lambda^a}{2} \mathbf{Q}^2 \right) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.119)$$

pour une matrice \mathbf{m} diagonale et réelle.

Le développement au premier ordre en Φ des exponentielles U et U^\dagger implique, dans la limite d'isospin (avec $\lambda^0 \equiv 1_{3 \times 3} \sqrt{2/3}$, cf. section 1.2.1) :

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_A^{\mu 3} &= -F_\pi m_\pi^2 \pi^0 - \frac{\alpha}{4\pi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \dots \\ \partial_\mu J_A^{\mu 8} &= -F_\pi (m_{\eta_8}^2 \eta_8 + m_{80}^2 \eta_0) - \frac{\alpha}{4\pi\sqrt{3}} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \dots \\ \partial_\mu J_A^{\mu 0} &= -F_\pi (m_{80}^2 \eta_8 + m_{\eta_0}^2 \eta_0) - \frac{\alpha}{\pi\sqrt{6}} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (1.120)$$

Les paramètres de mélange $m_{\eta_8}^2$, $m_{\eta_0}^2$ et m_{80}^2 sont ceux de l'équation (1.114). Les relations ci-dessus suggèrent l'introduction des combinaisons :

$$\begin{pmatrix} J_{A,\eta}^\mu \\ J_{A,\eta'}^\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_P & -\sin\theta_P \\ \sin\theta_P & \cos\theta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_A^{\mu 8} \\ J_A^{\mu 0} \end{pmatrix}, \quad (1.121)$$

avec θ_P , l'angle de mélange déterminé en (1.116). Les équations (1.120) peuvent ainsi être réécrites sous la forme de relations *PCAC* ('conservation partielle du courant axial'), corrigées par l'anomalie :

$$\partial_\mu J_{A,P}^\mu = -F_\pi m_P^2 \varphi_P - \frac{\alpha A_P}{4\pi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \dots, \quad (1.122)$$

où $P = \pi^0, \eta, \eta'$, φ_P désigne le champ correspondant et les coefficients A_P sont donnés par :

P	A_P
π^0	1
η	$(\cos \theta_P - 2\sqrt{2} \sin \theta_P) / \sqrt{3}$
η'	$(\sin \theta_P + 2\sqrt{2} \cos \theta_P) / \sqrt{3}$

Tab.3a

Considérons les fonctions de corrélation de chacun des trois termes de l'équation (1.122) avec deux courants électromagnétiques. Après transformation de Fourier et réduction du champ pseudoscalaire au moyen de la formule de Lehmann-Symanzik-Zimmermann, nous obtenons :

$$q_\mu \mathcal{T}_P^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) \stackrel{q^2 \rightarrow m_P^2}{\sim} \frac{F_\pi m_P^2}{-q^2 + m_P^2} \mathcal{M}(P \rightarrow \gamma\gamma)^{\alpha\beta} + \frac{\alpha A_P}{\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (1.123)$$

où $\mathcal{M}(P \rightarrow \gamma\gamma)$ désigne l'amplitude de Feynman associée au processus $P \rightarrow \gamma\gamma$, k_1 et k_2 sont les moments des photons finaux, $q = k_1 + k_2$ et $\mathcal{T}_P^{\mu\alpha\beta}$ est l'analogue de la fonction (1.31) dans le modèle non linéaire¹² :

$$i\mathcal{T}_P^{\mu\alpha\beta}(k_1, k_2) \equiv \int d^4y d^4z e^{ik_1y} e^{ik_2z} \left\langle J_{A,P}^\mu(0) J_{em}^\alpha(y) J_{em}^\beta(z) \right\rangle. \quad (1.124)$$

A strictement parler, l'équation (1.123) n'est valide que dans la limite $q^2 \rightarrow m_P^2$. Pour des mésons légers, cependant, et pourvu que la dépendance de \mathcal{M} en q^2 ne soit pas trop forte, cette équation peut être extrapolée au point $q^2 = 0$. Dans ce cas, la contribution du membre de gauche s'annule puisque la fonction à trois points (1.124) ne comporte pas de pole en $q^2 = 0$. Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{M}(P \rightarrow \gamma\gamma)_{q^2=0}^{\alpha\beta} = -\frac{\alpha}{\pi F_\pi} A_P \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (1.125)$$

ce qui implique (cf. annexe E.5) :

$$\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)_{\text{th}} = \frac{\alpha^2 A_P^2 m_P^3}{64\pi^3 F_\pi^2}. \quad (1.126)$$

Compte tenu des temps de vie (1.107), les largeurs de désintégration ci-dessus se comparent aux rapports de branchement expérimentaux [21] de la façon suivante :

	exp	th	th / exp
$Br(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$	$(98.798 \pm 0.032) \%$	98.65%	0.999
$Br(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$	$(39.43 \pm 0.26) \%$	45.1%	1.14
$Br(\eta' \rightarrow \gamma\gamma)$	$(2.12 \pm 0.14) \%$	2.6%	1.2

Tab.3b

¹²Notons que la charge du positron e a été incluse dans la définition des courants électromagnétiques du modèle non linéaire J_{em}^μ .

Les amplitudes (1.125) ont été estimées à partir de l'angle théorique (1.116), tandis que les facteurs cinématiques (y compris le facteur m_P^4 résultant de la somme sur les polarisations des photons) ont été évalués à l'aide des masses physiques (1.84).

L'accord remarquable entre théorie et expérience observé à la première ligne du tableau ci-dessus démontre le rôle prédominant de l'anomalie $U(1)_A$ de QED dans les désintégrations radiatives $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Il peut paraître assez surprenant que celle-ci parvienne également à reproduire les rapports de branchement expérimentaux des désintégrations $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ et $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ à moins de 20%. L'extrapolation hors de la couche de masse $q^2 \rightarrow 0$ est en effet dans ce cas plus délicate étant donné les valeurs plus élevées des masses du η et surtout du η' . De plus, des erreurs importantes, de l'ordre de 20 à 30%¹³, sont attendues au niveau des constantes de désintégration des mésons η et η' , approximées toutes deux par F_π dans le modèle non linéaire, ainsi qu'au niveau de l'angle de mélange θ_P .

Or l'analyse ci-dessus peut être reformulée à l'aide du Lagrangien de Wess-Zumino-Witten étendu au groupe chirale $U(3)_L \times U(3)_R$. Dans ce cas, les trois sources d'erreurs que nous venons de mentionner peuvent être réduites par la prise en compte des corrections d'ordre supérieur dans l'expansion chirale combinée avec $1/N_C$. Le fait que les prédictions des deuxième et troisième lignes du tableau 3b soient déjà en bon accord avec les valeurs observées plaide ainsi en faveur de la qualité de cette expansion.

D'autre part, il se fait que le processus $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ peut également être décrit à l'aide d'une boucle de fermions chargés couplés au π^0 par le vertex constant γ_5 [1]. Ceci n'est pas étonnant si l'on se souvient que la valeur à énergie nulle de cette boucle n'est autre que l'anomalie axiale de QED , comme indiqué en (1.51).

Les désintégrations $\sigma \rightarrow \gamma\gamma$

L'analogie de l'équation (1.119) pour le courant de dilatation s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_D^\mu &= -F_\pi^2 r \operatorname{Tr} \left(\mathbf{m} (U + U^\dagger) \right) - \frac{F_\pi^2}{4N_C} m_0^2 \left(\operatorname{Tr} \ln U - \operatorname{Tr} \ln U^\dagger \right)^2 \\ &\quad - \frac{F_\pi^2}{2} \operatorname{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) + N_C \frac{\alpha}{6\pi} \operatorname{Tr} \left(\mathbf{Q}^2 \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.127)$$

où seule l'anomalie bêta électromagnétique a été indiquée, au premier ordre en α (et non les dimensions anomales). L'expression ci-dessus, invariante sous parité, est de ce fait au moins quadratique dans les champs des mésons pseudoscalaires Φ . Elle ne peut cependant être reliée directement à un processus physique (tel que $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$, par exemple) via une réduction LSZ partielle, comme dans l'équation (1.123). Afin d'établir un parallèle avec l'analyse de la section précédente, il nous faut plutôt considérer un champ scalaire¹⁴.

Supposons donc l'existence d'une relation $PCDC$ ('conservation partielle du courant de dilatation') [40], semblable à l'équation (1.122), mais impliquant cette fois l'anomalie d'échelle :

$$\partial_\mu J_D^\mu = \langle \Theta_\mu^\mu \rangle - F_\sigma m_\sigma^2 \varphi_\sigma + \frac{\alpha R}{6\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots, \quad (1.128)$$

¹³ La brisure de la symétrie de saveur par la masse du quark étrange est en effet caractérisée par le rapport $f_K/f_\pi \simeq 1.22$ ($f_\pi \equiv \sqrt{2}F_\pi$).

¹⁴ Notons que l'équation (1.127) devrait en revanche permettre d'estimer certains éléments de matrice à basse énergie, tels que $\langle \pi^0(\mathbf{p}_1)\pi^0(\mathbf{p}_2) | F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} | 0 \rangle$.

où φ_σ désigne un champ scalaire. Le terme constant $\langle \Theta_\mu^\mu \rangle$ est lié aux condensats $\langle \bar{q}q \rangle$ et $\langle G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \rangle$ ¹⁵. Le coefficient anomal R , quant à lui, est donné par $N_C \text{Tr}(\mathbf{Q}^2) = 2$ dans le cas de trois saveurs actives.

Effectuons sur l'équation ci-dessus la série de manipulations décrite dans la section précédente. La constante $\langle \Theta_\mu^\mu \rangle$ disparaît, et nous obtenons :

$$\mathcal{M}(\sigma \rightarrow \gamma\gamma)_{q^2=0}^{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\pi F_\sigma} \frac{2R}{3} (k_1^\beta k_2^\alpha - k_1 k_2 \eta^{\alpha\beta}), \quad (1.129)$$

ce qui implique :

$$\Gamma(\sigma \rightarrow \gamma\gamma)_{\text{th}} = \frac{\alpha^2 R^2 m_\sigma^3}{144 \pi^3 F_\sigma^2}. \quad (1.130)$$

Considérons en particulier le cas $F_\sigma = F_\pi$, suggéré par le Modèle Sigma Linéaire au 'tree-level'. Pour $m_\sigma = 600$ MeV, l'équation (1.130) prédit : $\Gamma(\sigma \rightarrow \gamma\gamma)_{\text{th}} \sim 1.2$ keV.

L'identification des résonances scalaires pose cependant problème [41]. Au niveau expérimental, leur largeur importante notamment les rend difficiles à distinguer. A ceci vient s'ajouter le mélange possible des mésons scalaires avec des objets non mésoniques tels que des glueballs, des états $\bar{q}q\bar{q}q$ ou des états liés méson-méson. La nature ou l'existence même de la particule σ introduite dans l'équation (1.128) ne sera toutefois pas discutée ici. Le but de l'analyse ci-dessus est simplement de montrer qu'un équivalent scalaire au théorème de basse énergie (1.125) est possible.

D'autres théorèmes à faible q^2 peuvent bien entendu être dérivés. Les anomalies de trace de QED et de QCD ont ainsi été invoquées par le passé afin de décrire les aspects non perturbatifs de la désintégration d'un boson de Brout-Englert-Higgs léger en deux photons [42–44].

1.3.4 Transitions hadroniques entre états du quarkonium

Les anomalies de QCD jouent par ailleurs un rôle important dans certaines désexcitations de quarkonia. Ainsi, le rapport des largeurs de désintégration $\Gamma(\psi' \rightarrow J/\psi\eta)/\Gamma(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-)$, en particulier, peut être reproduit à l'aide des éléments de matrice hadroniques (1.105) et (1.106), estimés grâce aux anomalies axiale et d'échelle, respectivement. Examinons ceci de plus près.

La transition hadronique entre l'excitation radiale $\psi' = \psi(2S)$ et l'état fondamental $J/\psi(1S)$ peut être représentée de la façon suivante, dans les deux cas qui nous intéressent :

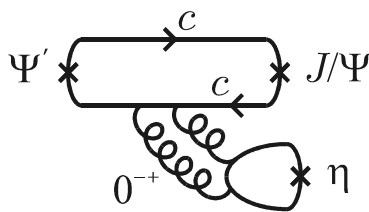


Fig.5a

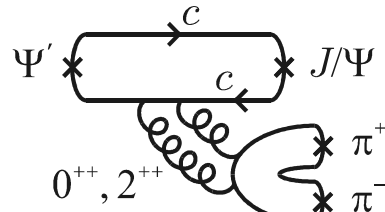


Fig.5b

Seuls deux gluons ont été indiqués en vue des développements qui vont suivre. Le processus d'hadronisation en η ou $\pi^+\pi^-$ n'en demeure pas moins purement non perturbatif.

¹⁵ Remarquons que ce dernier n'a pas d'équivalent dans l'équation (1.127).

Les désintégrations ci-dessus peuvent être vues comme la succession de deux étapes : (i) l'émission de gluons mous par les quarks lourds, puis (ii) la conversion de ces gluons en η ou $\pi^+\pi^-$.

La première de ces deux étapes peut être décrite par une expansion multipolaire des champs de gluons [45], ce qui permet de factoriser les amplitudes $\mathcal{M}(\psi' \rightarrow J/\psi\eta)$ et $\mathcal{M}(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-)$, à l'ordre dominant [28] :

$$\mathcal{M}(\psi' \rightarrow J/\psi\eta) = A_0 \left\langle \eta \left| \frac{\alpha_s}{\pi} E^a H^a \right| 0 \right\rangle \varepsilon^{ijk} \frac{p_\eta^i}{3m_c} \xi'^j \xi^k + \dots \quad (1.131)$$

$$\mathcal{M}(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-) = A_0 \left\langle \pi^+\pi^- \left| \frac{\alpha_s}{\pi} E^a E^a \right| 0 \right\rangle \xi'^i \xi^i + \dots \quad (1.132)$$

Les vecteurs de polarisation des mésons ψ et ψ' sont notés par $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\xi}'$, respectivement ($i, j, k = 1, 2, 3$), \mathbf{p}_η désigne la quantité de mouvement du méson η , E^a et H^a ($a = 1, \dots, 8$) représentent les champs chromoélectriques et chromomagnétiques, respectivement, et l'amplitude A_0 , commune aux deux désintégrations, encode l'information relative aux quarkonia.

La conversion des gluons en η ou $\pi^+\pi^-$, ainsi gouvernée par les éléments de matrice des équations (1.131) et (1.132), est de ce fait déterminée par les anomalies axiale et de trace de QCD . Nous avons en effet [28] :

$$\left\langle \eta \left| \frac{\alpha_s}{\pi} E^a H^a \right| 0 \right\rangle = \frac{-1}{4} \left\langle \eta \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle, \quad (1.133)$$

$$\left\langle \pi^+\pi^- \left| \frac{\alpha_s}{\pi} E^a E^a \right| 0 \right\rangle \simeq \frac{-1}{4} \left\langle \pi^+\pi^- \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle. \quad (1.134)$$

L'élément de matrice (1.133), ainsi que celui correspondant au η' , peut être estimé à l'aide du théorème de basse énergie (1.105) et de la modélisation du mélange $\eta_0\text{-}\eta_8$ (1.116) :

$$\left\langle \eta \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle \simeq -\sin\theta_P \frac{4}{3} \sqrt{6} F_\pi m_0^2 \simeq (410 \text{ MeV})^3, \quad (1.135)$$

$$\left\langle \eta' \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle \simeq \cos\theta_P \frac{4}{3} \sqrt{6} F_\pi m_0^2 \simeq (593 \text{ MeV})^3. \quad (1.136)$$

Notons que ces valeurs sont en accord avec celles obtenues dans la référence [29] (i.e., $(403 \text{ MeV})^3$ et $(520 \text{ MeV})^3$, respectivement).

L'élément de matrice (1.134), quant à lui, est approximé par l'équation (1.106) après développement de la fonction β au premier ordre en α_s :

$$\left\langle \pi^+\pi^- \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle \simeq -\frac{8}{9} (q^2 - 2m_\pi^2), \quad (1.137)$$

où q désigne l'impulsion totale du système dipion. L'estimation ci-dessus, en accord avec celle de la référence [28], la généralise au cas de pions massifs.

Nous sommes à présent en mesure d'estimer le rapport :

$$R \equiv \frac{\Gamma(\psi' \rightarrow J/\psi\eta)}{\Gamma(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-)}. \quad (1.138)$$

Celui-ci s'obtient par intégration de la largeur différentielle :

$$\frac{d\Gamma(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-)/dq^2}{\Gamma(\psi' \rightarrow J/\psi\eta)} = \left(\frac{2(q^2 - 2m_\pi^2)}{3\sqrt{6} \sin\theta_P F_\pi m_0^2} \right)^2 \frac{27 m_c^2}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{p}_\eta|^3} \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2}}, \quad (1.139)$$

où

$$|\mathbf{p}_\eta| = \frac{m_{\psi'}}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_\psi + m_\eta}{m_{\psi'}}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_\psi - m_\eta}{m_{\psi'}}\right)^2} \quad (1.140)$$

et $|\mathbf{q}|$ est donné par la même expression avec m_η remplacé par $\sqrt{q^2}$. Pour $m_{\psi'} = 3686$ MeV, $m_\psi = 3097$ MeV et $m_c = m_\psi/2$, nous obtenons :

$$R_{\text{th}} = 0.30 \left(\frac{GeV}{m_c}\right)^2 \simeq 0.12. \quad (1.141)$$

Les rapports de branchement expérimentaux [21],

$$\begin{aligned} Br(\psi' \rightarrow J/\psi\eta) &= (3.16 \pm 0.22) \%, \\ Br(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-) &= (31.7 \pm 1.1) \%, \end{aligned} \quad (1.142)$$

impliquent par ailleurs :

$$R_{\text{exp}} = 0.10 \pm 0.01, \quad (1.143)$$

ce qui est compatible avec la prédiction (1.141) étant donné les incertitudes théoriques importantes.

Un test plus significatif du modèle considéré peut être obtenu dans le cas de l'anomalie de trace par l'analyse des différents spectres associés au processus $\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$. La relation approchée (1.134) doit cependant d'abord être remplacée par l'expression exacte suivante [46] :

$$\left\langle \pi^+\pi^- \left| \frac{\alpha_s}{\pi} E^a E^a \right| 0 \right\rangle = \left\langle \pi^+\pi^- \left| \frac{\alpha_s}{\pi} \Theta_{00}^G - \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right| 0 \right\rangle, \quad (1.144)$$

où Θ_{00}^G désigne la composante 00 de la partie gluonique du tenseur énergie-moment de QCD (analogue à celui de l'équation (1.18), avec $F_{\mu\nu}$ remplacé par $G_{\mu\nu}^a$). L'amplitude $\mathcal{M}(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-)$ devient ainsi¹⁶ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\psi' \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-) &\propto q^2 - \kappa(\Delta M)^2 \left(1 + \frac{2m_\pi^2}{q^2}\right) \\ &+ \frac{3}{2}\kappa \left((\Delta M)^2 - q^2\right) \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{q^2}\right) \left(\cos^2 \theta_\pi^* - \frac{1}{3}\right), \end{aligned} \quad (1.145)$$

où $\Delta M \equiv m_{\psi'} - m_\psi = 589$ MeV et la valeur du paramètre κ est estimée entre 0.15 et 0.2. La présence de l'angle θ_π^* , défini par les impulsions du J/ψ et du π^+ dans le repère au repos du système dipion, témoigne d'une faible composante $L = 2$ de ce dernier.

Les 'fits' des distributions de masse invariante (fig.6a) et angulaire (fig.6b) [47] associées à l'amplitude ci-dessus mènent à des valeurs de κ compatibles entre elles et avec la prédiction du modèle. Ceci conforte l'analyse esquissée dans cette section, et en particulier

¹⁶Signalons que seule une partie des corrections d'ordre m_π^2 a été prise en compte dans l'expression ci-dessous [46]. En particulier, l'équation (1.137) a été considérée dans la limite chirale.

le rôle dominant imputé à l'anomalie de trace¹⁷.

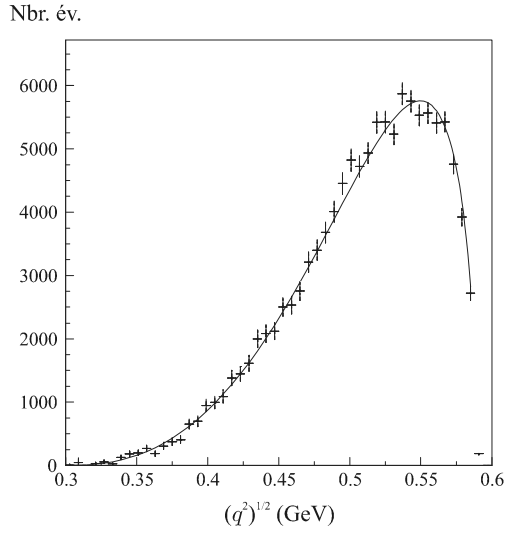


Fig.6a

Fit : $\kappa = 0.186 \pm 0.003 \pm 0.006$.

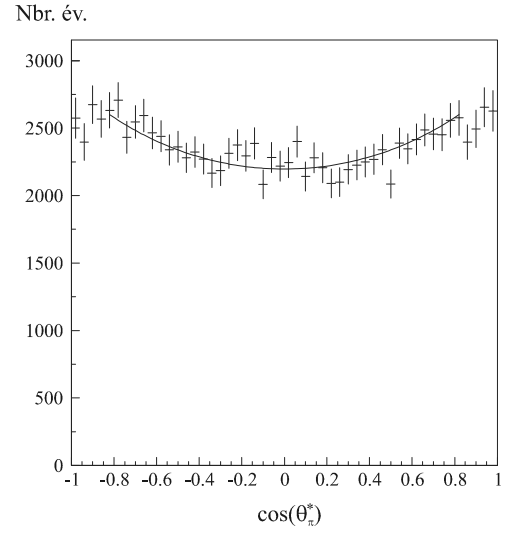


Fig.6b

Fit : $\kappa = 0.210 \pm 0.027 \pm 0.042$.

¹⁷Notons toutefois que la situation est moins claire lorsque les processus $\psi' \rightarrow J/\psi\pi\pi$, $\Upsilon(2S) \rightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$, $\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(1S)\pi\pi$ et $\Upsilon(3S) \rightarrow \Upsilon(2S)\pi\pi$ sont analysés simultanément [48].

Chapitre 2

Opérateurs faibles anomaux induits par les quarks lourds

Après avoir passé en revue un certain nombre de manifestations des anomalies axiale et de trace¹ de QCD et de QED dans des processus forts ou électromagnétiques, nous allons à présent nous intéresser à leur rôle dans les désintégrations faibles des mésons.

Certains aspects de cette question ont déjà été étudiés. Les anomalies axiale et de trace de QCD ont ainsi été invoquées pour expliquer le rapport de branchement élevé des désintégrations $B \rightarrow \eta' X_s$ (et en particulier $B \rightarrow \eta' K^0$) [49] et l'amplification importante du canal $\Delta I = 1/2$ observée dans les désintégrations $K \rightarrow \pi\pi$ [9, 50], respectivement. Des contributions anomales typiques à ces processus sont représentées dans les figures 7 et 8. Les lignes en pointillé symbolisent l'échange d'un boson de jauge W^\pm . Chacun des gluons indiqués peut bien entendu être émis par toute autre ligne de quark de l'état initial (par exemple par le quark spectateur d , dans le cas de la figure 7)².

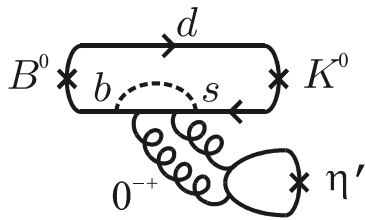


Fig.7

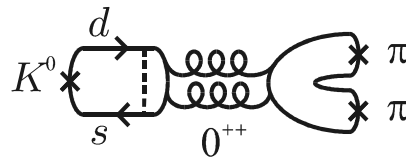


Fig.8

D'autre part, l'anomalie axiale de QED est connue pour le rôle important qu'elle joue dans les désintégrations $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ via les contributions des poles associés au π^0 , au η et au η' [51]. L'anomalie de trace électromagnétique, quant à elle, pourrait affecter significativement les désintégrations $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ [9]. L'analogue des figures 7 et 8 pour ces

¹ Par 'anomalie de trace' ou 'anomalie d'échelle', nous entendrons désormais l'anomalie 'bêta' seule, à l'exclusion des dimensions anomales.

² Rappelons toutefois le caractère symbolique de cette représentation : l'anomalie est un phénomène non perturbatif, et ne correspond pas simplement à l'échange de deux gluons.

deux processus est donné par :

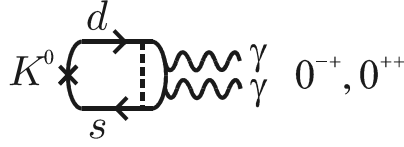


Fig.9

A notre connaissance, cependant, aucune tentative n'a été faite jusqu'à présent afin de générer simultanément les configurations de gluons (ou de photons) anomaux scalaires et pseudoscalaires par le calcul des corrections de QCD (ou de QED) à courte distance à une interaction effective à quatre quarks changeant la saveur. C'est cette approche opératoire que nous nous proposons de développer dans ce chapitre. Nous allons dans un premier temps considérer le cas de QCD seul. Les interactions électromagnétiques seront ensuite introduites. La discussion des opérateurs anomaux liés aux effets de longue distance, quant à elle, fera l'objet du chapitre 3.

Considérons donc les opérateurs anomaux locaux issus de l'intégration d'un degré de liberté lourd dont le couplage aux quarks change la saveur (tel le W , dans le Modèle Standard), en présence d'interactions fortes. A l'ordre le plus bas de l'expansion en les moments associée à cette intégration³, les opérateurs recherchés sont constitués d'un bilinéaire de quarks $\Delta F \neq 0$ (F désigne un nombre quantique de saveur) et d'une densité de gluons singulet de couleur pseudoscalaire dans le cas de l'anomalie axiale (AA) ou scalaire dans celui de l'anomalie de trace (AT) :

$$Q_{AA} \sim \bar{q}_1 q_2 G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}, \quad (2.1)$$

$$Q_{AT} \sim \bar{q}_1 q_2 G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}. \quad (2.2)$$

A une boucle, les opérateurs ci-dessus sont générés par des diagrammes de type 'pingouin' gluonique (cf. fig.10, avec 2, 3 ou 4 gluons émis), construits à partir du vertex à quatre quarks initial par intégration d'une saveur intermédiaire lourde q_h .

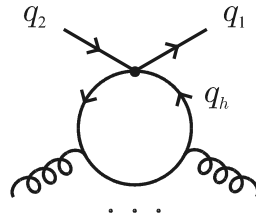


Fig.10

Les diagrammes regroupés dans la figure 10 généralisent en fait la définition habituelle de 'diagramme pingouin', celle-ci correspondant à strictement parler au cas de l'émission d'un seul gluon. Nous continuerons néanmoins à utiliser cette appellation. Soulignons par ailleurs le fait que, bien que la figure 10 regroupe des diagrammes de tous les ordres en la constante de couplage forte g_s , elle ne comprend en fait que la contribution dominante au vertex effectif $\bar{q}_1 q_2$ -(n gluons), pour un nombre de gluons externes n fixé.

Finalement, le problème de la génération des opérateurs anomaux locaux dominants est donc lié à celui de l'intégration à une boucle d'un quark lourd. Nous allons effectuer

³Nous reviendrons sur cette expansion plus précisément dans la section 2.2.5.

cette intégration explicitement dans la section suivante. Outre les contributions anomales (2.1) et (2.2), nous obtiendrons formellement toutes les corrections à une boucle de type pingouin associées à la propagation d'une saveur virtuelle lourde, et ce quelle que soit l'interaction effective à quatre quarks initiale.

Entre autres applications, nous dériverons un nouvel ensemble d'opérateurs de dimension huit décrivant les effets du quark charmé dans les désintégrations des kaons. Ce type d'effets n'ayant pas été beaucoup discuté jusqu'à présent [52, 53], les prochaines sections seront plus détaillées. Celles-ci ont par ailleurs fait l'objet d'une publication [54].

2.1 Intégration d'un quark lourd

Concentrons-nous sur le calcul des corrections de QCD à une boucle, de type pingouin, à l'opérateur à quatre quarks suivant :

$$Q_w = (\bar{q}_1 \Gamma^A q_h)(\bar{q}_h \Gamma^B q_2), \quad (2.3)$$

sous l'hypothèse d'une saveur intermédiaire lourde. Les symboles $\Gamma^{A,B}$ désignent des produits de matrices de Dirac. Les bilinéaires associés sont singulets sous $SU(3)_C$.

Dans le formalisme des intégrales de chemin, ces corrections peuvent être obtenues par intégration fonctionnelle du mode lourd q_h [55] en présence de fluctuations gluoniques classiques :

$$\exp i \int d^4x \mathcal{L}_{eff} = \int \mathcal{D}q_h \mathcal{D}\bar{q}_h \exp i \int d^4x (\bar{q}_h \mathcal{P} q_h - M \bar{q}_h q_h + g_w Q_w), \quad (2.4)$$

avec g_w , le couplage effectif associé à l'opérateur faible Q_w et M , la masse de la saveur lourde. La dérivée covariante \mathcal{P}_μ a été définie en (1.57). L'absence d'intégration sur A_μ^a dans l'équation ci-dessus traduit le caractère classique des champs de gluons (et donc l'approximation à une boucle).

L'intégrale (2.4), de type gaussien, est donnée par le déterminant fonctionnel de la matrice

$$\mathbf{A}_{xy}^{ij} = \left(\mathcal{P}_x^{ij} - M \delta^{ij} + g_w \Gamma^B q_{2,x}^i \bar{q}_{1,x}^j \Gamma^A \right) \delta^{(4)}(x - y). \quad (2.5)$$

Les indices de couleur sont notés par i, j ($i, j = 1, 2, 3$) tandis que les indices spinoriels sont sous-entendus. Factorisons la partie de \mathbf{A} liée exclusivement aux interactions fortes :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s \cdot \mathbf{A}_w, \quad (2.6)$$

avec

$$\mathbf{A}_{s,xy}^{ij} = (\mathcal{P}_x^{ij} - M \delta^{ij}) \delta^{(4)}(x - y), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{A}_{w,xy}^{ij} = \delta^{ij} \delta^{(4)}(x - y) + \sum_{k=1}^3 (\mathcal{P} - M)_{xy}^{-1,ik} g_w \Gamma^B q_{2,y}^k \bar{q}_{1,y}^j \Gamma^A, \quad (2.8)$$

et $(\mathcal{P} - M)_{xy}^{-1} \equiv \langle x | (\mathcal{P} - M)^{-1} | y \rangle$. L'identité $\det \mathbf{A} = \exp \text{tr} \ln \mathbf{A}$ implique à présent :

$$\int d^4x \mathcal{L}_{eff} = -i \text{tr} \ln \mathbf{A}_s - i \text{tr} \ln \mathbf{A}_w. \quad (2.9)$$

Le premier terme n'est autre que l'équivalent pour QCD du Lagrangien d'Euler-Heisenberg dérivé de QED . Les corrections recherchées s'obtiennent par développement du second logarithme au premier ordre en la constante de couplage faible g_w :

$$\int d^4x \mathcal{L}_{eff}^{g_w} = -ig_w \int d^4x \bar{q}_{1,x}^i \Gamma^A \left(\frac{1}{\not{P} - M} \right)_{xx}^{ij} \Gamma^B q_{2,x}^j. \quad (2.10)$$

Les indices de couleur i, j sont sommés implicitement.

L'objet central à considérer afin de générer les opérateurs recherchés est donc le propagateur en champs externes du quark lourd, $(\not{P} - M)_{xy}^{-1}$, en $x = y$.

Celui-ci se calcule habituellement par un développement en série de perturbations en la constante de couplage forte g_s :

$$\left(\frac{1}{\not{P} - M} \right)_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n, \quad (2.11)$$

avec

$$T_n = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - M} (-g_s A(k_1)) \cdots (-g_s A(k_n)) \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \cdots - \not{k}_n - M} e^{-i(k_1 + \cdots + k_n)x}. \quad (2.12)$$

Il existe cependant une série alternative (cf. annexe B) :

$$\left(\frac{1}{\not{P} - M} \right)_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \quad (2.13)$$

avec

$$S_n = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - M} \left[(-\not{P}) \frac{1}{\not{p} - M} \right]^n. \quad (2.14)$$

Les termes génériques (2.12) et (2.14) des deux séries ci-dessus sont représentés par les figures 11a et 11b, respectivement :

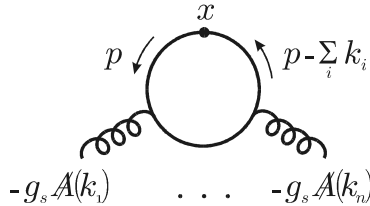


Fig.11a

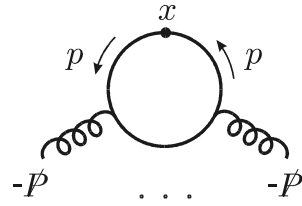


Fig.11b

La dérivée contenue dans P_μ compense en quelque sorte l'absence de translation des moments des propagateurs⁴. Le fait de garder la dérivée covariante intacte dans l'expansion du propagateur en champs externes permet de générer directement des opérateurs invariants de jauge, comme nous allons le voir par la suite. D'autre part, la forme du terme générique (2.14) après intégration s'obtient facilement par analyse dimensionnelle⁵ :

$$S_n = \frac{1}{M^{n-3}} P_{\mu_1} \cdots P_{\mu_n} \Gamma^{\mu_1 \cdots \mu_n}, \quad (2.15)$$

⁴Cette vision n'est toutefois qu'intuitive : les termes T_n et S_n ne sont pas égaux pour n fixé.

⁵Notons que l'échelle de régularisation μ pourrait intervenir également, a priori. Nous utiliserons cependant le schéma de régularisation dimensionnelle, dans lequel μ n'apparaît que sous forme logarithmique.

où $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}$ désigne une somme de produits de matrices de Dirac et des tenseurs métrique $\eta^{\mu\nu}$ et de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Le paramètre d'expansion de la série alternative (2.13) n'est donc autre que l'inverse de la masse du quark lourd.

Insistons sur le fait que les dérivées covariantes ci-dessus n'agissent en définitive que sur les champs de gluons qu'elles contiennent, et non sur les spineurs extérieurs $q_{1,2}$. En effet, le propagateur en champs externes est une fonction, pas un opérateur différentiel. La série (2.13) convergera donc pourvu que les fluctuations de gluons classiques soient petites par rapport à M . Dans ce cas, la série peut d'ailleurs être resommée (formellement) :

$$\left(\frac{1}{\not{P} - M} \right)_{xx} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} + \not{P}_x - M}. \quad (2.16)$$

Le propagateur en champs externes apparaît ainsi comme le résultat de la substitution minimale $p_\mu \rightarrow p_\mu + P_\mu$ dans le propagateur libre $(\not{p} - M)_{xy}^{-1}$.

Nous allons à présent calculer les premiers termes de l'expansion (2.13). Nous adopterons pour ce faire le schéma de régularisation dimensionnelle afin de préserver l'invariance de jauge. Réécrivons tout d'abord le terme générique (2.14) en d dimensions :

$$S_n = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^\varepsilon N_n}{(p^2 - M^2)^{n+1}}, \quad (2.17)$$

avec

$$N_n = (\not{p} + M) \underbrace{(-\not{P})(\not{p} + M) \dots (-\not{P})(\not{p} + M)}_{n \text{ fois}}. \quad (2.18)$$

Le symbole μ désigne l'échelle de régularisation et $\varepsilon = 4 - d$. Le numérateur N_n peut être simplifié à l'aide des relations d'anticommutation des matrices de Dirac $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$. Plus précisément, nous utilisons des identités du type

$$(\not{p} + M)(-\not{P})(\not{p} + M) = (p^2 - M^2)\not{P} - 2(\not{p} + M)p_\mu P^\mu, \quad (2.19)$$

de manière à réécrire N_n comme la somme de termes de la forme

$$M^{n+1-2m-2l} (p^2 - M^2)^m p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_{2l}} P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} N_{\alpha_1 \dots \alpha_{2l}}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (2.20)$$

où $N_{\alpha_1 \dots \alpha_{2l}}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ est un produit de matrices de Dirac et des tenseurs $\eta^{\mu\nu}$ et $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, et $m, l \in \mathbb{N}$. Nous obtenons ainsi des intégrales du type

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^\varepsilon p^{\alpha_1} \dots p^{\alpha_{2l}}}{(p^2 - M^2)^{n-m+1}}, \quad (2.21)$$

qui peuvent être effectuées immédiatement (cf. annexe E.3).

D'autre part, la structure tensorielle $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}$ obtenue après intégration à partir des produits $N_{\alpha_1 \dots \alpha_{2l}}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ peut être décomposée sur la base de Clifford, dans la limite $d \rightarrow 4$ [56] :

$$\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} = C^{\mu_1 \dots \mu_n} 1 + C_{\beta}^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma^\beta + C_{\alpha\beta}^{\mu_1 \dots \mu_n} \sigma^{\alpha\beta} + C_{5\beta}^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma^\beta \gamma_5 + C_5^{\mu_1 \dots \mu_n} \gamma_5. \quad (2.22)$$

Pour $n = 1, \dots, 5$, ceci ne nécessite en fait que les décompositions des produits $\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}$ et $\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4}$, présentées dans l'annexe E.2. Signalons que, pour n pair (impair), les produits (2.22) ne font intervenir que les matrices $1, \gamma_5$ et $\sigma^{\alpha\beta}$ (γ^β et $\gamma^\beta \gamma_5$).

Nous obtenons finalement les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 0 \\
 S_2 &= \frac{-1}{(4\pi)^2} M \left(N_\varepsilon - \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) P_\mu P_\nu \sigma^{\mu\nu} \\
 S_3 &= \frac{i}{3(4\pi)^2} \left(N_\varepsilon - \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) [P^\nu, [P_\mu, P_\nu]] \gamma^\mu \\
 S_4 &= \frac{-i}{2(4\pi)^2} \frac{1}{M} P_{\mu_1} P_{\mu_2} P_{\mu_3} P_{\mu_4} \Gamma_4^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \\
 S_5 &= \frac{i}{2(4\pi)^2} \frac{1}{M^2} P_{\mu_1} P_{\mu_2} P_{\mu_3} P_{\mu_4} P_{\mu_5} \left(\Gamma_5^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} + \Gamma_{5'}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} \right),
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

avec $N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma$, $\gamma \simeq 0.5772$ et

$$\begin{aligned}
 \Gamma_4^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= -\frac{2}{3} \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} + \frac{2}{3} \eta^{\mu_1 \mu_4} \eta^{\mu_2 \mu_3} - i \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_5 \\
 &\quad + i \eta^{\mu_1 \mu_3} \sigma^{\mu_2 \mu_4} - i \eta^{\mu_2 \mu_3} \sigma^{\mu_1 \mu_4} + i \eta^{\mu_2 \mu_4} \sigma^{\mu_1 \mu_3} \\
 &\quad - \frac{i}{3} \eta^{\mu_1 \mu_2} \sigma^{\mu_3 \mu_4} - \frac{i}{3} \eta^{\mu_1 \mu_4} \sigma^{\mu_2 \mu_3} - \frac{i}{3} \eta^{\mu_3 \mu_4} \sigma^{\mu_1 \mu_2}, \\
 \Gamma_5^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} &= -\frac{13}{30} \eta^{\mu_2 \mu_3} \eta^{\mu_4 \mu_5} \gamma^{\mu_1} + \frac{17}{30} \eta^{\mu_2 \mu_4} \eta^{\mu_3 \mu_5} \gamma^{\mu_1} - \frac{8}{30} \eta^{\mu_2 \mu_5} \eta^{\mu_3 \mu_4} \gamma^{\mu_1} \\
 &\quad + \frac{17}{30} \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_4 \mu_5} \gamma^{\mu_2} - \frac{18}{30} \eta^{\mu_1 \mu_4} \eta^{\mu_3 \mu_5} \gamma^{\mu_2} + \frac{17}{30} \eta^{\mu_1 \mu_5} \eta^{\mu_3 \mu_4} \gamma^{\mu_2} \\
 &\quad - \frac{8}{30} \eta^{\mu_1 \mu_2} \eta^{\mu_4 \mu_5} \gamma^{\mu_3} + \frac{2}{30} \eta^{\mu_1 \mu_4} \eta^{\mu_2 \mu_5} \gamma^{\mu_3} - \frac{18}{30} \eta^{\mu_1 \mu_5} \eta^{\mu_2 \mu_4} \gamma^{\mu_3} \\
 &\quad + \frac{17}{30} \eta^{\mu_1 \mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_5} \gamma^{\mu_4} - \frac{18}{30} \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_5} \gamma^{\mu_4} + \frac{17}{30} \eta^{\mu_1 \mu_5} \eta^{\mu_2 \mu_3} \gamma^{\mu_4} \\
 &\quad - \frac{13}{30} \eta^{\mu_1 \mu_2} \eta^{\mu_3 \mu_4} \gamma^{\mu_5} + \frac{17}{30} \eta^{\mu_1 \mu_3} \eta^{\mu_2 \mu_4} \gamma^{\mu_5} - \frac{8}{30} \eta^{\mu_1 \mu_4} \eta^{\mu_2 \mu_3} \gamma^{\mu_5}, \\
 \Gamma_{5'}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5} &= +\frac{i}{3} \eta^{\mu_1 \mu_2} \varepsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu_5 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 - \frac{i}{2} \eta^{\mu_1 \mu_3} \varepsilon^{\mu_2 \mu_4 \mu_5 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 + \frac{i}{6} \eta^{\mu_1 \mu_4} \varepsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu_5 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 \\
 &\quad - \frac{i}{3} \eta^{\mu_1 \mu_5} \varepsilon^{\mu_2 \mu_3 \mu_4 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 + \frac{i}{6} \eta^{\mu_2 \mu_3} \varepsilon^{\mu_1 \mu_4 \mu_5 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 + \frac{i}{6} \eta^{\mu_2 \mu_5} \varepsilon^{\mu_1 \mu_3 \mu_4 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 \\
 &\quad + \frac{i}{6} \eta^{\mu_3 \mu_4} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_5 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 - \frac{i}{2} \eta^{\mu_3 \mu_5} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_4 \beta} \gamma_\beta \gamma_5 + \frac{i}{3} \eta^{\mu_4 \mu_5} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \beta} \gamma_\beta \gamma_5.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La valeur nulle du terme linéaire en P_μ provient de l'exigence d'absence de dérivées sur les spineurs extérieurs.

Les dérivées covariantes P_μ peuvent être éliminées au profit du tenseur de force $G_{\mu\nu}$, du tenseur dual $\tilde{G}_{\mu\nu}$ ou de leurs dérivées à l'aide des relations :

$$[P_\mu, P_\nu] = i g_s G_{\mu\nu}, \quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = i g_s \tilde{G}_{\mu\nu}, \quad i D_\mu F \equiv [P_\mu, F], \tag{2.25}$$

où F désigne tout champ qui se transforme suivant la représentation adjointe de $SU(3)_C$. Les premiers termes de l'expansion (2.13) deviennent alors :

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{-ig_s}{2(4\pi)^2} M \left(N_\varepsilon - \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) G_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\
 S_3 &= \frac{-ig_s}{3(4\pi)^2} \left(N_\varepsilon - \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) D^\nu G_{\mu\nu} \gamma^\mu \\
 S_4 &= \frac{-ig_s^2}{6(4\pi)^2} \frac{1}{M} \left(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{3}{2} i G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} \gamma_5 - 3i G_\alpha^\mu G^{\nu\alpha} \sigma_{\mu\nu} - \frac{1}{2g_s} D_\alpha D^\alpha G_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) \\
 S_5 &= \frac{-ig_s^2}{8(4\pi)^2} \frac{1}{M^2} \left(\frac{6}{5} i [D^\alpha G_{\mu\alpha}, G^{\mu\nu}] \gamma_\nu + \frac{2}{15} i [G_{\mu\alpha}, D^\alpha G^{\mu\nu}] \gamma_\nu \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} \left\{ D^\alpha G_{\mu\alpha}, \tilde{G}^{\mu\nu} \right\} \gamma_\nu \gamma_5 + \frac{2}{3} \left\{ G_{\mu\alpha}, D^\alpha \tilde{G}^{\mu\nu} \right\} \gamma_\nu \gamma_5 - \frac{8}{15g_s} D^\alpha D_\alpha D^\nu G_{\mu\nu} \gamma^\mu \right).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

L'équation (2.26) constitue le résultat central de ce chapitre.

Les corrections dominantes de type pingouin à l'opérateur à quatre quarks initial (2.3) s'expriment simplement en termes des S_n de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_{eff}^{gw} = -ig_w \sum_{n=2}^5 \bar{q}_1 \Gamma^A S_n \Gamma^B q_2 + \mathcal{O}(1/M^3). \tag{2.27}$$

Ces nouveaux opérateurs sont bien invariants de jauge.

Remarquons la présence de densités de gluons scalaire et pseudoscalaire dans le terme S_4 . Des opérateurs anomaux sont donc en principe déjà générés au premier ordre possible de l'expansion en $1/M$.

Appliquons à présent les résultats (2.26) et (2.27) au cas de l'évolution à courte distance d'opérateurs faibles $\Delta F \neq 0$ du Modèle Standard.

2.2 Opérateurs faibles du Modèle Standard

L'intégration du boson de jauge W dans les interactions entre courants chargés du Modèle Standard électrofaible donne lieu à des opérateurs effectifs du type (2.3) avec $\Gamma^{A(B)} = \gamma_\mu^{(\mu)} (1 - \gamma_5)$. Considérons dans un premier temps une intégration au 'tree-level'. Schématiquement, nous avons :

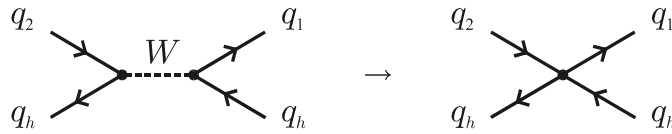


Fig.12

Cette intégration n'est bien entendu possible que si $M \ll M_W$. La contribution des boucles de quark top aux désintégrations des mésons B et K ne peut donc être traitée dans le formalisme développé ici.

Ce dernier est par contre bien adapté à la description des effets des quarks b et c dans les désintégrations des mésons D et K , respectivement. Les premiers étant toutefois

supprimés par le facteur $|V_{ub}V_{cb}^*| \sim (0.22)^5$, nous allons dès à présent nous concentrer sur les seconds.

Le couplage effectif associé à l'opérateur 'tree-level'

$$Q_2^{(c)} = 4(\bar{d}_L \gamma_\mu c_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu s_L) \quad (2.28)$$

défini à l'échelle M_W est donné par

$$g_w^{MS} = -V_{cs}V_{cd}^*G_F/\sqrt{2}. \quad (2.29)$$

Après intégration du quark charmé, les spineurs c et \bar{c} de l'équation (2.28) sont éliminés au profit du propagateur en champs externes correspondant, développé en série en $1/m_c$.

La structure chirale de l'opérateur initial annule cependant les contributions de n pair. Les premiers termes non nuls sont obtenus pour $n = 3$ et $n = 5$. Ils correspondent à des opérateurs de dimension six et huit, respectivement :

$$\mathcal{L}_{eff}^{\Delta S=1} = \mathcal{L}_{6d} + \mathcal{L}_{8d} + \dots \quad (2.30)$$

Les opérateurs anomaux liés à S_4 sont donc supprimés par $1/M_W$ (ou $1/m_t$, cf. section 2.2.3) dans le Modèle Standard. Le contenu en anomalies des opérateurs générés via S_5 , quant à lui, reste à analyser.

2.2.1 Opérateurs de dimension six

Considérons tout d'abord le cas bien connu des opérateurs de dimension six [57]. Ceci nous permettra d'illustrer la méthode et nous fournira par la même occasion un point de comparaison utile lors de l'étude des opérateurs de dimension huit.

L'effet du mécanisme de GIM incomplet au-dessus de la masse du quark charmé [58] ne se manifeste qu'au-delà de l'approximation à une boucle [59]. L'évolution à courte distance de l'opérateur $Q_2^{(c)}$ de $\mu = M_W$ à $\mu = m_c$ ne fait donc intervenir que les opérateurs courant-courant habituels $Q_1^{(c)} \equiv 4(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu c_L)$ et $Q_2^{(c)}$ [60], à l'ordre dominant. Ceux-ci disparaissent lorsque le quark charmé est intégré, tandis que les opérateurs qui nous intéressent sont générés au premier ordre en g_s par insertion de S_3 dans l'équation (2.27) :

$$\mathcal{L}_{6d} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{cs}V_{cd}^*\frac{g_s}{6\pi^2}\ln\left(\frac{m_c^2}{\mu^2}\right)\bar{d}_L D^\nu G_{\mu\nu} \gamma^\mu s_L, \quad (2.31)$$

avec $\mu < m_c$.

Rappelons que le calcul standard des opérateurs pingouins gluoniques de dimension six implique l'utilisation des équations du mouvement classiques :

$$D^\nu G_{\mu\nu} = g_s \sum_{q=u,d,s} (\bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q) \frac{\lambda^a}{2}. \quad (2.32)$$

Appliquons donc ces équations, ainsi que la relation $(\lambda^a)^{ij} (\lambda^a)^{kl} = 2(\delta^{il}\delta^{kj} - \delta^{ij}\delta^{kl}/3)$, à la densité lagrangienne (2.31). Nous obtenons :

$$\mathcal{L}_{6d} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}V_{cs}V_{cd}^*\frac{\alpha_s}{3\pi}\ln\left(\frac{m_c^2}{\mu^2}\right)\sum_{q=u,d,s}\left[\bar{d}_L^i \gamma^\mu s_L^j \bar{q}^j \gamma_\mu q^i - \frac{1}{3}\bar{d}_L^i \gamma^\mu s_L^i \bar{q}^j \gamma_\mu q^j\right]. \quad (2.33)$$

L'identité de Fierz (E.10) de l'annexe E.2 permet à présent de réécrire cette expression en termes d'opérateurs singulets de couleur. Nous retrouvons ainsi les opérateurs courant-courant et densité-densité bien connus⁶ :

$$\mathcal{L}_{6d} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{cd}^* \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left(\frac{m_c^2}{\mu^2} \right) \sum_{k=3}^6 c_k^{(6)} Q_k^{(6)} \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_3^{(6)} &= 4 \sum_{q=u,d,s} (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) (\bar{q}_L \gamma^\mu q_L) & Q_5^{(6)} &= 4 \sum_{q=u,d,s} (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) (\bar{q}_R \gamma^\mu q_R) \\ Q_4^{(6)} &= 4 \sum_{q=u,d,s} (\bar{d}_L \gamma_\mu q_L) (\bar{q}_L \gamma^\mu s_L) & Q_6^{(6)} &= -8 \sum_{q=u,d,s} (\bar{d}_L q_R) (\bar{q}_R s_L) \end{aligned} \quad (2.35)$$

et

$$c_3^{(6)} = c_5^{(6)} = -\frac{1}{9}, \quad c_4^{(6)} = c_6^{(6)} = \frac{1}{3}. \quad (2.36)$$

2.2.2 Opérateurs de dimension huit

Considérons à présent les opérateurs de type pingouin de dimension huit. Ceux-ci sont simplement obtenus par insertion de S_5 dans l'équation (2.27), ce qui donne :

$$\mathcal{L}_{8d} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{cd}^* \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{m_c^2} \sum_{k=1}^5 c_k^{(8)} Q_k^{(8)} \quad (2.37)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_1^{(8)} &= i \bar{d}_L [D^\alpha G_{\mu\alpha}, G^{\mu\nu}] \gamma_\nu s_L \\ Q_2^{(8)} &= i \bar{d}_L [G_{\mu\alpha}, D^\alpha G^{\mu\nu}] \gamma_\nu s_L \\ Q_3^{(8)} &= \bar{d}_L \left\{ D^\alpha G_{\mu\alpha}, \tilde{G}^{\mu\nu} \right\} \gamma_\nu s_L \\ Q_4^{(8)} &= \bar{d}_L \left\{ G_{\mu\alpha}, D^\alpha \tilde{G}^{\mu\nu} \right\} \gamma_\nu s_L \\ Q_5^{(8)} &= \bar{d}_L D^\alpha D_\alpha D^\nu G_{\mu\nu} \gamma^\mu s_L \end{aligned} \quad (2.38)$$

et

$$c_1^{(8)} = \frac{6}{5}, \quad c_2^{(8)} = \frac{2}{15}, \quad c_3^{(8)} = -\frac{4}{3}, \quad c_4^{(8)} = -\frac{2}{3}, \quad c_5^{(8)} = -\frac{8}{15} g_s^{-1}. \quad (2.39)$$

Le résultat ci-dessus, comme d'ailleurs le Lagrangien (2.31), doit être invariant sous la triple opération CPS , où S désigne l'échange des saveurs d et s , dans la limite de conservation de CP (adoptée tout au long de ce travail) [61]. Considérons donc le comportement sous cette symétrie des différents opérateurs impliqués. Celui-ci se déduit facilement des propriétés de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} & \bar{d} P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) s \\ & \quad \downarrow P \\ & \bar{d} P^{\mu_1} \dots P^{\mu_n} \gamma^\nu (1 + \gamma_5) s \\ & \quad \downarrow C \\ & \bar{s} (-P^{\mu_n}) \dots (-P^{\mu_1}) \gamma^\nu (-1 + \gamma_5) d \\ & \quad \downarrow S \\ & \bar{d} P^{\mu_n} \dots P^{\mu_1} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) s, \end{aligned} \quad (2.40)$$

⁶Notons que les termes finis caractéristiques du schéma de régularisation dimensionnelle naïf utilisé ici peuvent également être retrouvés en considérant l'insertion de S_3 entre les spineurs externes de l'opérateur (2.28) en d dimensions.

avec n impair. L'invariance des Lagrangiens (2.31) et (2.37) peut ainsi être vérifiée. Ceci explique au passage la présence des commutateurs et anticommutateurs dans l'équation (2.38).

Les opérateurs de dimension huit $\Delta S = 1$ issus de l'intégration du quark charmé ont déjà été considérés il y a une dizaine d'années par les auteurs de la référence [52]. L'application précoce des équations du mouvement classiques dans leur dérivation introduit cependant une dépendance explicite en les masses des quarks légers d et s . Celle-ci est artificielle puisque le propagateur en champs externes est fondamentalement une fonction et non un opérateur différentiel agissant sur les états extérieurs. De plus, bien que cette utilisation des équations du mouvement classiques ne soit pas interdite en tant que telle, elle s'accompagne dans la référence [52] d'une expansion au premier ordre en $m_{s,d}$ qui, elle, n'est pas justifiée. En fait, la masse du quark d est même posée égale à zéro, ce qui brise l'invariance sous CPS . Ceci explique la différence entre le résultat ci-dessus et celui de la référence [52].

Remarquons encore la dépendance linéaire en $G^{\mu\nu}$ du dernier opérateur de l'équation (2.38). Celui-ci contribue de ce fait à la partie finie du diagramme standard à une boucle \bar{d} - s -gluon (contenant tous les ordres en $1/m_c$). Lors du calcul de ce diagramme, l'intégrale qui apparaît naturellement, étant donné l'approximation à quatre quarks, est la fonction de polarisation du vide :

$$I \equiv \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m_c^2 - x(1-x)q^2}{\mu^2} \right), \quad (2.41)$$

où q^μ désigne le quadrimoment du gluon. Le développement de cette intégrale au premier ordre non trivial en $1/m_c$ s'écrit :

$$I = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{m_c^2}{\mu^2} - \frac{1}{5} \frac{q^2}{m_c^2} \right) + \mathcal{O}(q^4/m_c^4). \quad (2.42)$$

Le rapport des coefficients des deux termes ci-dessus correspond bien au poids relatif entre, d'une part, l'opérateur de l'équation (2.31) et, d'autre part, celui de l'équation (2.37) avec $k = 5$, ce qui constitue une vérification du résultat (2.37).

Examinons à présent le contenu en anomalies des opérateurs de dimension huit.

Opérateurs anomaux

La présence éventuelle des opérateurs anomaux Q_{AT} et Q_{AA} dans la densité lagrangienne (2.37) est à rechercher dans les combinaisons

$$Q_1^{(8)} + Q_2^{(8)} = i\bar{d}_L D^\alpha [G_{\mu\alpha}, G^{\mu\nu}] \gamma_\nu s_L \quad (2.43)$$

et

$$Q_3^{(8)} + Q_4^{(8)} = \bar{d}_L D^\alpha \left\{ G_{\mu\alpha}, \tilde{G}^{\mu\nu} \right\} \gamma_\nu s_L, \quad (2.44)$$

respectivement.

Il se fait que la partie gluonique de la première de ces deux combinaisons est un pur octet sous $SU(3)_C$. Le Lagrangien effectif (2.37) ne peut donc contenir d'opérateur d'anomalie de trace, contrairement à ce qui a été obtenu dans la référence [52]. Ceci peut être vu comme une conséquence de l'invariance sous CPS puisque c'est de celle-ci que découle la présence du commutateur de l'équation (2.43).

Signalons qu'il existe tout de même un opérateur de dimension huit invariant sous *CPS* et porteur d'une contribution anormale scalaire :

$$Q_6^{(8)} = \bar{d}_L (\not{P} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \not{P}) s_L. \quad (2.45)$$

Celui-ci n'est cependant pas généré par l'expansion (2.30) puisqu'il requiert l'action de dérivées sur les spineurs extérieurs.

Les opérateurs effectifs faisant intervenir l'anomalie de trace dans la série (2.30) sont donc de dimension au moins égale à dix, dans l'approximation à une boucle. Ainsi, par exemple, l'opérateur $i\bar{d}_L \{D_\alpha G^{\alpha\mu}, \{G_{\mu\beta}, G^{\beta\nu}\}\} \gamma_\nu s_L$ présente la partie anormale suivante :

$$Q_{AT}^{(10)} \sim \bar{d}_L D_\alpha G^{\alpha\beta} \gamma_\beta s_L G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}. \quad (2.46)$$

Celle-ci est toutefois supprimée par $1/m_c^4$. Les effets de l'anomalie de trace liés au quark charmé dans le diagramme 'pingouin annihilation' de la figure 8 (p.35)⁷ sont donc également supprimés par $1/m_c^4$, à une boucle.

Notons que la prise en compte de corrections par rapport à l'approximation à une boucle pourrait par ailleurs générer un opérateur tel que celui de l'équation (2.45) (cf. annexe C).

La deuxième des combinaisons introduites ci-dessus, quant à elle, comporte une densité gluonique singulet de couleur. Pour le voir, réécrivons tout d'abord la dérivée covariante sur les champs de gluons en termes de dérivées covariantes sur les spineurs extérieurs. Nous obtenons, à une dérivée totale près :

$$Q_3^{(8)} + Q_4^{(8)} = \left[-i\bar{d}_L \overleftarrow{P}^{\dagger\alpha} \gamma_\nu \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} s_L + i\bar{d}_L \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} \gamma_\nu P^\alpha s_L \right] G_{\mu\alpha}^a \tilde{G}^{\mu\nu b}, \quad (2.47)$$

avec $\overleftarrow{P}_\alpha^\dagger = -i\overleftarrow{\partial}_\alpha + g_s A_\alpha$, la dérivée agissant sur la gauche. La trace sur les indices de couleur et de Lorentz des champs de gluon est ensuite extraite au moyen de la substitution

$$G_{\mu\alpha}^a \tilde{G}^{\mu\nu b} \rightarrow \frac{\delta^{ab}}{8} \frac{\delta_\alpha^\nu}{4} G_{\rho\sigma}^c \tilde{G}^{\rho\sigma c}. \quad (2.48)$$

L'identité $\{\lambda^a, \lambda^a\} = \frac{32}{3} 1_{3 \times 3}$ permet à présent de conclure à la présence de l'opérateur d'anomalie axiale suivant :

$$Q_{AA}^{(8)} = \frac{-i}{12} \left[\bar{d}_L \not{P} s_L - \bar{d}_L \overleftarrow{P}^\dagger s_L \right] G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}, \quad (2.49)$$

dans lequel le coefficient $(c_3^{(8)} + c_4^{(8)})/2 = -1$ de l'opérateur (2.44) a été inclus. Les équations du mouvement classiques

$$\not{P} s = m_s s, \quad \bar{d} \overleftarrow{P}^\dagger = m_d \bar{d} \quad (2.50)$$

sont finalement utilisées afin de mettre ce résultat sous une forme plus conventionnelle :

$$Q_{AA}^{(8)} = \frac{-i}{12} [m_s \bar{d}_L s_R - m_d \bar{d}_R s_L] G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}. \quad (2.51)$$

⁷Rappelons que le boson W et le quark virtuel c , encore explicites dans la figure 8, ont été intégrés ici. D'autre part, les gluons indiqués sont cette fois effectivement émis par la saveur intermédiaire.

La contribution de cet opérateur aux amplitudes de désintégration des kaons est cependant fortement supprimée dans l'approximation de factorisation. En effet, l'élément de matrice de la densité $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}$ entre les états $|0\rangle$ et $|\pi^0\rangle$ requiert une brisure de l'invariance sous $SU(2)_I$. Les effets de l'anomalie axiale liés au quark charmé peuvent donc être négligés en ce qui concerne la description de la règle $\Delta I = 1/2$.

Notons que ces effets pourraient se révéler plus intéressants dans le cas du mode chargé $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$ (cf. fig.13, avec une saveur virtuelle c . Le mécanisme représenté repose sur le mélange π^0 - η_0 induit par les effets de brisure de l'isospin). En effet, ce dernier étant lui-même supprimé par rapport aux canaux $\Delta I = 1/2$, la contribution de l'anomalie s'en trouve comparativement plus importante. Le facteur $1/12$ de l'équation (2.51) supprime toutefois à nouveau cette contribution.

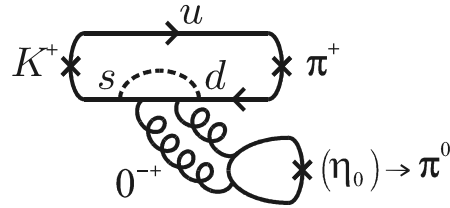


Fig.13

Eléments de matrice

L'intérêt des opérateurs $\Delta S = 1$ de dimension huit dérivés en (2.37) dépasse la question de leur contenu (ou absence de contenu) en anomalies. Leur contribution aux désintégrations des kaons, bien que supprimée par un facteur de l'ordre de m_K^2/m_c^2 , pourrait en effet s'avérer compétitive avec celle provenant d'autres corrections de QCD à courte distance non dominantes [59].

Une évaluation complète des effets en $1/m_c^2$ dans les désintégrations des kaons requiert cependant le calcul d'éléments de matrice hadroniques à basse énergie, pour lesquels un traitement perturbatif en g_s est exclu. Leur estimation par des méthodes non perturbatives telles que des simulations sur réseau, l'écriture de règles de somme ou la modélisation des interactions fortes à basse énergie à l'aide de Lagrangiens chiraux (éventuellement combinés avec un développement en $1/N_C$) constitue une étude en soi, et ne sera pas entreprise ici.

Un premier enseignement peut néanmoins être tiré de l'approximation de factorisation. La partie factorisable du Lagrangien (2.37) est donnée par :

$$(\mathcal{L}_{8d})_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{cd}^* \frac{\alpha_s}{36\pi} \frac{1}{m_c^2} \bar{d} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) s \left[2 (D^\alpha G_{\mu\alpha})^a \tilde{G}^{\mu\nu a} + G_{\mu\alpha}^a (D^\alpha \tilde{G}^{\mu\nu})^a \right]. \quad (2.52)$$

Celle-ci peut être obtenue par exemple au moyen de la substitution $\{\lambda^a, \lambda^b\} \rightarrow 4/3 \delta^{ab}$ dans les troisième et quatrième opérateurs de l'équation (2.38). Seules les combinaisons de champs de gluons singulets de couleur pseudoscalaires survivent. La contribution de l'expression ci-dessus aux amplitudes factorisées $K \rightarrow \pi\pi$ s'annule donc dans la limite d'isospin, de façon semblable à ce qui a été observé il y a quelques instants pour l'opérateur d'anomalie axiale (contenu dans l'équation (2.38)). Un effet non négligeable des opérateurs de dimension huit induits par le quark charmé dans le canal $\Delta I = 1/2$ requiert donc une violation importante de la factorisation⁸.

⁸ Soulignons toutefois qu'une utilisation combinée des équations du mouvement et des identités de Fierz

2.2.3 Opérateurs de dimension cinq et sept

Nous avons vu que la structure chirale de l'opérateur initial (2.28) éliminait les contributions des termes S_{2n} dans le Lagrangien effectif (2.27). Des opérateurs pingouins 'chromomagnétiques' de dimension cinq sont pourtant générés par corrections à courte distance aux vertex faibles du Modèle Standard. Leur prise en compte nécessite en fait d'aller au-delà de l'approximation à quatre quarks. Ainsi, un calcul à une boucle incluant le propagateur du boson W dans la jauge unitaire donne les contributions de dimension cinq suivantes pour les saveurs virtuelles c et t [62] :

$$\mathcal{L}_{5d} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{q_h s} V_{q_h d}^* \frac{g_s}{32\pi^2} c_{q_h}^{(5)} Q^{(5)} \quad (q_h = c, t) \quad (2.53)$$

avec

$$Q^{(5)} = m_s \bar{d}_L G_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} s_R + m_d \bar{d}_R G_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} s_L \quad (2.54)$$

et

$$c_c^{(5)} = \mathcal{O}\left(\frac{m_c^2}{M_W^2}\right), \quad c_t^{(5)} = \mathcal{O}(1). \quad (2.55)$$

Les équations du mouvement (2.50) ont été utilisées pour dériver ce résultat⁹.

La partie longitudinale du propagateur du W (qui correspond à l'échange de particules scalaires, les 'would-be-Goldstone', dans la jauge de 't Hooft-Feynman) induit donc une structure chirale compatible avec les opérateurs S_{2n} . Ces nouvelles contributions sont cependant supprimées par un facteur de l'ordre de $m_{s,d} m_c / M_W^2$ dans le cas du quark charmé ou $m_{s,d} / m_t$ dans celui du top.

Dans le cas de S_2 , ceci peut être vérifié explicitement à l'aide des équations (2.26) et (2.53). Celles-ci impliquent en effet :

$$c_c^{(5)} Q^{(5)} \sim \frac{m_c^2}{M_W^2} \left(m_s \bar{d}_L \frac{S_2}{m_c} s_R + m_d \bar{d}_R \frac{S_2}{m_c} s_L \right) \quad (2.56)$$

pour le quark charmé et

$$c_t^{(5)} Q^{(5)} \sim \left(m_s \bar{d}_L \frac{S_2}{m_t} s_R + m_d \bar{d}_R \frac{S_2}{m_t} s_L \right) \quad (2.57)$$

pour le top.

Or des suppressions semblables sont attendues également pour les autres S_{2n} . En effet, le changement d'hélicité des spineurs extérieurs implique une dépendance linéaire en $m_{s,d}$, tandis que la limite $M_W \rightarrow \infty$ dans le cas du c et une analyse dimensionnelle dans le cas du t fixent les dénominateurs. Les opérateurs anomaux issus de S_4 , en particulier, sont ainsi supprimés par $m_{s,d} / M_W^2$ ou $m_{s,d} / m_t^2$.

L'argument dimensionnel utilisé ci-dessus s'applique également à la contribution d'une boucle de quark t aux désintégrations des mésons B . Les opérateurs anomaux correspondants sont donc supprimés par un facteur de l'ordre de m_b / m_t^2 .

telle que celle qui a permis d'aboutir à l'équation (2.34) mène à un processus de factorisation différent de celui dont il est question ici.

⁹Notons toutefois que celui-ci peut également être dérivé dans la jauge de 't Hooft-Feynman sans qu'il ne soit nécessaire d'utiliser ces équations.

La contribution de la boucle de quark c induite par l'opérateur 'tree-level'

$$Q_2^{(c)} = 4(\bar{s}_L \gamma_\mu c_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) \quad (2.58)$$

à ces mêmes désintégrations, quant à elle, est plus problématique. En effet, les moments associés aux champs de gluons peuvent cette fois être supérieurs à la masse de la saveur intermédiaire m_c . Dans les désintégrations des mésons B en deux corps, par exemple, le moment carré d'un gluon unique émis via l'intégrale de polarisation du vide (2.41) est estimé typiquement dans l'intervalle $m_b^2/4 \lesssim q^2 \lesssim m_b^2/2$ [63]. Dans ces conditions, le quark charmé ne peut bien entendu plus être intégré.

Nous ne pouvons donc nous prononcer sur l'importance des effets anomaux liés aux structures chirales S_{2n+1} dans les désintégrations des mésons B , à moins de faire appel à l'approximation de factorisation, comme nous allons le voir dans la section suivante dans le cas du mode $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$ (mentionné en début de chapitre).

2.2.4 Effet du quark charmé dans $B \rightarrow K \eta'$

Considérons donc la contribution aux désintégrations $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$ du processus $\bar{b} \rightarrow \bar{c} c \bar{s}$, suivi de l'hadronisation $c \bar{c} \rightarrow (gluons)_{AA} \rightarrow \eta'$ (cf. fig.7, p.35, avec une saveur intermédiaire c). Ce mécanisme, quoique supprimé par l'inverse de la masse du quark charmé, est favorisé par rapport à la contribution du processus $\bar{b} \rightarrow \bar{u} u \bar{s}$ par les éléments de matrice de CKM qu'il implique : $|V_{cb}^* V_{cs}| \sim (0.22)^2$, tandis que $|V_{ub}^* V_{us}| \sim (0.22)^4$.

Les effets du quark c dans les désintégrations $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$ ont déjà été analysés à différentes reprises [64, 65]. Le calcul des premiers termes de l'expansion du propagateur en champs externes (2.26) nous permet néanmoins de poser un regard nouveau sur le rôle de l'anomalie axiale dans la conversion de la paire $c \bar{c}$ en η' .

Dans l'approximation de factorisation, l'amplitude de désintégration $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$ induite par l'opérateur (2.58) (ou plus précisément son hermitien conjugué¹⁰) s'écrit :

$$\left\langle \eta' K^0 \left| Q_2^{(c)\dagger} \right| B^0 \right\rangle_F = -\frac{1}{3} \left\langle \eta' \left| \bar{c} \gamma_\mu \gamma_5 c \right| 0 \right\rangle \left\langle K^0 \left| \bar{b} \gamma^\mu s \right| B^0 \right\rangle. \quad (2.59)$$

Introduisons la définition habituelle :

$$-i f_{\eta'}^{(c)} p_{\eta'}^\mu \equiv \left\langle \eta' \left| \bar{c} \gamma^\mu \gamma_5 c \right| 0 \right\rangle. \quad (2.60)$$

Les quarks lourds ne peuvent contribuer aux constantes de désintégration des pseudoscalaires légers qu'au travers de boucles. Nous avons donc :

$$-i f_{\eta'}^{(c)} p_{\eta'}^\mu = \left\langle \eta' \left| -i Tr \left[(\mathcal{P} - m_c)_{xx}^{-1} \gamma^\mu \gamma_5 \right] \right| 0 \right\rangle, \quad (2.61)$$

où la trace porte à la fois sur les indices spinoriels et de couleur. Insérons les premiers termes de l'expansion du propagateur du quark charmé (2.26) dans l'expression ci-dessus. Seule une partie de S_5 survit. Nous obtenons ainsi¹¹ :

$$-i f_{\eta'}^{(c)} p_{\eta'}^\mu = \left\langle \eta' \left| \frac{\alpha_s}{12\pi m_c^2} \left[2(D^\alpha G_{\beta\alpha})^a \tilde{G}^{\beta\mu a} + G_{\beta\alpha}^a (D^\alpha \tilde{G}^{\beta\mu})^a \right] \right| 0 \right\rangle + \mathcal{O}(1/m_c^4). \quad (2.62)$$

¹⁰ Nous ne distinguons toutefois pas les amplitudes $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$ et $\bar{B}^0 \rightarrow \bar{K}^0 \eta'$, celles-ci étant identiques dans la limite de conservation de CP considérée tout au long de ce travail. Les éléments de matrice de CKM associés sont donc supposés réels.

¹¹ Remarquez que les équations (2.62) et (2.52) sont compatibles. Factoriser au niveau de l'opérateur initial ou après calcul des corrections revient donc bien au même, dans le cas où ce calcul est permis.

Considérons la partie anormale de cet élément de matrice, vraisemblablement dominante. Celle-ci s'extrait de façon analogue à celle du Lagrangien effectif (2.37), obtenue en (2.49) :

$$-if_{\eta'}^{(c)AA} p_{\eta'}^\mu = \frac{1}{32m_c^2} \left\langle \eta' \left| \frac{\alpha_s}{\pi} \partial^\mu (G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a}) \right| 0 \right\rangle. \quad (2.63)$$

L'estimation (1.136) implique à présent :

$$f_{\eta'}^{(c)AA} = \frac{-1}{32m_c^2} \left\langle \eta' \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a} \right| 0 \right\rangle \simeq -6.5 \frac{\text{MeV}^3}{m_c^2} \simeq -3 \text{ MeV} \quad (2.64)$$

pour $m_c = 1.5 \text{ GeV}$.

L'élément de matrice associé à la transition $B \rightarrow K$, quant à lui, admet la paramétrisation suivante :

$$\langle K^0 | \bar{b} \gamma^\mu s | B^0 \rangle = q_+^\mu f_+(q^2) + q_-^\mu f_-(q^2), \quad (2.65)$$

avec $q_\pm \equiv p_B \pm p_K$ (et donc $q_\pm^\mu = p_{\eta'}^\mu$). Une fois l'expression ci-dessus contractée avec l'amplitude (2.60), proportionnelle à l'impulsion du η' , les facteurs de forme f_+ et f_- se trouvent multipliés par $q_+ q_- = m_B^2 - m_K^2$ et $q_-^2 = m_{\eta'}^2$, respectivement. La contribution de f_- peut donc être négligée par rapport à celle de f_+ . D'autre part, nous utiliserons la formule du dipôle pour modéliser la dépendance de f_+ en q^2 :

$$f_+(q^2) = \frac{f_+(0)}{1 - q^2/m_*^2}, \quad (2.66)$$

avec $f_+(0) \simeq 0.32$ et $m_* \simeq 5 \text{ GeV}$ [64, 66].

La prise en compte de l'évolution à courte distance de l'interaction effective (2.58) de $\mu = M_W$ à $\mu = m_b$ requiert par ailleurs la substitution $1/3 \rightarrow c_2(m_b)/3 + c_1(m_b)$ dans l'amplitude (2.59), avec $c_2(m_b)$ et $c_1(m_b)$, les coefficients de Wilson associés aux opérateurs $Q_2^{(c)}$ et $Q_1^{(c)} \equiv 4(\bar{s}_L \gamma_\mu b_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu c_L)$ à l'échelle m_b , respectivement. Suivant l'analyse phénoménologique des références [64, 67], cette dernière combinaison est en outre remplacée par le coefficient $a_1 \simeq 0.25$ afin d'améliorer l'approximation de factorisation.

Finalement, la contribution de l'anomalie axiale à l'amplitude (2.59) s'écrit :

$$\left| \mathcal{M}(B^0 \rightarrow K^0 \eta')_{AA}^{(c)} \right| \simeq \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{cs} a_1 \left| f_{\eta'}^{(c)AA} \right| (m_B^2 - m_K^2) \frac{f_+(0)}{1 - m_{\eta'}^2/m_*^2}. \quad (2.67)$$

Pour $V_{cb} \simeq 0.04$, $V_{cs} \simeq 1$ et $m_c \simeq 1.5 \text{ GeV}$, nous obtenons :

$$\left| \mathcal{M}(B^0 \rightarrow K^0 \eta')_{AA}^{(c)} \right| \simeq 4.9 \frac{\text{MeV}^3}{m_c^2} \simeq 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ MeV}. \quad (2.68)$$

Le rapport de branchement expérimental $Br(B^0 \rightarrow K^0 \eta')_{\text{exp}} = (6.3 \pm 0.7) \cdot 10^{-5}$ [21], quant à lui, implique :

$$\left| \mathcal{M}(B^0 \rightarrow K^0 \eta')_{\text{exp}} \right| = (8.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-5} \text{ MeV}. \quad (2.69)$$

L'opérateur d'anomalie axiale induit par le quark charmé n'est donc en mesure de reproduire que quelques pour-cent de l'amplitude expérimentale $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$, dans l'approximation de factorisation :

$$\left| \mathcal{M}_{AA}^{(c)} / \mathcal{M}_{\text{exp}} \right| \sim 3\% (m_c \sim 1.5 \text{ GeV}) - 6\% (m_c \sim 1 \text{ GeV}). \quad (2.70)$$

Etant donné l'expression (2.61) proposée pour la constante de désintégration $f_{\eta'}^{(c)}$, la conversion de la paire $c\bar{c}$ en η' apparaît dans notre analyse gouvernée par des structures gluoniques du type S_{2n+1} . Ceci n'est pas le cas dans les autres analyses [64, 65], où l'équation anormale (1.59) est utilisée dès le départ :

$$f_{\eta'}^{(c)} m_{\eta'}^2 = \langle \eta' | \partial_\mu (\bar{c} \gamma^\mu \gamma_5 c) | 0 \rangle = \langle \eta' | 2m_c \bar{c} i \gamma_5 c - \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a} | 0 \rangle. \quad (2.71)$$

La contribution des boucles de quark charmé est à nouveau estimée à l'aide du propagateur en champs externes correspondant, mais fait cette fois intervenir des structures gluoniques du type S_{2n} exclusivement :

$$f_{\eta'}^{(c)} m_{\eta'}^2 = \langle \eta' | 2m_c Tr \left[(\mathcal{P} - m_c)_{xx}^{-1} \gamma_5 \right] - \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a} | 0 \rangle. \quad (2.72)$$

La contribution de S_4 à l'élément de matrice ci-dessus est annulée par l'anomalie axiale, conformément à l'exigence de découplage du quark c dans la limite $m_c \rightarrow \infty$. La trace de la partie de S_6 appropriée, calculée dans la référence [65], fournit donc la contribution dominante :

$$f_{\eta'}^{(c)} m_{\eta'}^2 = \left\langle \eta' \left| \frac{\alpha_s}{12\pi} \frac{1}{m_c^2} \partial_\mu \left[(D^\alpha G_{\beta\alpha})^a \tilde{G}^{\beta\mu a} + \frac{1}{4} \partial^\mu (G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a}) \right] \right| 0 \right\rangle + \mathcal{O}(1/m_c^4). \quad (2.73)$$

Les équations (2.73) et (2.62) sont en fait équivalentes. Les identités de Bianchi

$$D_\alpha G_{\mu\nu} + D_\nu G_{\alpha\mu} + D_\mu G_{\nu\alpha} = 0 \quad (2.74)$$

impliquent en effet :

$$\partial_\mu \partial^\alpha (G_{\beta\alpha}^a \tilde{G}^{\beta\mu a}) = \partial_\mu \partial^\mu (G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a}) / 4, \quad (2.75)$$

et par conséquent :

$$\partial_\mu [2 (D^\alpha G_{\beta\alpha})^a \tilde{G}^{\beta\mu a} + G_{\beta\alpha}^a (D^\alpha \tilde{G}^{\beta\mu})^a] = \partial_\mu [(D^\alpha G_{\beta\alpha})^a \tilde{G}^{\beta\mu a} + \frac{1}{4} \partial^\mu (G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a})]. \quad (2.76)$$

L'équation (2.73) correspond donc à la divergence de l'identité (2.62). Ceci est un cas particulier de la relation plus générale :

$$-i Tr \left[\partial_\mu (\mathcal{P} - M)_{xx}^{-1} \gamma^\mu \gamma_5 \right] = 2M Tr \left[(\mathcal{P} - M)_{xx}^{-1} \gamma_5 \right] - \frac{\alpha_s}{4\pi} G_{\alpha\beta}^a \tilde{G}^{\alpha\beta a}, \quad (2.77)$$

induite par l'équation anormale (1.59) pour un quark lourd.

L'utilisation de l'expression (2.61) plutôt que (2.72) présente l'avantage de mener directement à la contribution anormale (2.64). Si celle-ci domine effectivement la constante de désintégration (2.60), la valeur obtenue dans la référence [65] (de forme identique à (2.64), présentée comme dominante, mais non reconnue comme anormale) a été surestimée d'un facteur 8/3. Ceci ne modifie cependant pas l'ordre de grandeur de $f_{\eta'}^{(c)}$ ni celui de sa contribution à l'amplitude $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$.

Notons pour terminer que les effets du quark charmé dans les amplitudes factorisées $B \rightarrow K f_0(\sigma)$ peuvent être traités de façon analogue. Leur suppression est cependant encore plus forte :

$$\langle f_0(\sigma) | \bar{c} \gamma^\mu c | 0 \rangle = \left\langle f_0(\sigma) \left| -i Tr \left[(\mathcal{P} - m_c)_{xx}^{-1} \gamma^\mu \right] \right| 0 \right\rangle = \mathcal{O}(1/m_c^4). \quad (2.78)$$

L'absence de contribution de S_5 dans l'élément de matrice ci-dessus (liée à nouveau à la présence des commutateurs des deux premiers termes) résulte de l'invariance des interactions fortes sous conjugaison de charge. En effet, le courant vectoriel $\bar{c}\gamma^\mu c$ étant de C -parité impaire, les opérateurs contribuant à l'expansion en $1/m_c$ du propagateur du quark c dans l'équation (2.78) ne peuvent contenir moins de trois champs de gluons. Or les opérateurs de S_5 peuvent n'en contenir que deux.

2.2.5 Cadre général de l'expansion en produits d'opérateurs

Situons à présent brièvement le Lagrangien effectif de dimension huit obtenu en (2.37) dans le cadre général de l'expansion en produits d'opérateurs.

Il est bien connu que l'intégration au ‘tree-level’ du boson de jauge W représentée dans la figure 12 est modifiée en présence d'interactions fortes. De nouveaux opérateurs effectifs locaux $\Delta S = 1$ sont nécessaires dans ce cas afin de décrire les effets du W à l'échelle μ ($\Lambda_{QCD} < \mu < M_W$, où Λ_{QCD} désigne l'échelle de confinement) :

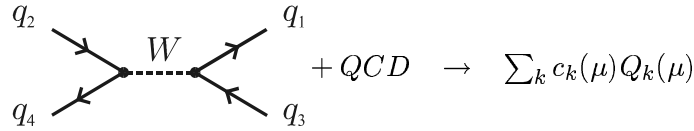


Fig.14

Le calcul de cette évolution à courte distance de M_W à μ (à laquelle nous avons déjà fait allusion dans la section 2.2.1) se fait en différentes étapes, qui consistent chacune en (i) l'intégration des degrés de liberté dont la masse est devenue supérieure à μ , puis (ii) l'évolution de la théorie effective ainsi obtenue jusqu'au seuil d'intégration suivant à l'aide des méthodes du groupe de renormalisation. Dans le cas $\mu < m_c$, nous avons donc explicitement :

1. L'intégration du W et du t à l'échelle $\mu \sim \mathcal{O}(M_W)$. Notons que des opérateurs de dimension huit peuvent en principe déjà apparaître à ce stade. Ceux-ci sont cependant supprimés par $1/M_W^2$ ou $1/m_t^2$. Le Lagrangien effectif résultant est ensuite évolué de M_W à m_b .
2. L'intégration du b à l'échelle $\mu \sim \mathcal{O}(m_b)$, suivie de l'évolution de m_b à m_c .
3. L'intégration du c à l'échelle $\mu \sim \mathcal{O}(m_c)$. C'est l'étape que nous avons effectuée dans les sections 2.2.1 et 2.2.2, à l'ordre α_s , pour des opérateurs à quatre quarks. Outre les opérateurs de dimension six bien connus, nous avons généré l'ensemble des corrections de dimension huit à cet ordre. Il nous a suffi pour cela de considérer l'opérateur effectif dominant $Q_2^{(c)}$ (avec un coefficient $c_2^{(c)} = 1$) au-dessus de la masse du quark charmé. Or l'opérateur $Q_1^{(c)}$ également présent (et important) à cette échelle peut être traité de façon semblable.

2.3 Opérateurs ‘faibles’ au-delà du Modèle Standard

Dans la section 2.1, nous avons proposé une méthode générale permettant l'intégration à une boucle d'un quark lourd dans une interaction effective à quatre quarks. Nous avons vu ensuite que la structure chirale des opérateurs faibles du Modèle Standard supprimait les contributions de type S_{2n} dans l'expansion (2.27) obtenue. Au-delà du Modèle

Standard, l'interaction effective $\Delta S = 1$ la plus simple menant à de telles contributions s'écrit :

$$Q_w = (\bar{d}_L c_R)(\bar{c}_L s_R), \quad (2.79)$$

dans le cas d'une saveur intermédiaire c . Un tel opérateur peut par exemple être généré par l'intégration au 'tree-level' d'un boson de Higgs lourd dont le couplage aux quarks change la saveur, tel qu'il en existe dans certains modèles multi-Higgs [68] :

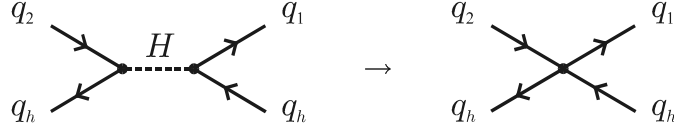


Fig.15

Les opérateurs de dimension sept suivants sont ainsi obtenus à partir de S_4 :

$$\mathcal{L}_{7d} = -g_w \frac{\alpha_s}{24\pi} \frac{1}{m_c} \sum_{k=1}^4 c_k^{(7)} Q_k^{(7)} \quad (2.80)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_1^{(7)} &= \bar{d}_L G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} s_R \\ Q_2^{(7)} &= i\bar{d}_L G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} s_R \\ Q_3^{(7)} &= i\bar{d}_L G_{\alpha}^{\mu} G^{\nu\alpha} \sigma_{\mu\nu} s_R \\ Q_4^{(7)} &= \bar{d}_L D_{\alpha} D^{\alpha} G_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} s_R \end{aligned} \quad (2.81)$$

et

$$c_1^{(7)} = 1, \quad c_2^{(7)} = \frac{3}{2}, \quad c_3^{(7)} = -3, \quad c_4^{(7)} = \frac{-1}{2} g_s^{-1}. \quad (2.82)$$

Leur contenu en anomalies s'extrait via la substitution $\lambda^a \lambda^b \rightarrow 2/3 \delta^{ab}$, ce qui donne :

$$Q_{AT+AA}^{(7)} = \frac{1}{6} \bar{d}_L s_R \left[G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \frac{3}{2} i G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right] \quad (2.83)$$

lorsque les coefficients $c_1^{(7)}$ et $c_2^{(7)}$ sont pris en compte. Signalons toutefois que la constante de couplage effective g_w est en principe supprimée par l'échelle caractéristique de la nouvelle physique en jeu.

Dans l'approximation de factorisation, les opérateurs d'anomalie axiale et de trace (2.83) sont les seules contributions du Lagrangien effectif (2.80) aux désintégrations hadroniques des kaons. Ceux-ci peuvent de ce fait être obtenus alternativement à partir des éléments de matrice factorisés de l'opérateur initial Q_w . La contribution de la boucle de quark charmé aux amplitudes

$$\langle \pi^+ \pi^- | Q_w | \bar{K}^0 \rangle_F = \frac{1}{12} \langle \pi^+ \pi^- | \bar{c} c | 0 \rangle \langle 0 | \bar{d}_L s_R | \bar{K}^0 \rangle \quad (2.84)$$

$$\langle \pi^- \pi^0 | Q_w | K^- \rangle_F = \frac{1}{12} \langle \pi^0 | \bar{c} \gamma_5 c | 0 \rangle \langle \pi^- | \bar{d}_L s_R | K^- \rangle \quad (2.85)$$

peut en effet être réexprimée en termes de combinaisons de champs de gluons singulets de couleur au moyen d'équations analogues aux relations (2.78) et (2.61), avec γ^{μ} et

$\gamma^\mu \gamma_5$ remplacés par 1 et γ_5 , respectivement. Ceci revient en fait aux substitutions bien connues [36] :

$$m_c \bar{c}c \rightarrow \frac{-2}{3} \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \mathcal{O}(\mu^2/m_c^2) \quad (2.86)$$

$$m_c \bar{c}i\gamma_5 c \rightarrow \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} + \mathcal{O}(\mu^2/m_c^2) \quad (2.87)$$

à l'intérieur d'éléments de matrice de hadrons légers, ce qui conforte encore notre résultat central (2.26). Les équations ci-dessus assurent le découplage du quark lourd dans la limite de masse arbitrairement grande, à l'ordre d'une boucle, comme nous l'avons déjà signalé dans le cas des éléments de matrice de la trace du tenseur énergie-moment (1.118) et de la divergence du courant axial (2.71).

2.4 Introduction de l'électromagnétisme

Le formalisme développé dans la section 2.1 dans le cas des interactions fortes peut être étendu à d'autres interactions de jauge sans changement majeur. Les équations (2.23) et (2.24), en particulier, restent valides pour autant que la dérivée covariante sur les champs de spineurs soit modifiée de façon appropriée. Les premiers termes de l'expansion en la masse inverse du propagateur d'un quark lourd plongé dans des champs de gluons *et* de photons classiques s'obtiennent ainsi directement en combinant les équations (1.57) et (1.7), ce qui donne :

$$P_\mu \equiv i\partial_\mu + g_s A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + eQ A_\mu, \quad (2.88)$$

où Q est la charge du quark lourd. Graphiquement, des insertions de photons viennent s'ajouter aux contributions de gluons existantes :

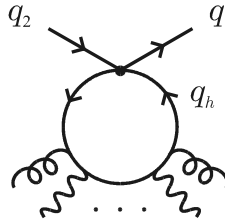


Fig.16

Il n'est en fait même pas nécessaire de réitérer le passage de l'expression (2.23) à la forme simplifiée (2.26). L'inclusion des photons (2.88) revient en effet aux substitutions

$$g_s G_{\mu\nu} \rightarrow g_s G_{\mu\nu} + eQ F_{\mu\nu} \quad (2.89)$$

$$g_s D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} G_{\mu\nu} \rightarrow g_s D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_n} G_{\mu\nu} + eQ \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_n} F_{\mu\nu} \quad (2.90)$$

au niveau de l'équation (2.26). Les termes additionnels suivants sont ainsi générés :

$$\begin{aligned}
 \delta S_2 &= \frac{-i}{2(4\pi)^2} M \left(N_\varepsilon - \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) eQ F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\
 \delta S_3 &= \frac{-i}{3(4\pi)^2} \left(N_\varepsilon - \ln \frac{M^2}{\mu^2} \right) eQ \partial^\nu F_{\mu\nu} \gamma^\mu \\
 \delta S_4 &= \frac{-i}{6(4\pi)^2} \frac{1}{M} \left(e^2 Q^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{3}{2} i e^2 Q^2 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_5 - 3i e^2 Q^2 F_\alpha^\mu F^{\nu\alpha} \sigma_{\mu\nu} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} eQ \partial_\alpha \partial^\alpha F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + 2g_s eQ G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 3ig_s eQ G_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_5 \right) \\
 \delta S_5 &= \frac{-i}{8(4\pi)^2} \frac{1}{M^2} \left(\frac{8}{3} e^2 Q^2 \partial^\alpha F_{\mu\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 + \frac{4}{3} e^2 Q^2 F_{\mu\alpha} \partial^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{15} eQ \partial^\alpha \partial_\alpha \partial^\nu F_{\mu\nu} \gamma^\mu + \frac{8}{3} g_s eQ \partial^\alpha F_{\mu\alpha} \tilde{G}^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 + \frac{8}{3} g_s eQ D^\alpha G_{\mu\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} g_s eQ F_{\mu\alpha} D^\alpha \tilde{G}^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 + \frac{4}{3} g_s eQ G_{\mu\alpha} \partial^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \right)
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

2.4.1 Opérateurs de dimension six

Dans le cas de l'interaction initiale à quatre quarks (2.28), la contribution de δS_3 à l'expression (2.27) donne lieu au Lagrangien effectif suivant :

$$\delta \mathcal{L}_{6d} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{cd}^* \frac{eQ}{6\pi^2} \ln \left(\frac{m_c^2}{\mu^2} \right) \bar{d}_L \partial^\nu F_{\mu\nu} \gamma^\mu s_L. \tag{2.92}$$

L'utilisation des équations du mouvement classiques

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = e \sum_{q=u,d,s} Q_q \bar{q} \gamma_\mu q, \tag{2.93}$$

avec Q_q , la charge du quark léger q , permet de retrouver les opérateurs pingouins électromagnétiques de dimension six habituels :

$$\delta \mathcal{L}_{6d} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{cd}^* \frac{\alpha Q}{9\pi} \ln \left(\frac{m_c^2}{\mu^2} \right) \left[Q_7^{(6)} + Q_9^{(6)} \right] \tag{2.94}$$

avec

$$\begin{aligned}
 Q_7^{(6)} &= 6(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) \sum_{q=u,d,s} Q_q (\bar{q}_R \gamma^\mu q_R), \\
 Q_9^{(6)} &= 6(\bar{d}_L \gamma_\mu s_L) \sum_{q=u,d,s} Q_q (\bar{q}_L \gamma^\mu q_L).
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

2.4.2 Opérateurs de dimension huit

Plutôt que de considérer le Lagrangien effectif associé à δS_5 dans sa totalité, détaillons pour illustration la façon dont celui-ci permet d'estimer l'effet à courte distance du quark charmé dans les amplitudes $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ du Modèle Standard. En termes de diagrammes de

quarks, nous avons :

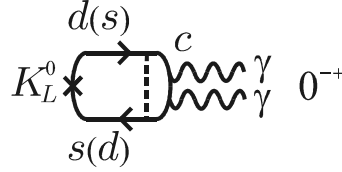


Fig.17

Seuls les deux premiers termes de δS_5 contribuent à la boucle de quark charmé issue de l'opérateur de Fermi (2.28) dans le cas présent, ce qui donne :

$$(\delta \mathcal{L}_{8d})_{\bar{K}^0 \rightarrow \gamma\gamma} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{cd}^* \frac{2\alpha}{27\pi} \frac{1}{m_c^2} \bar{d} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) s \left[2\partial^\alpha F_{\mu\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} + F_{\mu\alpha} \partial^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} \right]. \quad (2.96)$$

Dans la limite de conservation de CP , l'amplitude recherchée correspond à l'élément de matrice du Lagrangien ci-dessus ainsi que de son hermitien conjugué entre les états $|K_L^0\rangle$ et $|\gamma\gamma\rangle$. Après simplification de la partie liée aux champs de photons, nous obtenons :

$$\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma)^{(c)\alpha\beta} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs} V_{cd} \frac{2\sqrt{2}\alpha}{27\pi} f_K \frac{m_{K^0}^2}{m_c^2} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (2.97)$$

où la définition habituelle $\langle 0 | \bar{d} \gamma^\nu \gamma_5 s | K^0 \rangle \equiv i f_K p_K^\nu$ a été utilisée. Expérimentalement, $f_K \simeq 160$ MeV [21]. Soit A , le facteur de forme associé de manière générale (mais toujours dans la limite d'invariance sous CP) aux transitions $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$, i.e.,

$$\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma)^{\alpha\beta} \equiv A \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}. \quad (2.98)$$

Pour $V_{cd} \simeq 0.22$ et $V_{cs} \simeq 1$, l'équation (2.97) correspond à :

$$|A^{(c)}| = 7.1 \cdot 10^{-11} \frac{m_{K^0}^2}{m_c^2}. \quad (2.99)$$

Le rapport de branchement expérimental, $Br(K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma)_{\text{exp}} = (5.90 \pm 0.07) \cdot 10^{-4}$ [21], quant à lui, implique :

$$|A_{\text{exp}}| = 3.5 \cdot 10^{-9}. \quad (2.100)$$

Pour $m_c = 1$ GeV, nous obtenons ainsi la borne supérieure :

$$|A^{(c)}/A_{\text{exp}}| < 0.5\%. \quad (2.101)$$

La contribution du quark c aux amplitudes $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ via le diagramme 1PI ('one particle irreducible') de la figure 17 est donc négligeable¹². Ceci va dans le sens d'études antérieures, qui ont montré que seul l'effet du quark u était important, le processus de désintégration étant de ce fait lié plutôt à la physique à longue distance [51].

Remarquons par ailleurs qu'aucune transition $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ n'est générée par le terme δS_5 , dans la limite de conservation de CP . Cette impossibilité de produire une paire de photons dans un état 0^{++} à une boucle, à l'ordre $1/m_c^2$, peut être imputée à l'invariance des

¹²Notons qu'il existe d'autres contributions, de type 1PR ('one particle reducible'), correspondant à la situation où l'un des deux photons finaux est émis par le quark léger d ou s . Celles-ci peuvent en principe être générées à partir de S_3 .

interactions électromagnétiques sous conjugaison de charge. Les amplitudes comportant uniquement des champs de photons (à l'exclusion de champs de gluons) sont en effet factorisées par essence, de par la nature abélienne du groupe de jauge $U(1)_{em}$, et peuvent de ce fait être obtenues directement par factorisation de l'interaction à quatre quarks initiale. La production de deux photons dans un état scalaire est ainsi régie par l'élément de matrice :

$$\langle (\gamma\gamma)_{0++} | \bar{c}\gamma^\mu c | 0 \rangle = \langle (\gamma\gamma)_{0++} | -iTr \left[(\mathbf{P} - m_c)_{xx}^{-1} \gamma^\mu \right] | 0 \rangle, \quad (2.102)$$

qui est supprimé par $1/m_c^4$, l'argument de conjugaison de charge exposé en-dessous de l'équation (2.78) s'appliquant à nouveau.

2.4.3 Opérateurs de dimension cinq et sept

Des opérateurs de dimension cinq et sept peuvent également être générés à partir des nouveaux termes (2.91) de l'expansion en la masse inverse du propagateur en champs externes, de façon analogue à ce qui a été observé dans les sections 2.2.3 et 2.3 dans le cas des interactions fortes seules. L'équation (2.83), en particulier, est ainsi complétée par la contribution d'opérateurs anomaux électromagnétiques :

$$Q_{AT+AA}^{(7)} = \frac{1}{6} \bar{d}_{LSR} \left[\left(G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \frac{3}{2} i G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right) + \frac{6\alpha Q^2}{\alpha_s} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{3}{2} i F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \right]. \quad (2.103)$$

Remarquons que le poids relatif entre anomalies fortes et électromagnétiques dans l'expression ci-dessus correspond bien à celui spécifié par les équations (1.82) avec $N_C = 0$ et (1.81) avec $N_C = 3$ dans le cas de l'anomalie de trace¹³, et par les équations (1.59) et (1.55) avec $N_C = 3$ dans le cas de l'anomalie axiale. Ceci n'est pas étonnant puisque ces coefficients anomaux sont déterminés par les valeurs à énergie nulle des diagrammes triangulaires SVV et PVV , comme indiqué en (1.68) et (1.51) dans le cas de QED . Or ce sont finalement ces diagrammes que nous obtenons (entre autres) par le calcul de la boucle de quark charmé pour m_c grand.

La dérivation du couplage effectif d'un boson de Higgs léger à la trace du tenseur énergie-moment est ainsi immédiate dans notre formalisme, comme nous allons le voir maintenant. Ce dernier doit bien entendu auparavant être accommodé à une interaction 'tree-level' différente de celle de l'équation (2.3), couplant un boson de Higgs à un quark lourd :

$$Q_H = H \bar{q}_h q_h, \quad (2.104)$$

où H et q_h désignent les champs du boson de Higgs et du quark lourd, respectivement, et le bilinéaire ci-dessus est singulet sous $SU(3)_C$. Ce petit détour constitue donc une occasion de montrer le caractère plus général de la technique mise au point dans la section 2.1. Dans le Modèle Standard, le couplage associé à l'opérateur (2.104) est donné par :

$$g_H = M/v, \quad (2.105)$$

¹³ Le fait de poser $N_C = 0$ dans l'équation (1.82) traduit le caractère externe des champs de gluons. D'autre part, l'équation (1.81) correspond à un seul quark coloré, et doit donc être multipliée par 3.

avec M , la masse du quark lourd, et v , la valeur moyenne dans le vide du champ scalaire initial (i.e., avant brisure spontanée de la symétrie électrofaible). Suivant pas à pas les développements de la section 2.1, nous arrivons à la conclusion que l'expression (2.27) doit être remplacée par le Lagrangien effectif que voici¹⁴ :

$$\mathcal{L}_{eff}^{gH} = ig_H H \sum_{n=2}^5 Tr(S_n) + \mathcal{O}(1/M^3), \quad (2.106)$$

où la trace porte à la fois sur les indices spinoriels et de couleur. Tenant compte des termes additionnels (2.91), la contribution dominante à l'équation ci-dessus, obtenue pour $n = 4$, s'écrit :

$$\mathcal{L}_{5d} = \frac{g_H}{M} H \left(\frac{\alpha_s}{12\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \frac{\alpha Q^2}{2\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (2.107)$$

La désintégration d'un boson de Higgs léger en deux fermions, deux gluons ou deux photons est donc finalement décrite à l'aide du Lagrangien effectif 'tree-level' suivant, après utilisation de la relation (2.105) :

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{v} H \left(M \bar{q}_h q_h + \frac{\alpha_s}{12\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} + \frac{\alpha Q^2}{2\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (2.108)$$

La quantité entre parenthèses n'est autre que la trace du tenseur énergie-moment associée au quark lourd (incluant les anomalies), ce qui démontre le résultat annoncé.

2.4.4 Effet du quark charmé dans $B \rightarrow K\gamma\gamma$

Signalons pour terminer que le résultat (2.91) permet encore d'estimer la contribution de boucles de quarks lourds lorsque l'expansion en produits d'opérateurs (2.27) n'est plus valide à condition de se placer dans l'approximation de factorisation. Considérons pour fixer les idées les effets du quark charmé dans le processus radiatif $B^0 \rightarrow K^0\gamma\gamma$, représenté ci-dessous.

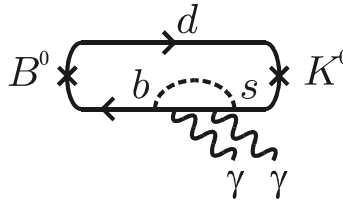


Fig.18

Une analyse semblable à celle effectuée dans la section 2.2.4 dans le cas de la désintégration hadronique $B^0 \rightarrow K^0\eta'$ peut être suivie ici également. En particulier, l'élément de matrice factorisé du conjugué de l'opérateur (2.58) est cette fois donné par :

$$\langle \gamma\gamma K^0 | Q_2^{(c)\dagger} | B^0 \rangle_F = \frac{1}{3} \langle \gamma\gamma | \bar{c}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)c | 0 \rangle \langle K^0 | \bar{b}\gamma^\mu s | B^0 \rangle. \quad (2.109)$$

La production de la paire $\gamma\gamma$ peut donc à nouveau être décrite à basse énergie à l'aide du propagateur du quark c dans un champ électromagnétique externe :

$$\langle \gamma\gamma | \bar{c}\Gamma_\mu c | 0 \rangle = \langle \gamma\gamma | -iTr \left[(\not{P} - m_c)_{xx}^{-1} \Gamma_\mu \right] | 0 \rangle, \quad (2.110)$$

avec $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$ pour des photons finaux dans l'état 0^{++} et $\Gamma_\mu = \gamma_\mu\gamma_5$ dans le cas 0^{-+} .

¹⁴Notez le changement de signe par rapport à l'équation (2.27). Celui-ci provient de l'anticommuation des champs de fermions dans l'équation (2.10), absente dans le cas présent.

2.5 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode simple permettant de générer de façon systématique les corrections de type pingouin (cf. fig.10, p.36) à une interaction effective à quatre quarks arbitraire, sous l'hypothèse d'une saveur intermédiaire lourde. Cette méthode consiste à exprimer l'évolution de l'opérateur initial en termes de l'expansion en la masse inverse du propagateur du quark lourd plongé dans un champ de jauge (gluons et/ou photons) classique. Cette expansion, indépendante de l'opérateur initial particulier considéré, a été calculée explicitement jusqu'à l'ordre $1/M^2$. Le résultat, concis et aux propriétés de symétrie manifestes, s'est avéré également bien adapté à la description des effets des boucles de quarks lourds dans certains éléments de matrice de hadrons ou de photons à basse énergie.

Le formalisme ainsi développé nous a permis de clarifier le rôle des opérateurs anomaux liés aux quarks c , b et t virtuels dans les désintégrations faibles des hadrons. Nos résultats peuvent être résumés comme suit, en ce qui concerne les effets des interactions fortes :

- Etant donné les hypothèses considérées, i.e. (essentiellement), un opérateur initial à quatre quarks et une saveur intermédiaire lourde, la méthode se trouve être particulièrement bien adaptée à l'estimation des contributions à courte distance des boucles de quark c aux amplitudes de désintégration des mésons K . Ces dernières constituent de plus un endroit privilégié pour étudier les effets de l'anomalie de trace de QCD liés au quark c (cf. fig.8, p.35) puisque la conversion d'une densité de gluons scalaire en paire de pions à basse énergie peut être estimée à l'aide de l'anomalie de trace forte associée aux saveurs légères u , d et s , comme indiqué en (1.106). Les opérateurs anomaux de dimension sept à courte distance sont cependant supprimés par $m_{s,d}/M_W^2$ dans le Modèle Standard, de par la structure chirale de l'interaction faible effective à quatre quarks initiale. Nous n'avons pas non plus observé d'effet de l'anomalie de trace au niveau des opérateurs de dimension huit, à une boucle, ce qui peut être imputé à l'exigence d'invariance du Lagrangien $\Delta S = 1$ sous la symétrie discrète CPS . Un opérateur d'anomalie axiale, en revanche, est bien produit. Son importance dans les désintégrations des kaons est toutefois à nouveau apparue limitée (cf. fig.13, p.46).

D'autre part, nous avons montré que l'amplitude $B^0 \rightarrow K^0 \eta'$ était peu sensible aux effets de l'anomalie axiale induits par un quark virtuel c dans l'approximation de factorisation (cf. fig.7, p.35). Un impact important de ce type d'anomalie dans d'autres désintégrations des mésons B nous paraît ainsi peu probable.

- La technique proposée s'applique également aux effets des boucles de quark b dans les désintégrations des mésons D . Ceux-ci sont cependant fortement supprimés par les facteurs de CKM qu'ils impliquent.
- L'analyse des opérateurs anomaux induits par le quark t nécessite d'aller au-delà de l'approximation à quatre quarks. Un argument dimensionnel simple nous permet toutefois de conclure à une suppression de l'ordre de $m_{s(b)}/m_t^2$ dans les désintégrations des mésons $K(B)$.

Ces résultats peuvent être transposés au cas des opérateurs anomaux électromagnétiques sans changement majeur.

En conclusion, si les anomalies axiale et de trace ont effectivement un rôle à jouer dans les désintégrations faibles des hadrons (et en particulier dans les processus $B \rightarrow K \eta'$

et $K \rightarrow \pi\pi$), ce doit être via des effets non perturbatifs associés aux quarks légers u , d et s ou via l'intervention de nouvelle physique au-delà du Modèle Standard (comme par exemple dans la section 2.3). La première de ces deux possibilités sera examinée plus avant dans le chapitre suivant.

Notre méthode fournit par ailleurs une classification naturelle et systématique des opérateurs issus de l'intégration du quark charmé dans les désintégrations faibles des kaons. En particulier, un nouvel ensemble d'opérateurs de dimension huit invariants de jauge et invariants sous CPS a été obtenu (y compris en présence d'interactions électromagnétiques). Leur effet, a priori de l'ordre de m_K^2/m_c^2 , pourrait s'avérer compétitif avec celui d'autres corrections de QCD à courte distance non dominantes [59]. Une violation importante de la factorisation dans les amplitudes $\Delta I = 1/2$ est toutefois requise. Signalons encore que des effets distincts en $1/\mu^2$, également associés à des opérateurs de dimension huit mais provenant cette fois de la procédure de 'matching' avec la physique à longue distance, ont été discutés dans la référence [69].

Le résultat sans doute le plus remarquable de ce chapitre est simplement d'avoir reconnu au propagateur en champs externes d'un quark lourd une existence propre, établissant par là même un lien entre les interactions effectives générées par l'intégration d'un quark lourd et la contribution d'un tel quark aux éléments de matrice de hadrons ou de photons à basse énergie (tels que $f_{\eta'}^{(c)}$, par exemple). D'autres domaines d'application sont bien entendu possibles, comme nous l'avons vu dans le cas du couplage d'un boson de Higgs léger à une densité de quarks. Cette généralité de la méthode, qui fait sa puissance, provient de l'hypothèse de grand M , qui permet d'étendre le propagateur fermionique en somme d'opérateurs locaux. Ironiquement, c'est également cette hypothèse qui est à l'origine des limites de la méthode, les effets qu'elle permet d'estimer étant le plus souvent supprimés par l'inverse de la masse en question, comme nous l'avons vu par exemple dans le cas des opérateurs de dimension huit $\Delta S = 1$.

Chapitre 3

Opérateurs faibles anomaux induits par les quarks légers

Tournons-nous à présent vers les effets des anomalies liés aux quarks légers. Dans le Modèle Standard, les interactions faibles $\Delta S = 1$ entre saveurs légères sont gouvernées au ‘tree-level’ par l’opérateur effectif suivant :

$$Q_2^{(u)} = 4(\bar{d}_L \gamma_\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu s_L). \quad (3.1)$$

Celui-ci se transforme comme une composante de la représentation $(8_L, 1_R)$ sous le groupe chirale $U(3)_L \times U(3)_R$ ¹. Dans le formalisme de la section 1.3.1, cet opérateur (ainsi que ceux qu’il induit par corrections fortes) admet donc les représentations chirales anomaux dominantes suivantes :

$$Q_{AA} \sim r \left(\mathbf{m}U^\dagger - U\mathbf{m}^\dagger \right)^{sd} m_0^2 \text{Tr}(\ln U - \ln U^\dagger) \quad (3.2)$$

$$Q_{AT} \sim r \left(\mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m}^\dagger \right)^{sd} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) \quad (3.3)$$

$$Q'_{AT} \sim \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right)^{sd} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right), \quad (3.4)$$

compte tenu des réalisations non linéaires des opérateurs $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}$ et $G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}$ obtenues en (1.99) et (1.104), respectivement. Dans la dérivation des expressions ci-dessus, le paramètre de brisure \mathbf{m} est considéré comme un champ extérieur pourvu de propriétés de transformation chirales identiques à celles de la matrice U . Notons que l’analogie axial de l’opérateur d’anomalie de trace (3.4),

$$Q'_{AA} \sim \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right)^{sd} m_0^2 \text{Tr}(\ln U - \ln U^\dagger), \quad (3.5)$$

n’est pas invariant sous CPS . Il est de ce fait interdit dans la limite de conservation de CP .

La présence de la matrice \mathbf{m} dans les équations (3.2) et (3.3) peut paraître étonnante étant donné l’absence de couplages proportionnels aux masses des quarks dans les interactions du Modèle Standard considérées (exception faite de ceux des ‘would-be-Goldstone’,

¹Il contient en fait également une composante de la représentation $(27_L, 1_R)$. Celle-ci est cependant beaucoup plus faible, comme en témoigne la règle de sélection $\Delta I = 1/2$ observée dans les désintégrations $K \rightarrow \pi\pi$ et $K \rightarrow \pi\pi\pi$ (cf. section 3.2.1).

absents cependant dans la jauge unitaire). A courte distance, une telle dépendance ne peut en fait provenir que de l'utilisation des équations du mouvement classiques. Or, dans le modèle non linéaire, seules les amplitudes physiques (faisant intervenir des états initiaux et finaux sur leur couche de masse) sont indépendantes de la représentation unitaire particulière choisie [70]. Tous les opérateurs compatibles avec les symétries considérées doivent donc être pris en compte, et ce quelle que soit leur dépendance en m .

Les opérateurs anomaux Q_{AA} , Q_{AT} et Q'_{AT} se trouvent supprimés dans l'expansion combinée en les moments, les masses des quarks et $1/N_C$. Leur caractère anormal pourrait néanmoins compenser cette suppression. C'est cette possibilité, motivée par l'intensité des effets anomaux observés à longue distance dans la section 1.3, que nous allons étudier dans ce chapitre.

L'opérateur Q'_{AT} ne doit en fait pas être considéré plus longtemps. Celui-ci comporte en effet au minimum quatre champs pseudoscalaires Φ . Il contribue de ce fait au processus $K \rightarrow \pi\pi\pi$ mais pas à $K \rightarrow \pi\pi$. Son importance dans les désintégrations hadroniques des kaons est ainsi manifestement limitée, malgré son caractère anormal, le 'théorème des pions mous' reliant avec succès ces deux processus.

L'opérateur Q_{AT} , par contre, pourrait contribuer de façon non négligeable à l'amplification observée du canal $\Delta I = 1/2$ via des diagrammes factorisés tels que celui de la figure 8 (p.35), avec un quark intermédiaire u . Ce mécanisme déjà considéré dans le chapitre précédent, dans lequel une paire $\pi\pi$ est produite via l'anomalie de trace de QCD , est également semblable à celui invoqué avec succès dans la section 1.3.4 afin de décrire les transitions $\psi' \rightarrow J/\psi\pi\pi$. Les gluons, émis alors par des quarks lourds, le sont cependant dans le cas présent par des quarks légers.

L'opérateur Q_{AA} , quant à lui, pourrait affecter par exemple les désintégrations $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ via le mécanisme décrit dans la figure 13 (p.46), avec une saveur virtuelle u au lieu de c . Ce processus est cette fois à mettre en parallèle avec la description des transitions $\psi' \rightarrow J/\psi\eta$ de la section 1.3.4.

Dans la section suivante, nous allons tenter de générer les opérateurs anomaux (3.2) et (3.3) par corrections du Lagrangien non linéaire (1.90) à une interaction effective $\Delta S = 1$ de type 'densité'. Nous serons ainsi en mesure de vérifier si les effets de ces opérateurs sont effectivement amplifiés par rapport à ceux d'opérateurs non anomaux du même ordre.

Nous discuterons ensuite l'hypothèse de dominance des opérateurs anomaux (3.2) et (3.3) et de leurs analogues électromagnétiques. Ce point de vue radical vaut la peine d'être considéré étant donné le succès de la description phénoménologique de la référence [9] dans le cas de l'anomalie de trace, manifestation possible d'un rôle plus fondamental des anomalies fortes et électromagnétiques dans les désintégrations faibles des mésons.

3.1 Génération des opérateurs anomaux

A l'ordre le plus bas de l'expansion chirale, il existe deux opérateurs $\Delta S = 1$ qui se transforment suivant la représentation $(8_L, 1_R)$:

$$Q_8 = \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right)^{sd}, \quad (3.6)$$

$$Q_D = r \left(m U^\dagger + U m^\dagger \right)^{sd}. \quad (3.7)$$

Soit $g_D \equiv G_D F_\pi^4$, le couplage effectif associé à l'opérateur Q_D . Il est bien connu que la combinaison $g_D(Q_D + Q_D^\dagger)$ peut être absorbée par le terme de masses du modèle non linéaire (1.90). Le Lagrangien $\Delta S = \pm 1$ correspondant s'écrit en effet :

$$\mathcal{L}_D = G_D F_\pi^4 r \text{Tr} \left((\lambda^6 \mathbf{m}) U^\dagger + U (\lambda^6 \mathbf{m})^\dagger \right), \quad (3.8)$$

où λ^6 est la sixième matrice de Gell-Mann, définie dans l'annexe E.1. La matrice \mathbf{m} est à présent supposée diagonale et réelle. L'expression ci-dessus peut être incorporée dans le terme de masses de l'équation (1.90) via la substitution

$$\mathbf{m} \rightarrow \widetilde{\mathbf{m}} \equiv \mathbf{m} + 4G_D F_\pi^2 \lambda^6 \mathbf{m}. \quad (3.9)$$

La matrice $\widetilde{\mathbf{m}}$ peut ensuite être diagonalisée par la rotation chirale suivante [71] :

$$\widetilde{\mathbf{m}} = e^{-i\xi_L \lambda^7} \mathbf{m} e^{i\xi_R \lambda^7} + \mathcal{O}(G_D^2 \mathbf{m}), \quad (3.10)$$

où la septième matrice de Gell-Mann λ^7 est définie en annexe et

$$\xi_L \equiv 4G_D F_\pi^2 \frac{m_d^2 + m_s^2}{m_d^2 - m_s^2}, \quad \xi_R \equiv 4G_D F_\pi^2 \frac{2m_d m_s}{m_d^2 - m_s^2}. \quad (3.11)$$

La transformation

$$U \rightarrow U' = e^{i\xi_L \lambda^7} U e^{-i\xi_R \lambda^7} \quad (3.12)$$

permet finalement d'éliminer l'opérateur 'densité' Q_D :

$$\text{Tr} \left(\widetilde{\mathbf{m}} U^\dagger + U \widetilde{\mathbf{m}}^\dagger \right) = \text{Tr} \left(\mathbf{m} \left(U' + U'^\dagger \right) \right) + \mathcal{O}(G_D^2 \mathbf{m}). \quad (3.13)$$

L'opérateur Q_8 est donc le seul à contribuer à la règle $\Delta I = 1/2$ à l'ordre dominant.

La redéfinition des champs pseudoscalaires (3.12) affecte cependant les termes suivants du Lagrangien chirale fort, tels que ceux d'ordre $p^2 \mathbf{m}$ et \mathbf{m}^2 par exemple, générant ainsi de nouveaux opérateurs faibles. Les corrections à l'opérateur densité provenant du modèle non linéaire (1.90) mènent donc en principe à des effets observables. C'est de cette façon que nous allons générer les opérateurs anomaux (3.2) et (3.3).

3.1.1 Evolution de l'opérateur densité

Calculons donc les opérateurs effectifs dominants issus de la correction de l'opérateur faible (3.7) par les boucles de mésons associées au Lagrangien fort à basse énergie (1.90). Pour ce faire, nous réécrivons tout d'abord le Lagrangien total $\mathcal{L}_{NL} + g_D(Q_D + Q_D^\dagger)$ sous forme d'un Lagrangien non linéaire \mathcal{L}_{NL} impliquant la matrice de masses $\widetilde{\mathbf{m}}$ (non hermitienne) définie en (3.9). Nous n'effectuons toutefois pas la rotation (3.12). Le problème considéré se ramène ainsi au calcul bien connu des corrections à une boucle d'ordre p^4 , $p^2 \mathbf{m}$ et \mathbf{m}^2 au Lagrangien chirale fort dominant. Suivant l'analyse de la référence [23], nous utilisons la méthode du champ externe² afin d'obtenir une évolution au niveau opératoire.

Notre analyse diffère cependant par la prise en compte du neuvième méson pseudoscalaire η_0 , ainsi que du terme de masse anomal correspondant. D'autre part, nous préférons

²Cette méthode ne doit pas être confondue avec celle utilisée dans la section 2.1. En effet, aucun degré de liberté n'est intégré dans le cas présent.

insérer deux ‘cut-off’ plutôt que d’utiliser le schéma de régularisation dimensionnelle, ceci afin de faire apparaître explicitement l’échelle Λ au-delà de laquelle la description en termes de mésons cesse d’être valide, et doit au contraire être complétée par des contributions de courte distance.

Les étapes essentielles de la dérivation sont présentées dans l’annexe D, ainsi que l’extraction de la partie d’ordre G_D du résultat.

Finalement, l’évolution à longue distance de l’opérateur densité est donnée à une boucle par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{gD} = & G_D F_\pi^4 \left(1 - \frac{3\Lambda^2}{(4\pi)^2 F_\pi^2} + \frac{m_0^2}{3(4\pi)^2 F_\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2} \right) \right) Q_D \\ & + \frac{G_D F_\pi^2}{4(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2} \right) \sum_{k=1}^3 c_k^{(p^4)} Q_k^{(p^4)} + \mathcal{O}(p^6) \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_1^{(p^4)} &= r (\mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m})^{sd} Tr [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + r (\mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m})] \\ Q_2^{(p^4)} &= r (\mathbf{m}U^\dagger - U\mathbf{m})^{sd} Tr [\partial^\mu (U \partial_\mu U^\dagger)] \\ Q_3^{(p^4)} &= r Tr [(\lambda_+ \mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m}\lambda_+) (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + r (\mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m}))] \end{aligned} \quad (3.15)$$

et

$$\boxed{c_1^{(p^4)} = 1, \quad c_2^{(p^4)} = -2, \quad c_3^{(p^4)} = 3.} \quad (3.16)$$

Par $\mathcal{O}(p^{2n})$, nous entendons les contributions d’ordre $p^{2(n-l)}m^l$ ($l = 0, \dots, n$). Le symbole ε désigne la coupure infrarouge, de l’ordre de m_K , tandis que Λ désigne la coupure ultraviolette, de l’ordre du GeV. Le projecteur λ_+ , quant à lui, est défini par :

$$\lambda_+ \equiv (\lambda^6 + i\lambda^7) / 2. \quad (3.17)$$

Le premier terme du Lagrangien effectif ci-dessus consiste simplement en une renormalisation de l’opérateur densité initial. Or celui-ci ne peut contribuer aux amplitudes physiques étant donné la relation (3.13). La divergence quadratique, en particulier, n’a donc aucune incidence.

Trois nouveaux opérateurs sont générés par l’évolution à longue distance de l’opérateur densité. Le premier contient notamment l’opérateur d’anomalie d’échelle recherché Q_{AT} . Notons qu’il n’est pas exactement proportionnel à la trace du tenseur énergie-moment (1.102). Le second, en revanche, est proportionnel à la divergence du courant axial (1.96). Il fait intervenir l’opérateur d’anomalie axiale Q_{AA} après utilisation des équations du mouvement (1.94). Le troisième, enfin, est un opérateur non factorisable qui ne comporte aucune contribution anormale.

Comparons l’intensité relative des opérateurs Q_{AT} et Q_{AA} obtenue à celle issue de l’analyse à courte distance du chapitre précédent.

3.1.2 Poids relatif des anomalies axiale et de trace

Les équations (3.15) et (3.16) impliquent, après utilisation des équations du mouvement (et ne considérant que les contributions proportionnelles à m_s) :

$$Q_{AT+AA}^{(p^4)} \sim (\mathbf{m}U^\dagger)^{sd} \left[-\frac{F_\pi^2}{2} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) \right] - 1 \times i (\mathbf{m}U^\dagger)^{sd} \left[i \frac{F_\pi^2}{2} m_0^2 \text{Tr} \left(\ln U - \ln U^\dagger \right) \right]. \quad (3.18)$$

Les anomalies axiale et de trace sont donc produites avec la même intensité, à l'ordre le plus bas de l'expansion chirale.

Ceci contraste avec les résultats obtenus à courte distance, où nous avons vu que seul l'opérateur d'anomalie axiale (2.51) était généré dans le Modèle Standard, à l'ordre dominant.

Au-delà du Modèle Standard, en revanche, nous avons vu que l'existence de structures chirales du type $(\bar{3}_L, 3_R)$ ou $(3_L, \bar{3}_R)$ permettait l'émergence des deux types d'anomalies (cf. section 2.3). Ces structures chirales sont en fait celles à mettre en relation avec l'opérateur effectif à basse énergie du Modèle Standard Q_D , puisque celui-ci se transforme lui-même suivant la représentation $(\bar{3}_L, 3_R) + (3_L, \bar{3}_R)$ du groupe chirale une fois le terme de source $\mathbf{m}(x)$ gelé à la matrice de masses des quarks. Comparons donc plutôt l'équation ci-dessus à l'expression (2.83) :

$$Q_{AT+AA}^{(7)} \sim \bar{d}_{LSR} \left[\frac{-9\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right] + \frac{9}{4} \times i \bar{d}_{LSR} \left[\frac{-3\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right]. \quad (3.19)$$

Les quantités entre crochets correspondent aux représentations non linéaires anomales de l'équation (3.18). Or l'analyse du chapitre précédent ne faisait intervenir qu'une saveur à l'intérieur des boucles, et non trois. De plus, les champs de gluons étaient considérés comme externes. L'équation (3.19) doit donc en fait plutôt s'écrire :

$$Q_{AT+AA}^{(7)} \sim \bar{d}_{LSR} \left[\frac{\alpha_s}{12\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right] - \frac{1}{2} \times i \bar{d}_{LSR} \left[\frac{-\alpha_s}{4\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \right]. \quad (3.20)$$

Le coefficient du terme $G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}$ est obtenu en posant $N_C = 0$ et $n_f = 1$ dans l'équation (1.82). La contribution de l'anomalie axiale est ainsi supprimée d'un facteur deux par rapport à celle de l'anomalie de trace, à courte distance. Le signe relatif des deux contributions, quant à lui, reste inchangé. Cet accord qualitatif entre les équations (3.18) et (3.20) est déjà remarquable étant donné la seule prise en compte des états liés pseudoscalaires π , K et $\eta^{(\prime)}$ à longue distance.

3.1.3 Amplification de l'opérateur d'anomalie de trace

Dans cette section, nous allons tenter d'estimer l'amplification à longue distance d'un opérateur d'anomalie de trace générique issu d'effets de courte distance, dans le Modèle Standard :

$$\mathcal{L}_{SD} = g O \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}, \quad (3.21)$$

où g est une constante et O symbolise une combinaison arbitraire de champs de quarks et de gluons $\Delta S = 1$ invariante sous CPS , sous transformations de jauge et de Lorentz, et

qui se transforme suivant la représentation $(8_L, 1_R)$ du groupe chirale $U(3)_L \times U(3)_R$. Un tel opérateur peut par exemple être dérivé de l'équation (2.45). Des effets liés uniquement aux quarks légers pourraient également donner lieu à de telles contributions.

Supposons que l'expression (3.21) puisse être hadronisée à l'échelle Λ simplement par insertion du vide. L'équation (1.104) implique dans ce cas, pour la partie de O représentée en-dessous de cette échelle par l'opérateur densité :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LD} = & g'r \left(\mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m} \right)^{sd} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right\rangle \\ & + g'r \left(\mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m} \right)^{sd} \frac{4F_\pi^2}{9} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Soit $g_{AT} \equiv G_{AT} F_\pi^2$, le coefficient associé à l'opérateur Q_{AT} ci-dessus. Le rapport G_D/G_{AT} est donné par :

$$\frac{G_D}{G_{AT}} = \frac{9 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right\rangle}{4F_\pi^4} \simeq 370 \quad (3.23)$$

pour $\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right\rangle \simeq 0.012 \text{ GeV}^4$ [72].

Les corrections à longue distance (3.14) apportent une contribution additionnelle à l'opérateur d'anomalie de trace :

$$\frac{\delta G_{AT}}{G_{AT}} = \frac{1}{4(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2} \right) \frac{G_D}{G_{AT}}. \quad (3.24)$$

L'équation (3.23) permet d'estimer l'amplification qui en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{G_{AT} + \delta G_{AT}}{G_{AT}} &= 1 + \frac{9 \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right\rangle}{256\pi^2 F_\pi^4} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2} \right) \\ &\simeq 1.8 \ (\varepsilon \sim m_K) - 3.3 \ (\varepsilon \sim m_\pi) \end{aligned} \quad (3.25)$$

pour $\Lambda \sim 1 \text{ GeV}$. Cette estimation doit bien entendu être considérée avec précaution étant donné les approximations utilisées.

Une amplification a donc bel et bien lieu. Celle-ci ne garantit cependant pas la dominance de l'opérateur Q_{AT} par rapport à d'autres interactions effectives du même ordre. Afin d'éclaircir ce point, examinons plutôt les contributions relatives des différents opérateurs de l'équation (3.15) aux amplitudes de désintégration $K \rightarrow \pi\pi$.

3.1.4 Les anomalies dans les désintégrations $K \rightarrow \pi\pi$

Considérons tout d'abord le processus $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$. Dans la limite $m_u = m_d$, les diagrammes 'tree-level' suivants sont produits par les interactions non linéaires (1.90) et le Lagrangien faible à une boucle (3.14) (ou plus exactement son hermitien conjugué, dans le cas présent) :

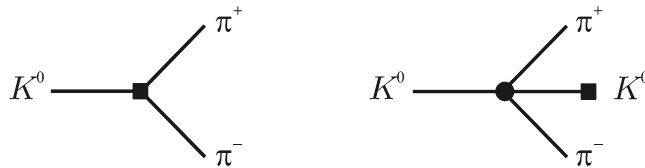


Fig.19

Les ronds symbolisent les vertex forts, tandis que les vertex faibles sont représentés par des carrés. La contribution de type ‘tadpole’ de la figure de droite annule la contribution directe de la figure de gauche dans le cas de l’opérateur densité, comme il se doit. Le deuxième opérateur de l’équation (3.15) ne contribue pas non plus au mode $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$. Les premier et troisième opérateurs, quant à eux, produisent l’amplitude suivante :

$$\mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)_D = -\frac{iG_D}{8\sqrt{2}\pi^2 F_\pi} (m_K^2 - m_\pi^2) m_K^2 C \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2}\right), \quad (3.26)$$

où les masses des quarks ont été éliminées au profit de $m_{K,\pi}$ à l’aide de l’équation (1.91). La constante C est donnée par :

$$C = \underbrace{\left(1 - \frac{2m_\pi^2}{m_K^2}\right)}_{C_1^{AT}} + \underbrace{\left(\frac{2m_\pi^2}{m_K^2}\right)}_{C_1^m} + \underbrace{\left(\frac{3m_\pi^2}{2m_K^2}\right)}_{C_3} = 1 + \frac{3m_\pi^2}{2m_K^2}. \quad (3.27)$$

Le coefficient C_1^{AT} (C_1^m) ci-dessus désigne l’effet de la partie anormale (non anormale) de l’opérateur $Q_1^{(p^4)}$, tandis que C_3 se réfère à l’opérateur $Q_3^{(p^4)}$.

Il apparaît clairement au vu de l’équation (3.27) que la contribution de l’opérateur d’anomalie de trace, amplifiée par le facteur dynamique m_K^2/m_π^2 , domine effectivement celle des autres opérateurs, et en particulier celle du troisième opérateur de l’équation (3.15), pourtant favorisé par le comptage en $1/N_C$. Nous avons explicitement :

$$\frac{C_1^{AT}}{C_3} \simeq 7.6, \quad \frac{C_1^{AT}}{C_1^m} \simeq 5.7, \quad \frac{C_1^{AT}}{C_1^m + C_3} \simeq 3.3. \quad (3.28)$$

Une telle dominance peut-elle être également observée dans le cas de l’anomalie axiale ? Afin de répondre à cette question, examinons le processus $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$.

Celui-ci requiert un opérateur faible $\Delta I = 3/2$ dans la limite où l’isospin est une bonne symétrie des interactions fortes. La contribution des opérateurs (3.15) s’annule donc dans cette limite. Au premier ordre en la brisure $m_d - m_u$, cependant, les diagrammes suivants sont générés :

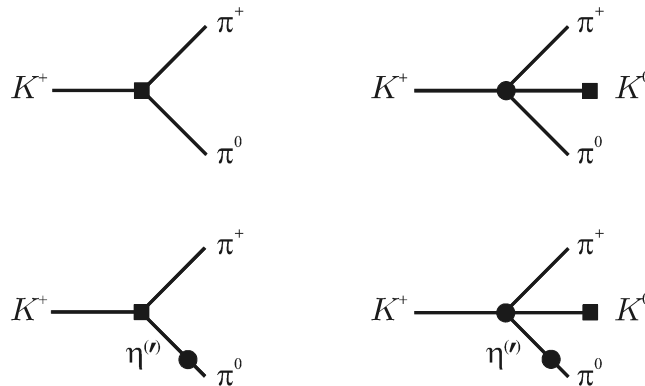


Fig.20

La possibilité de transitions $\pi^0\text{-}\eta$ et $\pi^0\text{-}\eta'$ résultant des éléments $\pi^3\eta_8$ et $\pi^3\eta_0$ de la matrice (1.113), en particulier, donne lieu à des effets de l’opérateur d’anomalie axiale Q_{AA} . Bien que supprimées par le paramètre de brisure $m_d - m_u$, les contributions dont

il est question ici peuvent être mises en parallèle avec celles qui précèdent étant donné la forte suppression du mode $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ par rapport à $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$. Les deuxième et troisième opérateurs de l'équation (3.15) génèrent l'amplitude suivante :

$$\mathcal{M}(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)_D = \frac{15iG_D}{64\pi^2 F_\pi} (m_K^2 - m_\pi^2) (m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 - \delta_{em}^2) C' \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2}\right), \quad (3.29)$$

où les paramètres du mélange η_8 - η_0 ont été exprimés en termes de $m_{K,\pi}$ et de m_0 via l'équation (1.116), et δ_{em}^2 désigne la différence de masses électromagnétique (1.92). La constante C' est définie par :

$$C' = \underbrace{\left(-\frac{4m_\pi^2}{5m_0^2}\right)}_{C_2} + \underbrace{\left(1 - \frac{6m_\pi^2}{5m_0^2}\right)}_{C_3} = 1 - \frac{2m_\pi^2}{m_0^2}. \quad (3.30)$$

C'est cette fois la contribution de l'opérateur non factorisable $Q_3^{(p^4)}$ qui l'emporte. Le caractère anormal de l'opérateur Q_{AA} n'induit donc manifestement pas d'amplification.

Revenons à présent sur l'importance des effets observés dans le cas de l'anomalie de trace. Nous avons vu que l'opérateur Q_{AT} échappait aux règles de comptage en $1/N_C$. Ce comportement particulier est cependant le résultat d'un facteur m_K^2/m_π^2 , et non d'un couplage anormalement élevé produit lors de l'évolution (3.14). L'opérateur Q_{AT} satisfait donc encore aux règles de comptage en p^2 . Son effet dans les désintégrations des kaons devrait ainsi finalement être de l'ordre de 15-20%, tout au plus.

L'analyse de la référence [9] suggère pourtant une dominance des effets de l'anomalie de trace dans les désintégrations hadroniques $K_S^0 \rightarrow \pi\pi$ et $K_L^0 \rightarrow \pi\pi\pi$ et dans les désintégrations radiatives $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$. Qu'en est-il exactement³? Afin de tenter de répondre à cette question, considérons nous aussi le point de vue radical d'une dominance des opérateurs anomaux.

3.2 Hypothèse de dominance des opérateurs anomaux

Le Lagrangien effectif $\Delta S = \pm 1$ constitué des opérateurs anomaux Q_{AT} et Q_{AA} et de leurs analogues électromagnétiques est donné par :

$$\boxed{\mathcal{L}_{AD} = G_{AD} r (\mathbf{m}U^\dagger + U\mathbf{m})^{ds+sd} \left[-\frac{F_\pi^2}{2} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{\alpha}{3\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] + i\kappa G_{AD} r (\mathbf{m}U^\dagger - U\mathbf{m})^{ds+sd} \left[i\frac{F_\pi^2}{2} m_0^2 \text{Tr}(\ln U - \ln U^\dagger) - \frac{\alpha}{\pi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right]}, \quad (3.31)$$

où G_{AD} est un facteur global et κ désigne le poids relatif des anomalies axiale et de trace ($\kappa = -1$ suivant l'analyse de la section 3.1.2). Ces deux constantes sont supposées réelles dans la limite de conservation de CP considérée ici.

Les coefficients des termes $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ sont déterminés par la trace du tenseur énergie-moment (1.127) et la divergence du courant axial (1.119) avec $a = 0$, respectivement. Les termes de masses de ces équations ne sont pas pris en compte puisque notre

³Soulignons d'ores et déjà que cette approche n'est en fait pas en contradiction avec les résultats qui précèdent, mais constitue plutôt une analyse complémentaire, comme nous allons le voir dans la section suivante ainsi que dans la section 3.3.

hypothèse de départ (comme celle de la référence [9]) est celle de la dominance de la partie des anomalies proportionnelle aux champs de jauge et non, par exemple, de la trace du tenseur énergie-moment ou de la divergence du courant axial dans leur entièreté. Ce choix est motivé par la description des désintégrations du ψ' présentée dans la section 1.3.4.

Les interactions électromagnétiques sont habituellement introduites dans le modèle non linéaire au moyen de la dérivée covariante $D_\mu U^{(\dagger)} \equiv \partial_\mu U^{(\dagger)} - ieA_\mu [\mathbf{Q}, U^{(\dagger)}]$. Une telle substitution dans le Lagrangien (3.31) mènerait cependant à un double comptage puisque la totalité des effets électromagnétiques dans la trace du tenseur énergie-moment a déjà été prise en compte par le terme anomal $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Nous nous en tenons donc à l'expression (3.31).

Les choses vont en fait plus loin : les contributions des boucles de pions provenant du terme $Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)$ aux désintégrations radiatives des kaons ne doivent pas non plus être considérées. Celles-ci ne seraient d'ailleurs pas invariantes sous transformations $U(1)_{em}$ locales. Le Lagrangien (3.31) doit ainsi être vu *comme un modèle phénoménologique au 'tree-level', et non comme la sélection de quelques opérateurs particuliers de l'expansion chirale, supposés dominants*.

La nécessité - et l'intérêt - de ce changement de point de vue par rapport à la section précédente réside bien sûr dans l'utilisation des équations (1.127) et (1.119) afin de fixer le poids relatif des opérateurs anomaux forts et électromagnétiques. Ces équations, dérivées à partir des anomalies de QCD et de QED , n'ont en effet de sens que pour des mésons pseudoscalaires *sur leur couche de masse* (ou tout au moins pour des amplitudes au 'tree-level')⁴. Les effets de boucles sont donc supposés pris en compte par les coefficients anomaux, dans le modèle (3.31).

Notre analyse diffère de celle de la référence [9] sur plusieurs points :

- Tout d'abord, les anomalies axiales forte et électromagnétique sont introduites. Les processus $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$, $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_S^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ sont ainsi inclus dans l'analyse.
- Ensuite, les masses des pions ne sont pas posées égales à zéro dans les parties des amplitudes $K \rightarrow \pi\pi, \pi\pi\pi$ liées à la trace du tenseur énergie-moment. Cette approximation est en effet inutile dans notre cas puisque la représentation non linéaire (1.104) de l'opérateur d'anomalie d'échelle de QCD a été obtenue en dehors de la limite chirale.
- Enfin, le spectre de masse invariante des deux photons émis lors de la désintégration $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ est analysé.

Examinons à présent la possibilité d'une dominance des opérateurs anomaux (3.31) dans les désintégrations hadroniques et radiatives des kaons.

3.2.1 Désintégrations hadroniques : $K \rightarrow \pi\pi, \pi\pi\pi$

Dans le Modèle Standard (et en l'absence de corrections électromagnétiques), les amplitudes de désintégration $K \rightarrow \pi\pi$ peuvent être paramétrisées de la manière suivante, dans la limite $m_u = m_d$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{+-}^0 &\equiv \mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = A_0 e^{i\delta_0} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_2 e^{i\delta_2}, \\ \mathcal{M}_{00}^0 &\equiv \mathcal{M}(K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = A_0 e^{i\delta_0} - \sqrt{2} A_2 e^{i\delta_2}, \\ \mathcal{M}_{+0}^+ &\equiv \mathcal{M}(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0) = \frac{3}{2} A_2 e^{i\delta_2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

⁴Rappelons que les représentations non linéaires (1.99) et (1.104) ont été obtenues à l'aide du théorème de Noether, qui est un théorème classique.

Les indices 0, 2 se réfèrent à l'isospin total des deux pions finaux. Les amplitudes réduites A_0 et A_2 sont produites par les parties $\Delta I = 1/2$ et $\Delta I = 3/2$ des interactions faibles, respectivement. Dans la limite chirale, la première reçoit à la fois des contributions des représentations $(8_L, 1_R)$ et $(27_L, 1_R)$, tandis que la seconde ne reçoit de contributions que de $(27_L, 1_R)$. Les phases δ_0 et δ_2 , quant à elles, encodent les effets des rediffusions fortes $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ dans l'état final, comme prescrit par le théorème de Watson.

Les équations ci-dessus peuvent être inversées, ce qui donne en particulier :

$$|A_0| = \sqrt{\frac{2}{3} |\mathcal{M}_{+-}^0|^2 + \frac{1}{3} |\mathcal{M}_{00}^0|^2 - \frac{4}{9} |\mathcal{M}_{+0}^+|^2}, \quad |A_2| = \frac{2}{3} |\mathcal{M}_{+0}^+|. \quad (3.33)$$

Les amplitudes expérimentales [21] impliquent ainsi :

$$|A_0/A_2|_{\text{exp}} = 22.2. \quad (3.34)$$

Cette dominance du canal $\Delta I = 1/2$ sur le canal $\Delta I = 3/2$ constitue la 'règle $\Delta I = 1/2$ ' déjà mentionnée à plusieurs reprises. En langage ' $SU(3)$ ', celle-ci implique une suppression des interactions du type $(27_L, 1_R)$ par rapport aux interactions du type $(8_L, 1_R)$.

Comme déjà signalé dans la section 3.1.4, le mode chargé $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ est une pure transition $\Delta I = 3/2$. Il ne peut donc être généré par le Lagrangien (3.31) dans la limite d'isospin. Au premier ordre en la brisure $m_d - m_u$, toutefois, il reçoit la contribution de poles du η et du η' provenant de l'opérateur Q_{AA} (cf. fig.20, 3^{ème} diagramme)⁵. Les paramètres du mélange $\eta_8-\eta_0$ ainsi impliqués sont éliminés au profit de $m_{K,\pi}$ et de m_0 à l'aide de l'équation (1.116), comme précédemment.

Les autres amplitudes, qui contiennent une composante $\Delta I = 1/2$, sont considérées dans la limite $m_u = m_d$. Elles sont générées de ce fait uniquement par l'opérateur Q_{AT} ⁶.

Il n'est bien entendu pas nécessaire d'analyser tous les modes $K \rightarrow \pi\pi, \pi\pi\pi$ étant donné les symétries en jeu. Les prédictions du modèle (3.31) pour les amplitudes $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ et $K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$, par exemple, sont rigoureusement identiques dans la limite d'isospin (et égales à $|A_0|$, en norme), conformément aux équations (3.32).

Compte tenu de ces remarques, les amplitudes 'tree-level' suivantes sont obtenues :

$$\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)_{AD} = \frac{4iG_{AD}}{F_\pi} (m_K^2 - m_\pi^2) (m_K^2 - 2m_\pi^2), \quad (3.35)$$

$$\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)_{AD} = \frac{2G_{AD}}{F_\pi^2} m_K^2 (q^2 - 2m_\pi^2), \quad (3.36)$$

$$\mathcal{M}(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)_{AD} = -\frac{6i\kappa G_{AD}}{F_\pi} (m_K^2 - m_\pi^2) (m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 - \delta_{em}^2), \quad (3.37)$$

où q désigne l'impulsion totale du système $\pi^+\pi^-$. Les états physiques K_S^0 et K_L^0 ont été définis en (1.108), dans la limite de conservation de CP . Remarquons que les dépendances en m_0 se sont simplifiées dans l'équation (3.37). Les expressions (3.35) et (3.36) correspondent aux résultats de la référence [9] à condition de prendre la limite $m_\pi \rightarrow 0$ dans chacun des derniers facteurs.

Les prédictions du modèle (3.31) sont à comparer à celles du Lagrangien

$$\mathcal{L}_8 = G_8 F_\pi^4 \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right)^{ds+sd}, \quad (3.38)$$

⁵ Rappelons l'image en termes de quarks et de gluons qui sous-tend cette contribution, donnée par la figure 13 (p.46).

⁶ En termes de diagrammes de quarks, un processus typique est représenté dans la figure 8 (p.35).

associé à l'opérateur Q_8 défini en (3.6). Afin de pousser la comparaison jusqu'au bout, nous n'introduisons pas de multiplet $(27_L, 1_R)$. Le processus $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ est ainsi à nouveau obtenu par effets de brisure de l'invariance sous $SU(2)_I$. Le Lagrangien ci-dessus produit les amplitudes suivantes, au 'tree-level' :

$$\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)_8 = 2iG_8 F_\pi (m_K^2 - m_\pi^2), \quad (3.39)$$

$$\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)_8 = G_8 (q^2 - m_\pi^2), \quad (3.40)$$

$$\mathcal{M}(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)_8 = \frac{iG_8 F_\pi}{2} \left(1 + 6 \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{m_0^2} \right) (m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 - \delta_{em}^2). \quad (3.41)$$

Conformément à l'hypothèse de dominance, les couplages G_8 , G_{AD} et $G_{AD}^{m=0}$ (correspondant à la limite $m_\pi \rightarrow 0$ dans les derniers facteurs des équations (3.35) et (3.36)) sont déterminés de manière à saturer l'amplitude $|A_0|$, obtenue à partir des rapports de branchement expérimentaux $K \rightarrow \pi\pi$ à l'aide de l'équation (3.33) :

$$|G_8| = 9.1 \cdot 10^{-6} \text{ GeV}^{-2}, \quad (3.42)$$

$$|G_{AD}| = \frac{|G_8| F_\pi^2}{2(m_K^2 - 2m_\pi^2)} = 0.19 \cdot 10^{-6} \text{ GeV}^{-2}, \quad (3.43)$$

$$|G_{AD}^{m=0}| = \frac{|G_8| F_\pi^2}{2m_K^2} = 0.16 \cdot 10^{-6} \text{ GeV}^{-2}. \quad (3.44)$$

Les prédictions des différents modèles sont rassemblées dans le tableau suivant⁷ :

	exp [21]	$ChPT_8^{\mathcal{O}(p^2)}/\text{exp}$	$AD_{m=0}/\text{exp}$	AD/exp
$Br(K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)$	$(68.95 \pm 0.14) \%$	0.96	0.96	0.96
$Br(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)$	$(12.59 \pm 0.19) \%$	0.76	1.13	0.66
$ A_0/A_2 $	22.2	5.6	$2.9/ \kappa $	$2.5/ \kappa $

Tab.4

Les facteurs cinématiques intervenant dans les rapports de branchement ci-dessus ont été évalués à l'aide des masses physiques (1.84). Signalons que l'utilisation des masses $m_{K,\pi}$ définies en (1.93) aurait pour effet d'augmenter les rapports théorie/expérience obtenus de trois à huit pour-cent⁸ dans le cas du processus $K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$. Cette sensibilité particulière est à imputer au peu d'espace de phase disponible. D'autre part, les temps de vie du K_S^0 et du K_L^0 ont été spécifiés en (1.109).

Remarquons l'impact important de l'approximation $m_\pi = 0$ dans la trace du tenseur énergie-moment, à la deuxième ligne du tableau ci-dessus. Les différentes valeurs obtenues ne permettent cependant d'exclure aucun modèle étant donné l'importance des erreurs théoriques et la sensibilité que nous venons de relever.

La règle $\Delta I = 1/2$, d'autre part, est reproduite à 18% par le Lagrangien (3.38), et à 40% par le rapport des anomalies axiale et de trace fortes (3.31) avec $|\kappa| = 1$, au premier

⁷ La première ligne de ce tableau n'est bien entendu pas une prédiction : c'est le résultat de la saturation de l'amplitude $|A_0|$.

⁸ Plus précisément, nous obtenons les valeurs 0.81, 1.21 et 0.69 pour les modèles $ChPT_8^{\mathcal{O}(p^2)}$, $AD_{m=0}$ et AD , respectivement.

ordre en la brisure de $SU(2)_I$. Rappelons toutefois que la valeur de κ n'est pas spécifiée par le modèle (3.31) en tant que tel.

L'hypothèse de dominance de l'opérateur Q_{AT} tient donc toujours (tab.4, 2^{ème} ligne), tandis que celle de l'opérateur Q_{AA} ne peut être confirmée ou infirmée sur base de cette seule analyse (tab.4, 3^{ème} ligne).

3.2.2 Désintégrations radiatives : $K_{S,L}^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $K_{L,S}^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$

Examinons à présent les effets des anomalies axiale et de trace électromagnétiques dans les désintégrations radiatives $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $K_S^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ et $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$, respectivement. Dans la limite d'isospin, les prédictions ('tree-level') du Lagrangien (3.31) s'écrivent :

$$\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma)_{AD}^{\alpha\beta} = \frac{16iG_{AD}}{3F_\pi} \frac{\alpha}{\pi} m_K^2 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_K^2}\right) (k_1^\beta k_2^\alpha - k_1 k_2 \eta^{\alpha\beta}), \quad (3.45)$$

$$\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma)_{AD}^{\alpha\beta} = \frac{8G_{AD}}{3F_\pi^2} \frac{\alpha}{\pi} m_K^2 (k_1^\beta k_2^\alpha - k_1 k_2 \eta^{\alpha\beta}), \quad (3.46)$$

$$\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma)_{AD}^{\alpha\beta} = -\frac{16\kappa G_{AD}}{F_\pi} \frac{\alpha}{\pi} m_K^2 \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (3.47)$$

$$\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma)_{AD}^{\alpha\beta} = \frac{8i\kappa G_{AD}}{F_\pi^2} \frac{\alpha}{\pi} m_K^2 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_K^2}\right) \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}, \quad (3.48)$$

où k_1 et k_2 désignent les moments des photons finaux.

Ces amplitudes sont à comparer à celles générées à partir du Lagrangien (3.38), après introduction des interactions électromagnétiques, à l'ordre le plus bas de l'expansion chirale. La prise en compte de ces interactions se fait au moyen de la substitution minimale $\partial_\mu U^{(\dagger)} \rightarrow D_\mu U^{(\dagger)} \equiv \partial_\mu U^{(\dagger)} - ieA_\mu [\mathbf{Q}, U^{(\dagger)}]$ dans l'opérateur faible (3.38), mais également dans le Lagrangien fort à basse énergie (1.90), ce dernier étant à même de contribuer par effets de boucles. Dans ce cas, les opérateurs $|\Delta S| = 1$ d'ordre suivant dans l'expansion chirale (i.e., p^4) doivent en principe être également considérés⁹. Ceux-ci ne peuvent cependant affecter les désintégrations traitées ici, les particules impliquées n'étant pas chargées. Ces désintégrations ne reçoivent pas non plus de contribution de l'ordre p^2 , pour la même raison. A l'ordre le plus bas possible, c.-à-d. p^4 , les processus $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ sont ainsi produits à partir du Lagrangien (3.38) via une boucle de pions ou de kaons. Celle-ci converge étant donné l'absence de contretermes $|\Delta S| = 1$ à cet ordre. D'autre part, de manière générale, les termes d'ordre p^4 du Lagrangien chiral fort sont susceptibles d'intervenir dans les désintégrations radiatives des kaons, à cet ordre précisément. C'est le cas du terme de Wess-Zumino-Witten, qui est à l'origine de contributions de pôles du π^0 , du η et du η' dans les processus $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_S^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$.

Les amplitudes des désintégrations $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ à une boucle indiquées ci-dessus sont données explicitement par [73, 74] :

$$\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma)_8^{\alpha\beta} = -2iG_8 F_\pi \frac{\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_K^2}\right) F_\varphi \left(\frac{m_K^2}{4m_\pi^2}\right) (k_1^\beta k_2^\alpha - k_1 k_2 \eta^{\alpha\beta}) \quad (3.49)$$

⁹ Le champ électromagnétique A^μ est compté comme une puissance de p dans cette expansion.

et

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma)_8^{\alpha\beta} = & -G_8 \frac{\alpha}{\pi} \left[\left(1 - \frac{m_\pi^2}{q^2}\right) F_\varphi \left(\frac{q^2}{4m_\pi^2}\right) \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{m_\pi^2}{q^2} - \frac{m_K^2}{q^2}\right) F_\varphi \left(\frac{q^2}{4m_K^2}\right) \right] (k_1^\beta k_2^\alpha - k_1 k_2 \eta^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

avec $q \equiv k_1 + k_2$. La fonction F_φ est définie par :

$$F_\varphi(A) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{A} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{1/A-1}} \right)^2 & \text{pour } A < 1, \\ 1 + \frac{1}{4A} \left(\ln \frac{1 - \sqrt{1-1/A}}{1 + \sqrt{1-1/A}} + i\pi \right)^2 & \text{pour } A > 1. \end{cases} \quad (3.51)$$

Celle-ci développe une partie imaginaire pour $A > 1$, c.-à-d. lorsque la transition intermédiaire $K \rightarrow \pi\pi$ (dans le cas de $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$) ou $K \rightarrow \pi\pi\pi$ (dans celui de $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \gamma\gamma$) peut être réalisée ‘on-shell’. Notons par ailleurs l’absence de contribution de boucle de kaons au processus $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ dans la limite d’isospin, considérée tout au long de cette section.

D’autre part, comme indiqué ci-dessus, les amplitudes $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma\gamma$ issues de l’opérateur (3.38) sont générées au ‘tree-level’ par les transitions $K_L^0 \rightarrow P$ et $K_S^0 \rightarrow \pi^0 P$ ($P = \pi^0, \eta, \eta'$)¹⁰, respectivement, suivies de la désintégration $\pi^0, \eta, \eta' \rightarrow \gamma\gamma$ via l’anomalie axiale de QED (cf. section 1.3.3)¹¹. Dans le modèle restreint $SU(3)_L \times SU(3)_R$, il est bien connu que les contributions des pôles du π^0 et du η_8 se compensent exactement à l’ordre p^4 , dans le cas du processus $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$, lorsque la masse du η_8 est exprimée en termes de m_π et de m_K au moyen de la relation de Gell-Mann-Okubo. De manière identique, dans le modèle $U(3)_L \times U(3)_R$ considéré ici, nous constatons que les contributions des pôles du π^0 , du η et du η' s’annulent exactement à l’ordre p^4 lorsque les paramètres $m_\eta, m_{\eta'}$ et θ_P sont éliminés au profit de m_π, m_K et m_0 à l’aide de l’équation (1.116) :

$$i\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma)_8^{\alpha\beta} = \sum_{P=\pi^0, \eta, \eta'} i\mathcal{M}(K_L^0 \rightarrow P)_8 \frac{i}{m_K^2 - m_P^2} i\mathcal{M}(P \rightarrow \gamma\gamma)^{\alpha\beta} \underset{\mathcal{O}(p^4)}{\equiv} 0. \quad (3.52)$$

Insistons sur le fait que la modélisation du mélange $\eta_8\text{-}\eta_0$ à l’ordre le plus bas (1.116) est effectivement valide dans le cas présent puisque la transition $P \rightarrow \gamma\gamma$ est déjà d’ordre p^4 . L’effet dominant dans les désintégrations $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ est donc d’ordre p^6 , et ne sera pas discuté ici¹². Le processus $K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma\gamma$, par contre, reçoit la contribution suivante à l’ordre p^4 :

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma\gamma)_8^{\alpha\beta} = & -8G_8 \frac{\alpha}{\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma} \frac{m_K^2 - q^2}{m_\pi^2 - q^2} \\ & \times \frac{(m_K^2 - m_\pi^2)(m_0^2 - m_\pi^2 + q^2)}{(-4m_K^2 + m_\pi^2 + 3q^2) m_0^2 + 3(m_\pi^2 - q^2) (-2m_K^2 + m_\pi^2 + q^2)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

¹⁰Notons que les processus $K_L \rightarrow \pi\pi$ et $K_S \rightarrow \pi\pi\pi$, qui pourraient générer des effets de boucles semblables à ceux intervenant dans $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \gamma\gamma$, sont interdits (ou plus exactement fortement supprimé, dans le cas de $K_S \rightarrow \pi\pi\pi$) dans la limite de conservation de CP .

¹¹Ces contributions anomales provenant de pôles ne doivent pas être confondues avec la contribution directe proposée en (3.31).

¹²Signalons tout de même l’extrême sensibilité de l’équation (3.52) aux masses m_η et $m_{\eta'}$. La prise en compte des masses physiques mènerait ainsi à une amplitude importante, quoique formellement d’ordre p^6 .

avec $q \equiv k_1 + k_2$. Cette expression originale, dérivée en théorie de perturbations chirales $U(3)_L \times U(3)_R$, a été obtenue comme précédemment en substituant les paramètres m_η , $m_{\eta'}$ et θ_P à l'aide de l'équation (1.116). Remarquons que l'amplitude ci-dessus s'annule pour $q^2 = m_K^2$, en accord avec l'équation (3.52). Elle s'annule également dans la limite $SU(3)_V$, comme il se doit étant donné la présence des vertex intermédiaires $K_S^0 \rightarrow \pi^0 P$ [75]. Notons enfin la résurgence du pôle du η dans la limite $m_0 \rightarrow \infty$ via la relation de Gell-Mann-Okubo dans le premier terme du dénominateur¹³. Conformément à l'analyse standard [74, 76], nous appliquons la coupure $q^2 > 0.2m_K^2$ dans le calcul du rapport de branchement. Nous obtenons ainsi la valeur :

$$Br(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma)_{q^2 > 0.2m_K^2}^{U(3)} = 6.6 \cdot 10^{-8} \quad (3.54)$$

pour $m_0 = 853$ MeV ($6.0 \cdot 10^{-8}$ pour $m_0 = 0.95$ GeV et $7.1 \cdot 10^{-8}$ pour $m_0 = 0.8$ GeV), en accord avec la mesure récente de la collaboration NA48 [76] (cf. tab.5), mais sensiblement plus élevée que la prédiction standard, dérivée en théorie de perturbations chirales $SU(3)_L \times SU(3)_R$ [74] :

$$Br(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma)_{q^2 > 0.2m_K^2}^{SU(3)} = 3.8 \cdot 10^{-8}, \quad (3.55)$$

également compatible avec le rapport de branchement observé (notez les incertitudes expérimentales importantes). Dans la limite $m_0 \rightarrow \infty$, le neuvième méson pseudoscalaire η_0 est intégré, et les prédictions des théories $U(3)_L \times U(3)_R$ et $SU(3)_L \times SU(3)_R$ devraient coïncider, en bonne approximation. C'est effectivement ce que nous observons (avec une erreur de 10%, probablement due à la différence entre la masse physique du η utilisée en (3.55) et celle issue de l'équation (1.116)) :

$$Br(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma)_{q^2 > 0.2m_K^2}^{U(3), m_0 \rightarrow \infty} = 4.2 \cdot 10^{-8}. \quad (3.56)$$

En conclusion, si le comptage en $1/N_C$ est raisonnable, comme le suggèrent les analyses des sections 1.3.2 et 1.3.3, la contribution du η_0 au processus $K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ via l'opérateur (3.38), loin d'être une faible correction à la prédiction standard, est déterminante. L'amélioration de la précision des mesures permettra bien entendu de départager les valeurs (3.54) et (3.55). En ce qui concerne l'analyse de cette section, nous poursuivons avec la valeur (3.54).

Nous sommes à présent en mesure de comparer les prédictions des différents modèles :

	exp [21]	$ChPT_8^{\mathcal{O}(p^4)}/\text{exp}$	$AD_{m=0}/\text{exp}$	AD/exp
$Br(K_S^0 \rightarrow \gamma \gamma)$	$(2.80 \pm 0.07) \cdot 10^{-6}$	0.70	0.70	0.97
$Br(K_L^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma)$	$(1.41 \pm 0.12) \cdot 10^{-6}$	0.49	0.80	1.10
$Br(K_L^0 \rightarrow \gamma \gamma)$	$(5.90 \pm 0.07) \cdot 10^{-4}$	$\mathcal{O}(p^6)$	$(4.5\kappa)^2$	$(5.3\kappa)^2$
$Br(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma)$	$(4.9 \pm 1.8) \cdot 10^{-8}$	1.35	$(0.5\kappa)^2$	$(0.6\kappa)^2$

Tab.5

La coupure $q^2 > 0.2m_K^2$ a été appliquée à tous les rapports de branchement $K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$.

¹³ Le pôle du π^0 , quant à lui, est déjà explicite dans l'expression (3.53).

Le processus $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ est habituellement présenté comme un test des théories de perturbations chirales. La prédiction à l'ordre p^4 (3.49) est en réalité identique à celle du modèle phénoménologique consistant en la désintégration du K_S^0 en deux pions virtuels chargés via un facteur de forme constant (et non un couplage dérivatif), suivie de la diffusion de ces deux pions en deux photons. Quoi qu'il en soit, l'amplitude (3.49) nécessite l'adjonction de termes d'ordre p^6 dans le cadre de l'expansion chirale afin de reproduire le rapport de branchement expérimental. Le modèle AD , en revanche, fonctionne remarquablement bien à lui seul pour ce mode.

Cette situation se renforce dans le cas de la désintégration $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$, où l'opérateur (3.38) ne parvient plus à rendre compte que de la moitié du rapport de branchement observé, à l'ordre p^4 , alors que l'opérateur anomal (3.31) ne rencontre aucune difficulté à reproduire celui-ci.

Le modèle de dominance de l'anomalie de trace résiste donc à l'analyse des largeurs de désintégration. Dans la section suivante, nous allons réaliser un test plus contraignant de ce modèle, par l'analyse du spectre de masse invariante des deux photons émis lors de la transition $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$.

D'autre part, il n'existe pas de valeur de κ dans le Lagrangien (3.31) capable de reproduire à la fois les rapports de branchement expérimentaux $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_S^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ ci-dessus et l'amplification $|A_0/A_2|$ du tableau 4. L'hypothèse de dominance de l'anomalie axiale telle que formulée ici¹⁴ doit donc être rejetée.

3.2.3 Etude du spectre $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$

De manière générale, la transition $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ peut être paramétrisée à l'aide de deux amplitudes invariantes, dans la limite de conservation de CP :

$$\mathcal{M}(K_L^0(\mathbf{p}_K) \rightarrow \pi^0(\mathbf{p}_\pi)\gamma(\mathbf{k}_1)\gamma(\mathbf{k}_2))^{\alpha\beta} = \frac{\alpha G_8}{\pi 4} \left[A(z, y) T_0^{\alpha\beta} + B(z, y) \frac{2T_2^{\alpha\beta}}{m_K^2} \right]. \quad (3.57)$$

Les structures tensorielles $T_0^{\alpha\beta}$ et $T_2^{\alpha\beta}$ sont définies par

$$T_0^{\alpha\beta} \equiv k_1^\beta k_2^\alpha - (k_1 k_2) \eta^{\alpha\beta}, \quad (3.58)$$

$$T_2^{\alpha\beta} \equiv (p_K k_1) p_K^\beta k_2^\alpha + (p_K k_2) p_K^\alpha k_1^\beta - (k_1 k_2) p_K^\alpha p_K^\beta - (p_K k_1) (p_K k_2) \eta^{\alpha\beta}, \quad (3.59)$$

tandis que les variables de Dalitz y et z s'expriment en termes des variables cinématiques $q \equiv k_1 + k_2$ et $t \equiv (k_2 + p_\pi)^2$ de l'annexe E.5 de la façon suivante :

$$z \equiv \frac{(k_1 + k_2)^2}{m_K^2} = \frac{q^2}{m_K^2}, \quad y \equiv \frac{p_K(k_1 - k_2)}{m_K^2} = \frac{m_K^2 - 2t - q^2 + m_\pi^2}{2m_K^2}. \quad (3.60)$$

Les amplitudes de désintégration (3.46) et (3.50) considérées dans la section précédente ne comportent pas de terme $B(z, y)$. Un tel terme est par contre généré par les corrections d'ordre p^6 invoquées dans l'expansion chirale afin de remédier au problème rencontré à

¹⁴Nous reviendrons brièvement sur les points faibles de cette formulation dans la section 3.3.

l'ordre p^4 [77]. Nous avons explicitement (pour comparaison avec l'ordre p^4) :

$$\begin{aligned}
 A(z, y) = & 4F_\varphi \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) \frac{a_1(z)}{z} + 4F_\varphi \left(\frac{z}{4} \right) \frac{1 + r_\pi^2 - z}{z} \\
 & + \frac{a_2 m_K^2}{\Lambda_\chi^2} \left\{ \frac{4r_\pi^2}{z} F_\varphi \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) + \frac{2}{3} \left(2 + \frac{z}{r_\pi^2} \right) \left[\frac{1}{6} + R \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) \right] - \frac{2}{3} \ln \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \right. \\
 & - \frac{2r_\pi^2}{z^2} (z + 1 - r_\pi^2)^2 \left[\frac{z}{12r_\pi^2} + F_\varphi \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) + \frac{z}{r_\pi^2} R \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) \right] \\
 & \left. + \frac{8r_\pi^2}{z^2} y^2 \left[\frac{z}{12r_\pi^2} + F_\varphi \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) + \frac{z}{2r_\pi^2} F_\varphi \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) + \frac{3z}{r_\pi^2} R \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) \right] \right\} \\
 & + \alpha_1 (z - r_\pi^2) + \alpha_2, \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(z) = & \frac{a_2 m_K^2}{\Lambda_\chi^2} \left\{ \frac{4r_\pi^2}{z} F_\varphi \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) + \frac{2}{3} \left(10 - \frac{z}{r_\pi^2} \right) \left[\frac{1}{6} + R \left(\frac{z}{4r_\pi^2} \right) \right] + \frac{2}{3} \ln \frac{m_\pi^2}{m_\rho^2} \right\} \\
 & + \beta, \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

avec $r_\pi \equiv m_\pi/m_K$, $\Lambda_\chi \simeq 4\pi F_\pi \simeq 1.16$ GeV et $m_\rho \simeq 770$ MeV. La fonction F_φ a été définie en (3.51). La fonction R , quant à elle, est donnée par :

$$R(A) = \begin{cases} -\frac{1}{6} + \frac{1}{2A} - \frac{\sqrt{1/A-1}}{2A} \arcsin \sqrt{A} & \text{pour } A < 1, \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2A} + \frac{\sqrt{1-1/A}}{4A} \left(\ln \frac{1-\sqrt{1-1/A}}{1+\sqrt{1-1/A}} + i\pi \right) & \text{pour } A > 1. \end{cases} \tag{3.63}$$

Les amplitudes A et B indiquées ci-dessus ne correspondent pas à un calcul complet à l'ordre p^6 . Elles contiennent la prédiction complète de l'ordre p^4 , plus certaines contributions de l'ordre p^6 , supposées dominantes¹⁵. Celles-ci sont de deux types :

(i) Les contributions des boucles de pions chargés provenant du vertex $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$ à l'ordre p^4 . Ce dernier est déterminé expérimentalement [78] :

$$\mathcal{M}(K_L^0(p_K) \rightarrow \pi^0(p_\pi) \pi^+(p_1) \pi^-(p_2)) = G_8 m_K^2 a_1(z) + G_8 \frac{a_2}{\Lambda_\chi^2} [p_K(p_1 - p_2)]^2, \tag{3.64}$$

avec $a_1(z) = 0.38 + 0.13Y_0 - 0.0059Y_0^2$, $a_2 = 6.5$ et $Y_0 = (z - r_\pi^2 - 1/3)/r_\pi^2$.

(ii) Les contributions des termes locaux d'ordre p^6 . Dans le cas présent, seules trois combinaisons de champs de mésons et de photons interviennent. Celles-ci peuvent être paramétrisées par le Lagrangien effectif simplifié suivant [77, 79] :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{CT} = & \frac{\alpha}{\pi} \frac{G_8}{4} \left[k_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} r \left(\mathbf{m} U^\dagger + U \mathbf{m} \right)^{ds+sd} + k_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(D_\rho U D^\rho U^\dagger \right)^{ds+sd} \right. \\
 & \left. + k_3 F_{\mu\lambda} F^{\mu\sigma} \left(D^\lambda U D_\sigma U^\dagger + D_\sigma U D^\lambda U^\dagger \right)^{ds+sd} \right]. \tag{3.65}
 \end{aligned}$$

¹⁵ En principe, la (faible) contribution du multiplet $(27_L, 1_R)$ doit encore être ajoutée. Celle-ci est cependant négligée dans l'analyse standard [77].

Les couplages (indéterminés) k_1 , k_2 et k_3 ci-dessus sont à l'origine des termes polynomiaux α_1 , α_2 et β des équations (3.61) et (3.62) :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{m_K^2}{F_\pi^2} (4k_2 + 2k_3), \\ \alpha_2 &= \frac{m_K^2}{F_\pi^2} (8k_1 - 4k_2 + 2k_3) - 0.65, \\ \beta &= \frac{m_K^2}{F_\pi^2} (-4k_2) - 0.13.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Les constantes de soustraction résiduelles 0.65 et 0.13 proviennent de la renormalisation des boucles de pions du point (i) dans le schéma MS , à l'échelle m_ρ [77]. Dans l'hypothèse de dominance des mésons vectoriels [80], les coefficients k_i s'écrivent :

$$k_1 = 0, \quad \frac{m_K^2}{F_\pi^2} k_3 = -\frac{m_K^2}{F_\pi^2} k_2 \equiv 2a_V.\tag{3.67}$$

Finalement, le taux de désintégration non polarisé correspondant à l'amplitude (3.57) est donné par ($q \equiv \sqrt{q^2}$ dorénavant) :

$$\frac{d^2\Gamma}{dqdt} = \frac{\alpha^2 G_8^2}{8(4\pi)^5 m_K^3} q \left[|A + B|^2 q^4 + |B|^2 \left(q^2 - \frac{(m_K^2 - t)(t + q^2 - m_\pi^2)}{m_K^2} \right)^2 \right].\tag{3.68}$$

Lors d'une expérience, le nombre d'événements attendu dans le créneau $[q_i, q_i + \Delta q_i]$ est obtenu à partir de ce taux (après intégration sur t) de la manière suivante :

$$N_i = \frac{N(K_L^0)}{\Gamma(K_L^0)} \left(\int_{q_i}^{q_i + \Delta q_i} dq \frac{d\Gamma}{dq} \right) a_i + b_i,\tag{3.69}$$

où a_i désigne l'acceptance du créneau i (qui est fonction du détecteur), b_i est le nombre d'événements parasites estimé pour ce créneau et $\Gamma(K_L^0)$ est la largeur de désintégration totale du K_L^0 . Les analyses des collaborations KTeV [81] et NA48 [82] utilisent le processus $K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ comme normalisation :

$$\frac{N(K_L^0)}{\Gamma(K_L^0)} = \frac{N(K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) a(K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)},\tag{3.70}$$

où $N(K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)$ est le nombre d'événements $K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ observé et $a(K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)$ est l'acceptance globale pour ce mode¹⁶. Les acceptances a_i et le 'background' par créneau b_i n'ayant pas été publiés par KTeV, nous considérerons l'approximation $a_i = a(K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)$ et $b_i = 0$ lors de la comparaison avec leurs mesures¹⁷. Les données a_i , b_i et $N(K_L^0)$ sont par contre explicites dans l'analyse de NA48, ce qui permet une confrontation plus précise entre théorie et expérience. Signalons par ailleurs la coupure appliquée autour de $q = m_\pi$ afin d'éviter une pollution du signal par les événements $K_L^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ suivis de la désintégration d'un des pions en deux photons.

L'analyse du mode $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ dans le formalisme de l'expansion chirale peut être résumée comme suit :

¹⁶La contamination par des signaux parasites est cette fois négligeable.

¹⁷Le nombre d'événements attendu N_i est toutefois multiplié par le facteur d'échelle $N/(N - b)$, où N désigne le nombre total de candidats $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ observé par KTeV et b est leur estimation du 'background'.

– **ChPT(p^4)**

L'expression (3.50) ne rend compte que de la moitié du rapport de branchement expérimental. Ceci correspond à une erreur de 30% au niveau de l'amplitude, au lieu des 20-25% attendus. Ce résultat, bien que mauvais, ne remet donc pas en question la validité de l'expansion chirale. Notons que le couplage modifié $G'_8 = 1.4 G_8$ permettrait de décrire à la fois la largeur et le spectre $d\Gamma/dq$ observés par NA48 (cf. fig.24). Un tel couplage induirait cependant un rapport de branchement trop élevé pour le mode $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (sans parler des désintégrations hadroniques). Il est néanmoins remarquable que l'amplitude (3.50) reproduise correctement la forme du spectre.

– **ChPT(p^6)**

Les corrections d'unitarité (3.61) et (3.62) avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0$ n'améliorent pas significativement la prédiction du rapport de branchement. Le spectre n'est en outre plus décrit correctement.

– **ChPT(p^6) + a_V**

La prise en compte d'échanges de mésons vectoriels correspondant à la valeur $a_V = -0.72 \pm 0.05 \pm 0.06$ permet de reproduire à la fois le spectre et le rapport de branchement observés par KTeV [81]. Ce résultat, ainsi que les prédictions d'ordre p^4 et p^6 ci-dessus, est représenté dans la figure 21. Nous avons toutefois dû adopter la valeur $a_V = -0.9$ au lieu de -0.72 afin de compenser le traitement approximatif des acceptances et du 'background'. Les données de NA48 apparaissent significativement différentes, surtout à petit q^2 . Le spectre observé indique ainsi la valeur plus faible $a_V = -0.46 \pm 0.03 \pm 0.04$ [82]. Cette valeur permet de reproduire 80% du rapport de branchement mesuré (cf. fig.26), ce qui est compatible avec la précision attendue de l'ordre p^6 .

– **ChPT(p^6) + k_1, k_2, k_3**

Le mode $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ requiert par ailleurs un couplage k_1 non nul à l'ordre p^6 , ce qui implique une déviation par rapport à l'ansatz de dominance vectorielle (3.67) [79]. Or une seconde contrainte sur les k_i en dehors de cet ansatz peut être dérivée de la borne supérieure sur le rapport de branchement $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ obtenue par NA48 pour $q < 110$ MeV. Le 'fit' du degré de liberté restant au spectre de masse invariante correspondant suggère dans ce cas à nouveau une prédominance des contributions de type vectoriel¹⁸.

En conclusion, le formalisme de l'expansion chirale permet de reproduire la distribution de masse invariante des deux photons émis lors de la désintégration $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ ainsi que le rapport de branchement correspondant, et ce de façon compatible avec la largeur du processus $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Ce qui a été gagné en précision a cependant été perdu en pouvoir prédictif. En particulier, le fait que les amplitudes (3.61) et (3.62) puissent s'accommoder à la fois aux spectres mesurés par KTeV et par NA48, alors que ceux-ci

¹⁸Signalons que l'ajustement des trois paramètres α_1, α_2 et β aux données expérimentales [81] et [82] a été étudié dans les références [83] et [84], respectivement. La contrainte provenant du processus $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ n'a cependant pas été prise en compte.

sont en contradiction à petit q^2 , montre le caractère limité des processus $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ et $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ en tant que tests des théories de perturbations chirales.

Examinons à présent la façon dont la prédiction (3.46) du modèle phénoménologique (3.31) se compare aux données expérimentales [81] et [82] :

– **AD, AD_{m=0}**

Un bref coup d'oeil aux figures 22 et surtout 28 permet de se convaincre que le modèle $AD_{m=0}$ ne donne pas de meilleurs résultats que l'ordre dominant de l'expansion chirale (figs.21,23), contrairement à ce qui a été observé au niveau des rapports de branchement. Le modèle AD , quant à lui, semble effectivement meilleur. Il prédit cependant trop d'événements en-dessous du seuil $q = 2m_\pi$ (figs.22,27).

Or les théories de perturbations chirales définissent un cadre bien précis dans lequel des corrections à l'ordre dominant peuvent être apportées, alors que le Lagrangien (3.31) ne laisse pas de place à de telles corrections (le rapport de branchement $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ est d'ailleurs déjà saturé). Le modèle de dominance de l'anomalie de trace (3.31) doit donc être abandonné en tant qu'alternative à l'expansion chirale.

Les différents spectres discutés dans cette section sont représentés dans les figures 21 à 28. La masse invariante des deux photons q est indiquée en abscisse (en GeV), tandis que le nombre d'événements N_i attendu ou observé dans le créneau $[q_i, q_i + \Delta q_i]$ est indiqué en ordonnée. Les losanges (carrés) des figures 21 et 22 (23 à 28) correspondent aux données de KTeV (NA48).

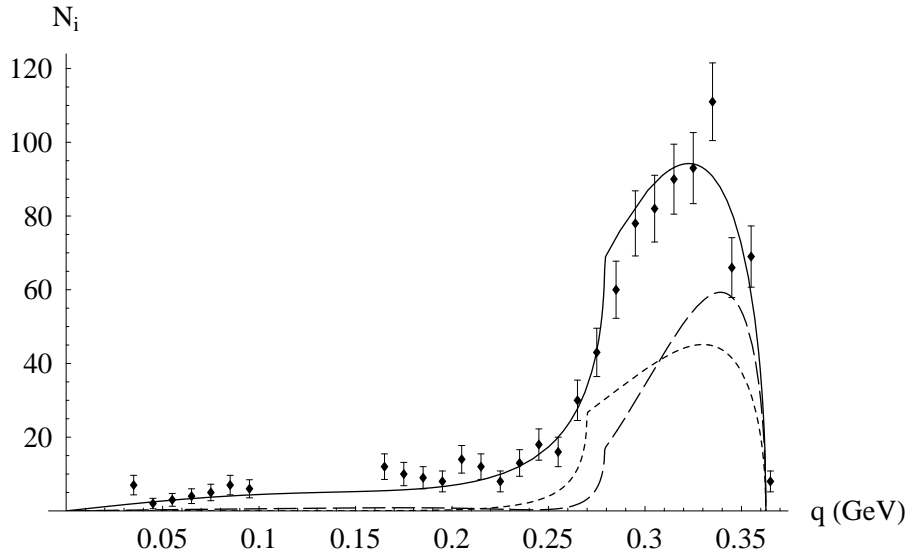


Fig.21

Traits courts : $ChPT(p^4)$.
 Traits longs : $ChPT(p^6)$.
 Continu : $ChPT(p^6), a_V = -0.9$.

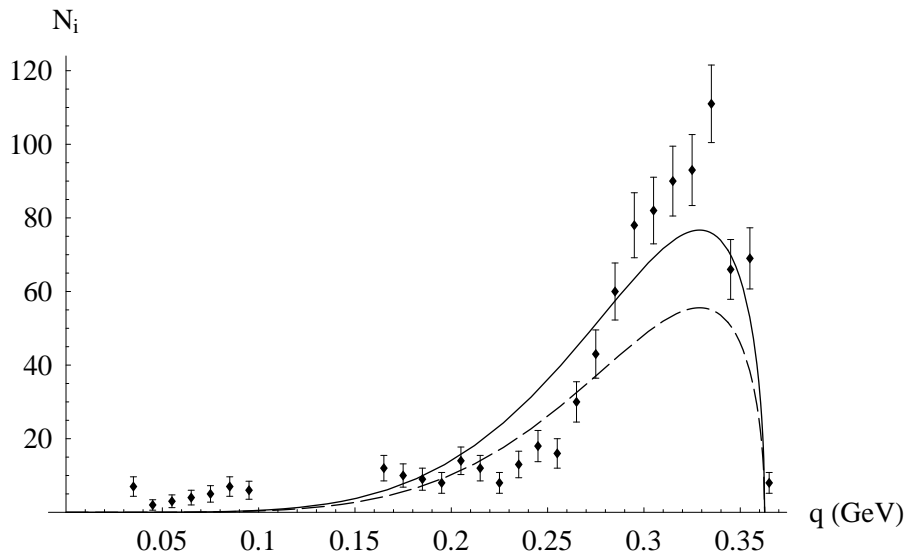


Fig.22

Continu : AD
 Traits longs : $AD_{m=0}$

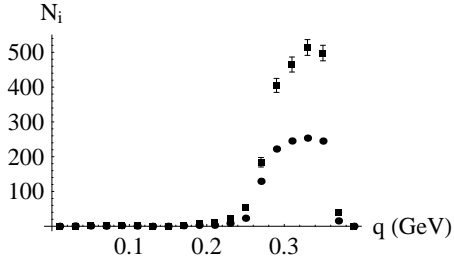


Fig.23. $ChPT(p^4)$.

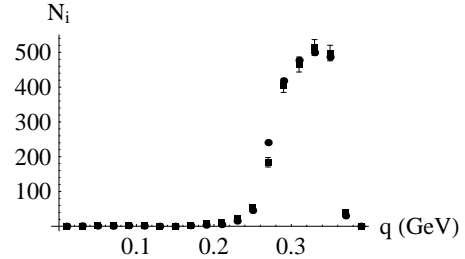


Fig.24. $ChPT(p^4), G'_8$.

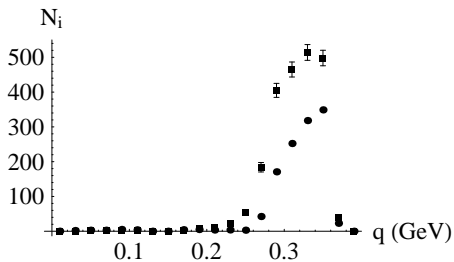


Fig.25. $ChPT(p^6)$.

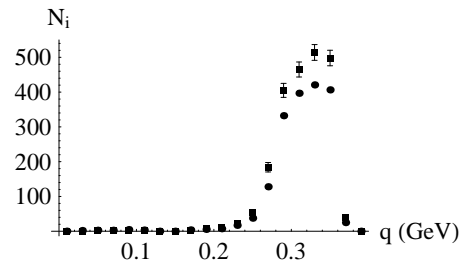


Fig.26. $ChPT(p^6), a_V = -0.46$.

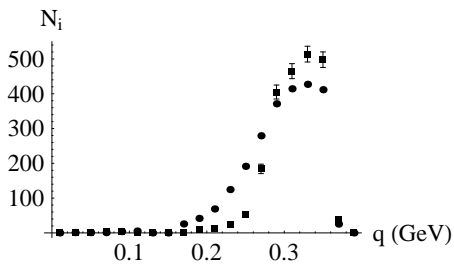


Fig.27. AD .

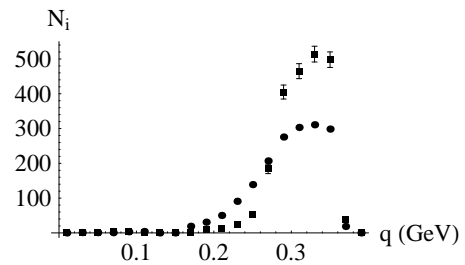


Fig.28. $AD_{m=0}$.

3.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons examiné les effets anomaux associés aux quarks légers dans les désintégrations faibles des kaons. Nous avons adopté pour ce faire le formalisme des Lagrangiens chiraux dans la limite de grand N_C .

Nous avons vu que des opérateurs $|\Delta S| = 1$ contenant les représentations chirales dominantes des anomalies axiale et de trace de QCD pouvaient être générés par corrections du Lagrangien non linéaire à une interaction faible effective de type densité.

Ceci contraste avec l'analyse effectuée à courte distance, où seul l'opérateur d'anomalie axiale était produit à l'ordre dominant lors de l'évolution des opérateurs faibles du Modèle Standard. Comme nous l'avons souligné, ce contraste entre évolutions à longue et à courte distance peut être imputé aux structures chirales différentes impliquées. L'opérateur faible initial à la masse du W est en effet du type $(8_L, 1_R)$, tandis que l'opérateur effectif à basse énergie considéré ici est du type $(\bar{3}_L, 3_R) + (3_L, \bar{3}_R)$. Cette possibilité de structures nouvelles à longue distance est un effet de la brisure de la symétrie chirale inhérent au processus d'hadronisation en-dessous du GeV. Le poids relatif des opérateurs anomaux ainsi générés est par ailleurs qualitativement en accord avec celui obtenu à courte distance à partir d'interactions effectives de même structure chirale, i.e., $(\bar{3}_L, 3_R)$ ou $(3_L, \bar{3}_R)$.

La question initiale posée dans ce chapitre était de savoir si les opérateurs anomaux pouvaient échapper aux règles de comptage chirales, de par leur caractère anomal. Les anomalies sont en effet des phénomènes non perturbatifs, aux effets potentiellement significatifs. Il se peut donc que les termes des polynômes qui les représentent à basse énergie contribuent de manière particulièrement importante aux processus physiques.

Une amplification a effectivement été observée dans le cas de l'anomalie de trace. Celle-ci prend cependant la forme d'un facteur m_K^2/m_π^2 , et non d'un couplage anormalement élevé de l'opérateur Q_{AT} . Les effets anomaux en question s'avèrent donc finalement compatibles avec l'expansion en p^2 , tout en étant susceptibles de dominer les contributions d'ordre p^4 , et ce malgré leur suppression en $1/N_C$. Si tel était effectivement le cas, ils pourraient être de l'ordre de 15-20%. Notons que cette estimation est en accord avec celle obtenue dans la référence [50] à l'aide des règles de somme de QCD .

Aucune amplification n'a en revanche été observée dans le cas de l'anomalie axiale.

L'hypothèse de dominance des opérateurs anomaux dans les désintégrations hadroniques et radiatives des kaons a également été envisagée dans le cadre d'un modèle phénoménologique au 'tree-level'.

Ce modèle, qui correspond à celui de la référence [9] dans le cas de l'anomalie de trace, fonctionne remarquablement bien au niveau des rapports de branchement pour ce qui est des effets de cette anomalie. La levée de l'approximation $m_\pi = 0$ dans les parties des amplitudes $K \rightarrow \pi\pi, \pi\pi\pi$ liées à la trace du tenseur énergie-moment améliore même l'accord entre théorie et expérience dans le cas des désintégrations radiatives. Or le spectre de masse invariante des deux photons émis lors de la désintégration $K_L^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ n'est pas reproduit correctement.

Ceci n'est pas étonnant si l'on se souvient que les effets de boucles sont pris en compte dans le modèle considéré au travers des coefficients anomaux. Les boucles dont il est question ici sont donc des boucles de quarks légers prises dans la limite $q^2 \rightarrow 0$ (cf. équation (1.68), p.17). Or l'approximation $q^2 \rightarrow 0$, qui peut s'avérer assez bonne au niveau des rapports de branchement (comme dans le cas de la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, cf.

section 1.3.3), est certainement mauvaise dans le cas du spectre du processus $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$. L'amplitude résultante est en effet purement réelle, ce qui est en contradiction flagrante avec l'existence de la transition $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$, directement reliée à la partie imaginaire de l'amplitude $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ pour $q^2 > 4m_\pi^2$ par le théorème optique.

Le modèle de dominance de l'anomalie de trace ne doit donc pas être considéré comme une alternative à l'expansion chirale, mais plutôt comme un moyen de resommer les effets des boucles de hadrons correspondant aux boucles de quarks légers u , d et s en $q^2 = 0$.

Ceci ne semble en revanche pas être possible dans le cas de l'anomalie axiale. Or la modélisation de l'hypothèse de dominance est moins claire dans ce cas. Ainsi, par exemple, seule l'anomalie électromagnétique dans le courant singulet de saveur $j_A^{\mu 0}$ a été considérée afin d'établir un parallèle avec l'anomalie de trace. Or des anomalies sont cette fois également présentes dans les courants $j_A^{\mu 8}$ et $j_A^{\mu 3}$. D'autre part, nous avons pris en compte la contribution du pôle du η_0 à la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$. Sa contribution aux désintégrations radiatives doit-elle être également considérée ?

Soulignons pour terminer que, quel que soit le mécanisme à l'origine de la règle $\Delta I = 1/2$ dans les désintégrations $K \rightarrow \pi\pi, \pi\pi\pi$, celui-ci devrait être à même d'expliquer également l'amplification observée du canal $\Delta I = 1/2$ dans les désintégrations des hyperons. La façon dont l'anomalie de trace pourrait affecter ces dernières ne nous paraît cependant pas claire.

Nous avons par ailleurs proposé une nouvelle estimation du rapport de branchement $K_S^0 \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$, incluant les effets du méson singulet η_0 .

Conclusion

Les effets des opérateurs liés aux anomalies axiale et de trace de QCD et de QED dans les désintégrations faibles des mésons ont été analysés dans deux régimes extrêmes : tout d'abord lorsque les densités anomales de gluons et de photons sont générées à courte distance par une boucle de quark lourd, ensuite lorsqu'elles sont générées à longue distance par des corrections fortes associées aux quarks légers u , d et s . Ces dernières ont été décrites à l'aide du Modèle Sigma Non Linéaire dans la limite où le nombre de couleurs N_C devient arbitrairement grand. Les enseignements principaux tirés de cette analyse sont les suivants :

1. Les effets anomaux induits par les quarks lourds dans les désintégrations faibles des mésons B et K sont supprimés dans le Modèle Standard. Cette suppression provient essentiellement de la structure chirale des opérateurs à quatre quarks issus de l'intégration du boson W . Dans le cas de l'anomalie de trace, une autre suppression est produite par les symétries discrètes CPS ou C .
2. Une attention particulière accordée à l'utilisation des équations du mouvement classiques dans la dérivation du théorème de Noether nous a permis d'obtenir les représentations non linéaires dominantes des opérateurs d'anomalie axiale et de trace de QCD en dehors de la limite chirale.
3. Des opérateurs $|\Delta S| = 1$ contenant ces représentations peuvent être générés par corrections du Lagrangien non linéaire à une interaction faible effective de type densité. Ce contraste entre évolutions à longue et à courte distance peut être imputé aux effets de brisure de la symétrie chirale. Le poids relatif entre anomalies axiale et d'échelle ainsi obtenu est par ailleurs qualitativement en accord avec celui issu de l'analyse à courte distance pour des interactions effectives à quatre quarks de même structure chirale, i.e., $(\bar{3}_L, 3_R)$ ou $(3_L, \bar{3}_R)$.
4. Les effets de l'anomalie de trace forte liés aux quarks légers sont susceptibles de dominer les contributions d'ordre p^4 dans le cadre de l'expansion chirale, et ce malgré leur suppression en $1/N_C$. Si tel était effectivement le cas, ils pourraient être de l'ordre de 15-20%.
5. Les rapports de branchement d'un certain nombre de désintégrations hadroniques et radiatives des kaons peuvent être reproduits au moyen de l'hypothèse de dominance des anomalies de trace de QCD et de QED . Il semblerait ainsi que celles-ci permettent de resommer les effets des boucles de hadrons correspondant aux boucles de quarks légers u , d et s en $q^2 = 0$. Une formulation plus précise de cette resommation, ainsi qu'une meilleure compréhension du cas axial, serait la bienvenue. Il serait également intéressant de savoir si une telle resommation est possible dans le cas de processus forts ou électromagnétiques (i.e., $\Delta S = 0$).

6. L'annulation de l'amplitude de désintégration $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ observée à l'ordre dominant en théorie de perturbations chirales $SU(3)_L \times SU(3)_R$ se produit à nouveau dans le cas $U(3)_L \times U(3)_R$ lorsque les paramètres du mélange $\eta_8\text{-}\eta_0$ sont éliminés au profit des paramètres du Lagrangien non linéaire au moyen de la généralisation de la relation de Gell-Mann-Okubo (1.116). La raison profonde de cette annulation doit cependant encore être éclaircie. Une nouvelle estimation du rapport de branchement $K_S^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$, incluant les effets du méson singulet η_0 , a par ailleurs été proposée dans ce cadre. Celle-ci s'est avérée sensiblement plus élevée que la prédiction standard.

Les effets anomaux 'mixtes', impliquant des échelles d'énergie différentes et/ou faisant intervenir à la fois des quarks lourds et légers, vaudraient bien entendu également la peine d'être analysés (et l'ont déjà été par exemple dans le cas du processus $B \rightarrow \eta' X_s$ [49]). Leur description nécessite cependant une approche différente de l'approche opératorielle adoptée ici.

Un autre aspect important de ce travail, sur lequel repose l'analyse à courte distance, concerne le propagateur d'un quark lourd plongé dans un champ de jauge (gluons et/ou photons) classique. L'expansion en la masse inverse de ce propagateur a été calculée jusqu'à l'ordre $1/M^2$.

1. Nous avons ainsi proposé une méthode simple permettant de générer de façon systématique les corrections de type pingouin à une interaction effective à quatre quarks arbitraire, sous l'hypothèse d'une saveur intermédiaire lourde.
2. Nous avons obtenu en particulier un ensemble original et consistant d'opérateurs de dimension huit décrivant les effets du quark charmé dans les désintégrations hadroniques et radiatives des kaons. Un impact non négligeable de ceux-ci dans les amplitudes $\Delta I = 1/2$ requiert cependant une violation importante de la factorisation.
3. Notre méthode s'est avérée également bien adaptée à l'estimation de la contribution d'une boucle de quark lourd à certains éléments de matrice de hadrons ou de photons à basse énergie. Nous avons ainsi proposé un calcul alternatif de la constante de désintégration $f_{\eta'}^{(c)}$ (ou plus précisément de sa partie anormale).
4. Toute interaction effective initiale comprenant un spineur intermédiaire lourd peut être traitée de façon semblable, comme nous l'avons vu explicitement dans le cas du couplage d'un boson de Higgs léger à une densité de quarks.

En conclusion, cette étude a permis une meilleure identification du rôle des anomalies fortes et électromagnétiques dans les désintégrations faibles des mésons (au niveau opératoire), ainsi qu'une meilleure compréhension des processus impliquant l'intégration d'une saveur virtuelle lourde.

Annexe A

Lois de conservation classiques et quantiques

A.1 Démonstration du théorème de Noether

Dans cette annexe, nous nous proposons de démontrer l'assertion suivante :

$$\delta S = 0 \iff \rho^a = 0, \quad (\text{A.1})$$

où δS désigne la variation de l'action classique sous les transformations infinitésimales

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu - i\alpha^a \tau^{\mu a} \\ \phi_k(x) \rightarrow \phi'_k(x') = \phi_k(x) + \delta\phi_k(x) \equiv \phi_k(x) - i\alpha^a \mathbb{T}_k^a, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

et les densités ρ^a sont définies par

$$\rho^a \equiv \partial_\mu j^{\mu a} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \right) i\Delta^a \phi_k \quad (\text{A.3})$$

avec

$$j^{\mu a} \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} i\Delta^a \phi_k + i\tau^{\mu a} \mathcal{L}, \quad \Delta^a \phi_k \equiv \mathbb{T}_k^a - \tau^{\mu a} \partial_\mu \phi_k. \quad (\text{A.4})$$

Notons que $\Delta^a \phi_k$ correspond à la variation de forme du champ ϕ_k (toutes les égalités doivent être comprises au premier ordre en α^a) :

$$\phi'_k(x) = \phi'_k(x' - \delta x) = \phi'_k(x') - \delta x^\mu \partial_\mu \phi'_k(x') = \phi_k(x) - i\alpha^a \Delta^a \phi_k(x). \quad (\text{A.5})$$

Considérons donc la variation de l'action S sous les transformations (A.2). Celle-ci peut être écrite comme la somme de deux termes :

$$\delta S \equiv \int_{D'} d^4 x' \mathcal{L}(\phi'_k(x'), \partial'_\mu \phi'_k(x')) - \int_D d^4 x \mathcal{L}(\phi_k(x), \partial_\mu \phi_k(x)) = \Delta_F + \Delta_A, \quad (\text{A.6})$$

correspondant aux variations de forme et d'argument des champs ϕ_k :

$$\Delta_F \equiv \int_D d^4 x \mathcal{L}(\phi'_k(x), \partial_\mu \phi'_k(x)) - \int_D d^4 x \mathcal{L}(\phi_k(x), \partial_\mu \phi_k(x)), \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta_A \equiv \int_{D'} d^4 x' \mathcal{L}(\phi'_k(x'), \partial'_\mu \phi'_k(x')) - \int_D d^4 x \mathcal{L}(\phi'_k(x), \partial_\mu \phi'_k(x)). \quad (\text{A.8})$$

Le développement de la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi'_k(x), \partial_\mu \phi'_k(x))$ autour de $\phi_k(x)$, $\partial_\mu \phi_k(x)$ au premier ordre en α^a dans Δ_F implique, à l'aide de l'équation (A.5) :

$$\Delta_F = -i\alpha^a \int_D d^4x \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \Delta^a \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \partial_\mu (\Delta^a \phi_k) \right], \quad (\text{A.9})$$

c.-à-d., après intégration par parties :

$$\Delta_F = -i\alpha^a \int_D d^4x \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \right) \Delta^a \phi_k + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \Delta^a \phi_k \right) \right]. \quad (\text{A.10})$$

D'autre part, un changement de variable dans le premier terme de Δ_A donne :

$$\int_{D'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'_k(x'), \partial'_\mu \phi'_k(x')) = \int_D d^4x \det \left[\frac{\partial x'}{\partial x} \right] \mathcal{L}(\phi'_k(x + \delta x), \partial_\mu \phi'_k(x + \delta x)). \quad (\text{A.11})$$

Le jacobien de la transformation s'écrit, au premier ordre en α^a :

$$\det \left[\frac{\partial x'}{\partial x} \right] = 1 + \partial_\mu (\delta x^\mu) = 1 - i\alpha^a \partial_\mu \tau^{\mu a}. \quad (\text{A.12})$$

Nous avons donc, à cet ordre :

$$\Delta_A = -i\alpha^a \int_D d^4x \left[\partial_\mu \tau^{\mu a} \mathcal{L}(\phi'_k(x), \partial_\mu \phi'_k(x)) + \tau^{\mu a} \partial_\mu \mathcal{L}(\phi'_k(x), \partial_\mu \phi'_k(x)) \right], \quad (\text{A.13})$$

ou encore :

$$\Delta_A = -i\alpha^a \int_D d^4x \partial_\mu (\tau^{\mu a} \mathcal{L}). \quad (\text{A.14})$$

Finalement, les équations (A.10) et (A.14) impliquent :

$$\begin{aligned} \delta S &= -i\alpha^a \int_D d^4x \left[\partial_\mu \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \Delta^a \phi_k + \tau^{\mu a} \mathcal{L} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} \right) \Delta^a \phi_k \right], \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

c.-à-d.

$$\delta S = -\alpha^a \int_D d^4x \rho^a. \quad (\text{A.16})$$

L'invariance de l'action S pour tout domaine D est donc bien une condition nécessaire et suffisante à l'annulation de la densité ρ^a . Dans le cas particulier où les champs ϕ_k satisfont les équations du mouvement classiques, ceci revient au théorème de Noether :

$$\partial_\mu j^{\mu a} \stackrel{edm}{=} 0. \quad (\text{A.17})$$

A.2 Démonstration des identités de Ward

Démontrons à présent les identités de Ward brisées (1.28) :

$$\begin{aligned} \partial_{x\mu} \langle j^{\mu a}(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \rangle &= \langle \rho^a(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^m \delta^{(4)}(x - x_i) \langle \phi(x_1) \dots \Delta^a \phi(x_i) \dots \phi(x_m) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

où nous avons considéré un seul type de champ ϕ pour simplifier.

Nous aurons besoin de la généralisation de l'équation (A.16) au cas de symétries locales :

$$\delta S = - \int_D d^4x \left(\partial_\mu \alpha^a(x) j^{\mu a} + \alpha^a(x) \rho^a \right). \quad (\text{A.19})$$

Celle-ci s'obtient par des manipulations analogues à celles de la section précédente. Les contributions à δS provenant des variations de forme et d'argument du champ ϕ sont cette fois données par :

$$\Delta_F = -i \int_D d^4x \left[\alpha^a(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \Delta^a \phi + \partial_\mu \left(\alpha^a(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta^a \phi \right) \right], \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta_A = -i \int_D d^4x \partial_\mu (\alpha^a(x) \tau^{\mu a} \mathcal{L}), \quad (\text{A.21})$$

ce qui mène directement à l'identité (A.19).

Effectuons le changement de variable $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) - i\alpha^a(x) \Delta^a \phi(x)$ dans l'expression (1.23) de la fonction de corrélation $\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \rangle$, en supposant l'invariance de la mesure d'intégration fonctionnelle, i.e., $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi'$:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_m) e^{iS} &= \int \mathcal{D}\phi' [\phi'(x_1) + i\alpha^a(x_1) \Delta^a \phi(x_1)] \dots \\ &\dots [\phi'(x_m) + i\alpha^a(x_m) \Delta^a \phi(x_m)] e^{iS}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Le facteur de normalisation ainsi que la limite $T \rightarrow \infty(1 - i\varepsilon)$ sont sous-entendus. La variable d'intégration de la fonction de corrélation du membre de gauche peut être renommée ϕ' . Nous obtenons ainsi, à l'aide de l'identité (A.19) :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi' \phi'(x_1) \dots \phi'(x_m) e^{iS'} &= \int \mathcal{D}\phi' [\phi'(x_1) + i\alpha^a(x_1) \Delta^a \phi(x_1)] \dots \\ &\dots [\phi'(x_m) + i\alpha^a(x_m) \Delta^a \phi(x_m)] e^{iS'} e^{i \int d^4x (\partial_\mu \alpha^a(x) j^{\mu a} + \alpha^a(x) \rho^a)}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Le développement de cette équation au premier ordre en α^a donne, après une intégration par parties (le terme intégré s'annule pour $\alpha^a(x) = 0$ à l'infini) :

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \alpha^a(x) \sum_{i=1}^m \delta^{(4)}(x - x_i) \int \mathcal{D}\phi' \phi'(x_1) \dots \Delta^a \phi'(x_i) \dots \phi'(x_m) e^{iS'} \\ &- \int d^4x \alpha^a(x) \int \mathcal{D}\phi' \partial_\mu j^{\mu a}(x) \phi'(x_1) \dots \phi'(x_m) e^{iS'} \\ &+ \int d^4x \alpha^a(x) \int \mathcal{D}\phi' \rho^a(x) \phi'(x_1) \dots \phi'(x_m) e^{iS'}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Le paramètre $\alpha^a(x)$ étant arbitraire (excepté à l'infini), ceci démontre la relation recherchée.

Annexe B

Le propagateur en champs externes d'un quark lourd

Cette annexe est consacrée à la démonstration des équations (2.13) et (2.14).

Commençons par exprimer le propagateur d'un quark lourd plongé dans un champ de gluons classique $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\not{P} - M} \right)_{xy} &= (i \not{\partial} + g_s \not{A} - M)_{xy}^{-1} \\ &= \int d^4 z (i \not{\partial} - M)_{xz}^{-1} \left(1 + g_s \not{A} (i \not{\partial} - M)^{-1} \right)_{zy}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Un développement en série de perturbations en g_s donne :

$$\left(1 + g_s \not{A} (i \not{\partial} - M)^{-1} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-g_s \not{A}) \frac{1}{i \not{\partial} - M} \right)^n. \quad (\text{B.2})$$

Le propagateur ci-dessus peut donc être réécrit : $(\not{P} - M)_{xy}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$ avec

$$T_n = \int d^4 z \left(\frac{1}{i \not{\partial} - M} \right)_{xz} \left((-g_s \not{A}) \frac{1}{i \not{\partial} - M} \right)_{zy}^n \quad (\text{B.3})$$

ou, après un ensemble de transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} T_n &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4 k_n}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - M} \left(-g_s \widehat{A}(k_1) \right) \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - M} \cdots \\ &\quad \cdots \left(-g_s \widehat{A}(k_n) \right) \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \cdots - \not{k}_n - M} e^{-ip(x-y)} e^{-i(k_1 + \cdots + k_n)y}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Nous effectuons à présent une série de translations :

$$\frac{1}{\not{p} - \not{k} - M} = e^{-k\partial p} \frac{1}{\not{p} - M} e^{k\partial p}, \quad (\text{B.5})$$

où $k\partial p \equiv k^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu}$. Le terme générique T_n devient :

$$T_n = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - M} \prod_{j=1}^n \left[\int \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \left(-g_s \widehat{A}(k_j) \right) e^{-k_j \partial p} e^{-ik_j y} \frac{1}{\not{p} - M} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Les intégrales sur k_j sont données par :

$$\int \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \left(-g_s \widehat{A}(k_j) \right) e^{-k_j \partial p} e^{-i k_j y} = e^{-i \partial p \partial y} (-g_s \mathcal{A}(y)) = -g_s \mathcal{A}(y - i \partial p) \quad (\text{B.7})$$

avec $\partial p \partial y \equiv \frac{\partial}{p^\mu} \frac{\partial}{y^\mu}$. La dérivée par rapport à y n'agit que sur le champ de gluons qui suit immédiatement. Nous obtenons ainsi :

$$T_n = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - M} \left[-g_s \mathcal{A}(y - i \partial p) \frac{1}{\not{p} - M} \right]^n. \quad (\text{B.8})$$

Resommant la série, nous arrivons à l'expression formelle :

$$\left(\frac{1}{\not{P} - M} \right)_{xy} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p} - M + g_s \mathcal{A}(y - i \partial p)}. \quad (\text{B.9})$$

Pour $y = x$, ceci donne successivement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\not{P} - M} \right)_{xx} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} + g_s \mathcal{A}(x - i \partial p) - M} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i \partial p \partial x} \frac{1}{\not{p} + g_s \mathcal{A}(x) - M} e^{i \partial p \partial x} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - i \not{\partial} + g_s \mathcal{A}(x) - M} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} + \not{P}_x - M}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

ce qui permet d'obtenir la série alternative (2.13) : $(\not{P} - M)_{xx}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ avec

$$S_n = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - M} \left[(-\not{P}) \frac{1}{\not{p} - M} \right]^n. \quad (\text{B.11})$$

Annexe C

Base d'opérateurs $\Delta S = 1$ de dimension huit

Dans cette annexe, nous consignons pour information une généralisation de l'ensemble (2.38) au-delà de l'approximation à une boucle :

$$Q_1^{(8)} = i\bar{d}_L [D^\alpha G_{\mu\alpha}, G^{\mu\nu}] \gamma_\nu s_L$$

$$Q_2^{(8)} = i\bar{d}_L [G_{\mu\alpha}, D^\alpha G^{\mu\nu}] \gamma_\nu s_L$$

$$Q_3^{(8)} = \bar{d}_L \left\{ D^\alpha G_{\mu\alpha}, \tilde{G}^{\mu\nu} \right\} \gamma_\nu s_L$$

$$Q_4^{(8)} = \bar{d}_L \left\{ G_{\mu\alpha}, D^\alpha \tilde{G}^{\mu\nu} \right\} \gamma_\nu s_L$$

$$Q_5^{(8)} = \bar{d}_L D^\alpha D_\alpha D^\nu G_{\mu\nu} \gamma^\mu s_L$$

$$Q_6^{(8)} = \bar{d}_L \{ \mathcal{P}, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \} s_L$$

$$Q_7^{(8)} = \bar{d}_L (P^\alpha G_{\mu\alpha} G^{\mu\nu} + G^{\mu\nu} G_{\mu\alpha} P^\alpha) \gamma_\nu s_L$$

$$Q_8^{(8)} = i\bar{d}_L \left[\mathcal{P}, G_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} \right] s_L$$

$$Q_9^{(8)} = i\bar{d}_L (P^\alpha G_{\mu\alpha} \tilde{G}^{\mu\nu} - \tilde{G}^{\mu\nu} G_{\mu\alpha} P^\alpha) \gamma_\nu s_L$$

$$Q_{10}^{(8)} = i\bar{d}_L (P^\alpha G^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\alpha} - \tilde{G}_{\mu\alpha} G^{\mu\nu} P^\alpha) \gamma_\nu s_L$$

$$Q_{11}^{(8)} = \bar{d}_L P^\alpha D^\mu G_{\mu\nu} P_\alpha \gamma^\nu s_L$$

$$Q_{12}^{(8)} = \bar{d}_L (P^\alpha D_\alpha G_{\mu\nu} P^\mu + P^\mu D_\alpha G_{\mu\nu} P^\alpha) \gamma^\nu s_L$$

$$Q_{13}^{(8)} = \bar{d}_L (P^\alpha D^\mu G_{\mu\alpha} P_\nu + P_\nu D^\mu G_{\mu\alpha} P^\alpha) \gamma^\nu s_L$$

$$\begin{aligned}
 Q_{14}^{(8)} &= \bar{d}_L \left\{ P^\alpha, \left\{ P_\alpha, \left\{ P^\mu, \tilde{G}_{\mu\nu} \right\} \right\} \right\} \gamma^\nu s_L \\
 Q_{15}^{(8)} &= i\bar{d}_L (P^\alpha D_\alpha \tilde{G}_{\mu\nu} P^\mu - P^\mu D_\alpha \tilde{G}_{\mu\nu} P^\alpha) \gamma^\nu s_L \\
 Q_{16}^{(8)} &= i\bar{d}_L (P_\alpha G_{\mu\beta} G_\gamma^\mu - G_\gamma^\mu G_{\mu\beta} P_\alpha) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_\delta s_L \\
 Q_{17}^{(8)} &= i\bar{d}_L P_\alpha D^\mu G_{\mu\beta} P_\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_\delta s_L
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Ces 17 opérateurs sont obtenus en imposant l'invariance sous transformations de Lorentz et sous *CPS* aux différentes contractions possibles du terme générique invariant de jauge :

$$\bar{d}_L P_{\mu_1} P_{\mu_2} P_{\mu_3} P_{\mu_4} P_{\mu_5} \gamma^\nu s_L, \tag{C.2}$$

issu (par exemple) de l'intégration du quark charmé dans une interaction effective à quatre quarks du type $(\bar{d}_L \Gamma^A c)(\bar{c} \Gamma^B s_L)$. Les symboles $\Gamma^{A,B}$ désignent comme précédemment des produits de matrices de Dirac. La présence d'une seule matrice γ^ν est liée aux décompositions (2.22) et aux chiralités des spineurs extérieurs. Les identités de Bianchi

$$D_\alpha G_{\mu\nu} + D_\nu G_{\alpha\mu} + D_\mu G_{\nu\alpha} = 0, \tag{C.3}$$

ainsi que l'identité dérivée $D_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0$, ont par ailleurs été utilisées.

La base ci-dessus a été choisie de façon à ce que les dérivées impliquées agissent sur un seul champ de quarks ou de gluons (éventuellement à une dérivée totale près). L'opérateur $\bar{d}_L G_{\mu\nu} P G^{\mu\nu} s_L$, par exemple, n'a pas été retenu comme vecteur de base.

Dans l'approximation à une boucle, seuls les opérateurs exempts de dérivées sur les spineurs extérieurs survivent étant donné le rôle central joué par le propagateur en champs externes du quark lourd. L'ensemble réduit (2.38) est ainsi retrouvé.

Annexe D

Le Modèle Sigma Non Linéaire à une boucle

Considérons les corrections à une boucle, à l'ordre p^4 , au Lagrangien non linéaire (1.90). Nous n'allons toutefois qu'esquisser les étapes importantes de leur dérivation. Pour plus de détails, nous renvoyons à l'un des nombreux articles sur le sujet [20]. La matrice \mathbf{m} sera notée $\widetilde{\mathbf{m}}$ afin de faire le lien avec l'analyse du chapitre 3.

Commençons par introduire un champ classique \overline{U} dans le Lagrangien \mathcal{L}'_{NL} au moyen de la substitution :

$$U \rightarrow U \overline{U}. \quad (\text{D.1})$$

L'action effective Γ s'exprime en termes du Lagrangien \mathcal{L}'_{NL} ainsi obtenu de la manière suivante :

$$\Gamma [\overline{U}] = \left(k \int \mathcal{D}\varphi^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}'_{NL}} \right)_{1PI, \text{ connecté}} \quad (\text{D.2})$$

où k est un facteur de normalisation et les champs pseudoscalaires φ^a sont ceux associés à l'exponentielle U . A une boucle, seuls les termes quadratiques dans les champs quantiques φ^a contribuent à l'équation ci-dessus. L'action effective correspondante s'écrit ainsi :

$$\Delta\Gamma [\overline{U}]^{(1)} = -i \ln \left(k \int \mathcal{D}\varphi^a e^{iS_\varphi} \right) \quad (\text{D.3})$$

où la forme quadratique S_φ est donnée par

$$S_\varphi = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \varphi^a \left(d_\mu^{ac} d^{\mu,cb} + \sigma^{ab} \right) \varphi^b \right\} \quad (\text{D.4})$$

avec

$$d_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - \frac{1}{4} \text{Tr} \left([\lambda^a, \lambda^b] \overline{U} \partial_\mu \overline{U}^\dagger \right) \quad (\text{D.5})$$

et

$$\begin{aligned} \sigma^{ab} &= \frac{1}{8} \text{Tr} \left(\{ \lambda^a, \lambda^b \} r \left(\widetilde{\mathbf{m}} \overline{U}^\dagger + \overline{U} \widetilde{\mathbf{m}}^\dagger \right) \right) \\ &+ \frac{1}{8} \text{Tr} \left(\left[\lambda^a, \overline{U} \partial_\mu \overline{U}^\dagger \right] \left[\lambda^b, \overline{U} \partial_\mu \overline{U}^\dagger \right] \right) + m_0^2 \delta^{a0} \delta^{b0}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

L'intégrale (D.3), de type gaussien, est égale au rapport de déterminants fonctionnels suivant (fixant ainsi le facteur de normalisation k) :

$$\Delta\Gamma [\overline{U}]^{(1)} = -i \ln \left(\sqrt{\det(\partial^\mu \partial_\mu)} / \sqrt{\det(d^\mu d_\mu + \sigma)} \right), \quad (\text{D.7})$$

ou encore, à l'aide de la relation bien connue $\det \mathbf{A} = \exp \text{tr} \ln \mathbf{A}$:

$$\Delta \Gamma [\overline{U}]^{(1)} = \frac{i}{2} \int d^4x \text{Tr} \langle x | \ln (d^\mu d_\mu + \sigma) - \ln (\partial^\mu \partial_\mu) | x \rangle. \quad (\text{D.8})$$

Le premier terme de l'élément de matrice ci-dessus, régularisé par coupures, est explicité à l'aide de la méthode des noyaux de chaleur :

$$\begin{aligned} \langle x | \ln (d^\mu d_\mu + \sigma) | x \rangle |_{\Lambda, \varepsilon} &= - \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \frac{i e^{-\varepsilon^2 \tau}}{(4\pi)^2 \tau^2} (a_0(x) + a_1(x)\tau + a_2(x)\tau^2 + \dots) \\ &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \left(\frac{\Lambda^4}{2} a_0(x) + \Lambda^2 a_1(x) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2} \right) a_2(x) \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

où Λ et ε désignent les coupures ultraviolette et infrarouge, respectivement, et les coefficients de Seeley-DeWitt a_i sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_0^{ab}(x) &= \delta^{ab}, & a_1^{ab}(x) &= -\sigma^{ab}, \\ a_2^{ab}(x) &= \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{12} [d_\mu, d_\nu] [d^\mu, d^\nu] + \frac{1}{6} [d_\mu, [d^\mu, \sigma]] \right)^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Les coefficients d'ordre supérieur n'ont pas été pris en compte car leur contribution est d'ordre p^6 . Le second terme de l'élément de matrice (D.8) est égal à la partie proportionnelle à a_0 du premier terme. En conséquence, les divergences Λ^4 s'annulent et il nous reste :

$$\Delta \Gamma [\overline{U}]_{p^4}^{(1)} = \int d^4x \frac{1}{2(4\pi)^2} \left\{ \Lambda^2 \text{Tr} (a_1) + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\varepsilon^2} \right) \text{Tr} (a_2) \right\}. \quad (\text{D.11})$$

L'évolution à une boucle, à l'ordre p^4 , de l'opérateur densité (3.7) s'obtient immédiatement par extraction de la partie d'ordre G_D des coefficients a_1 et a_2 ci-dessus. Seuls $\text{Tr}(\sigma)$ et $\text{Tr}(\sigma^2/2)$ contribuent. Les identités suivantes s'avèrent utiles :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda^a A) \text{Tr}(\lambda^a B) &= -\frac{2}{3} \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) + 2 \text{Tr}(AB), \\ \text{Tr}(\{\lambda^a, \lambda^b\} A) \text{Tr}(\{\lambda^a, \lambda^b\} B) &= \frac{88}{9} \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) + \frac{40}{3} \text{Tr}(AB), \\ \text{Tr}(\{\lambda^a, \lambda^b\} A) \text{Tr}([\lambda^a, B] [\lambda^b, B]) &= 16 \text{Tr}(AB) \text{Tr}(B) - 24 \text{Tr}(AB^2) \\ &\quad - 8 \text{Tr}(A) \text{Tr}(B^2), \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

pour des matrices A et B 3×3 arbitraires et $a = 1, \dots, 8$.

Annexe E

Formules utiles

E.1 Les matrices de Gell-Mann et de Pauli

Les générateurs infinitésimaux de $SU(N)$ satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c. \quad (\text{E.1})$$

Dans la représentation fondamentale, leur normalisation est fixée par la relation :

$$\{t^a, t^b\} = \frac{1}{N}\delta^{ab}1_{N \times N} + d^{abc}t^c. \quad (\text{E.2})$$

Les constantes de structure f^{abc} ainsi que les coefficients d^{abc} sont définis par les équations ci-dessus. La combinaison des relations (E.1) et (E.2) implique, pour les générateurs infinitésimaux de la représentation fondamentale :

$$t^a t^b = \frac{1}{2N}\delta^{ab}1_{N \times N} + \frac{1}{2}d^{abc}t^c + \frac{i}{2}f^{abc}t^c. \quad (\text{E.3})$$

Notons encore l'identité :

$$(t^a)_{ij} (t^a)_{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl} \right). \quad (\text{E.4})$$

Dans le cas $N = 3$, les matrices de Gell-Mann peuvent être choisies comme générateurs : $t^a = \frac{\lambda^a}{2}$. Ces matrices sont au nombre de huit :

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Les matrices de Pauli correspondent au cas $N = 2$. Elles sont au nombre de trois :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

E.2 Les matrices de Dirac

Nous n'allons pas revoir ici toutes les identités impliquant les matrices de Dirac. Nous renvoyons pour cela par exemple à la référence [10]. Notons simplement la décomposition suivante des produits $\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m}$ sur la base de Clifford ($\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$) [56] :

$$\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m} = a_{\mu_1 \dots \mu_m} 1 + a_{\mu_1 \dots \mu_m}^\beta \gamma_\beta + a_{\mu_1 \dots \mu_m}^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + a_{5\mu_1 \dots \mu_m}^\beta \gamma_\beta \gamma_5 + a_{5\mu_1 \dots \mu_m} \gamma_5 \quad (\text{E.7})$$

avec

$$\begin{aligned} a_{\mu_1 \dots \mu_m} &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m}), & a_{5\mu_1 \dots \mu_m} &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m} \gamma_5), \\ a_{\mu_1 \dots \mu_m}^\beta &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m} \gamma^\beta), & a_{5\mu_1 \dots \mu_m}^\beta &= -\frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m} \gamma^\beta \gamma_5), \\ a_{\mu_1 \dots \mu_m}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8} \text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m} \sigma^{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Cas particuliers :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} &= \eta_{\mu_1 \mu_2} - i \sigma_{\mu_1 \mu_2}, \\ \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} &= \eta_{\mu_1 \mu_2} \gamma_{\mu_3} - \eta_{\mu_1 \mu_3} \gamma_{\mu_2} + \eta_{\mu_2 \mu_3} \gamma_{\mu_1} + i \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma^\beta \gamma_5, \\ \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} &= \eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} - \eta_{\mu_1 \mu_3} \eta_{\mu_2 \mu_4} + \eta_{\mu_1 \mu_4} \eta_{\mu_2 \mu_3} - i \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma_5 \\ &\quad + i(\eta_{\mu_1 \mu_2} \sigma_{\mu_4 \mu_3} + \eta_{\mu_1 \mu_3} \sigma_{\mu_2 \mu_4} + \eta_{\mu_1 \mu_4} \sigma_{\mu_3 \mu_2} \\ &\quad + \eta_{\mu_2 \mu_3} \sigma_{\mu_4 \mu_1} + \eta_{\mu_2 \mu_4} \sigma_{\mu_1 \mu_3} + \eta_{\mu_3 \mu_4} \sigma_{\mu_2 \mu_1}). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Notons également les identités de Fierz suivantes [85] :

$$\begin{aligned} (\bar{q}_1 \gamma_\mu q_2)(\bar{q}_3 \gamma^\mu q_4) &= -(\bar{q}_1 q_4)(\bar{q}_3 q_2) + \frac{1}{2}(\bar{q}_1 \gamma_\mu q_4)(\bar{q}_3 \gamma^\mu q_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\bar{q}_1 \gamma_\mu \gamma_5 q_4)(\bar{q}_3 \gamma^\mu \gamma_5 q_2) + (\bar{q}_1 \gamma_5 q_4)(\bar{q}_3 \gamma_5 q_2), \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} (\bar{q}_1 q_2)(\bar{q}_3 q_4) &= -\frac{1}{4}(\bar{q}_1 q_4)(\bar{q}_3 q_2) - \frac{1}{4}(\bar{q}_1 \gamma_\mu q_4)(\bar{q}_3 \gamma^\mu q_2) + \frac{1}{8}(\bar{q}_1 \sigma_{\mu\nu} q_4)(\bar{q}_3 \sigma^{\mu\nu} q_2) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{q}_1 \gamma_\mu \gamma_5 q_4)(\bar{q}_3 \gamma^\mu \gamma_5 q_2) - \frac{1}{4}(\bar{q}_1 \gamma_5 q_4)(\bar{q}_3 \gamma_5 q_2). \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Celles-ci tiennent compte du caractère anticommutatif des champs fermioniques.

E.3 Intégration sur les moments

Passage dans l'Euclidien lors d'une régularisation par coupure :

$$\begin{aligned} x^0 &= ix_E^4 & p_0 &= -ip_4^E & A_0(x) &= -iA_4^E(x_E) & \gamma^0 &= i\gamma_E^4 \\ x^j &= x_E^j & p_j &= p_j^E & A_j(x) &= A_j^E(x_E) & \gamma^j &= \gamma_E^j \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Intégration en d dimensions, pour n pair :

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\mu^\varepsilon}{(q^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2 - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\mu^\varepsilon}{(m^2)^{\alpha - n/2 - d/2}} \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{\text{permut}} (\eta^{\mu_1 \mu_2} \dots \eta^{\mu_{n-1} \mu_n} + \dots) \quad (\text{E.13})$$

E.4 Intégration sur les paramètres de Feynman

Notons ici les intégrales sur les paramètres de Feynman rencontrées lors du calcul des trois types de boucles suivants, pour des processus radiatifs : les boucles de particules scalaires ou pseudoscalaires avec un facteur de forme constant (F_φ , cf. fig.29), les boucles de fermions avec un facteur de forme scalaire 1 (F_ψ , liées à l'anomalie de trace, cf. fig.30) et les boucles de fermions avec un facteur de forme pseudoscalaire γ_5 (F_{ψ_5} , liées à l'anomalie axiale, cf. fig.31) :

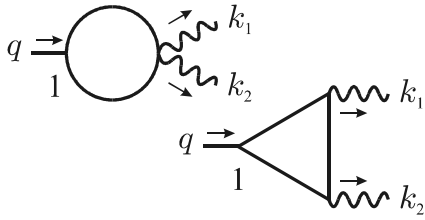


Fig.29

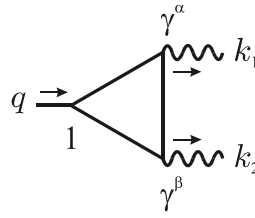


Fig.30

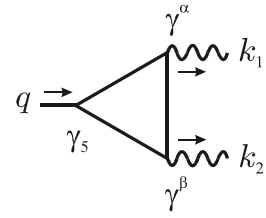


Fig.31

$$\begin{aligned}
 F_\varphi(A) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-8xy}{1/A - 4xy} \\
 &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{A} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{1/A-1}} \right)^2 & \text{pour } A < 1 \\ 1 + \frac{1}{4A} \left(\ln \frac{1-\sqrt{1-1/A}}{1+\sqrt{1-1/A}} + i\pi \right)^2 & \text{pour } A > 1 \end{cases} \quad (\text{E.14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_\psi(A) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2(1-4xy)}{1/A - 4xy} \\
 &= \begin{cases} 1 + (1 - \frac{1}{A}) \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{1/A-1}} \right)^2 & \text{pour } A < 1 \\ 1 - \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{A}) \left(\ln \frac{1-\sqrt{1-1/A}}{1+\sqrt{1-1/A}} + i\pi \right)^2 & \text{pour } A > 1 \end{cases} \quad (\text{E.15})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\psi_5}(A) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2}{1/A - 4xy} \\
 &= \begin{cases} \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{1/A-1}} \right)^2 & \text{pour } A < 1 \\ -\frac{1}{4} \left(\ln \frac{1-\sqrt{1-1/A}}{1+\sqrt{1-1/A}} + i\pi \right)^2 & \text{pour } A > 1 \end{cases} \quad (\text{E.16})
 \end{aligned}$$

Le moment incident q et la variable A sont liés par : $A = q^2/4m^2$, où m désigne la masse de la particule virtuelle. Les continuations analytiques ont été définies par le plan complexe supérieur.

E.5 Largeurs de désintégration

Le taux de désintégration différentiel d'une particule de masse M , au repos, en n corps de masses m_i et d'impulsions $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ est donné par

$$d^{3n}\Gamma = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}|^2 d^{3n}\Phi_n, \quad (\text{E.17})$$

où \mathcal{M} désigne l'amplitude de Feynman associée au processus tandis que l'élément d'espace de phase à n corps $d^{3n}\Phi_n$ est défini par

$$d^{3n}\Phi_n = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (\text{E.18})$$

avec $P \equiv (M, 0)$.

Espace de phase à deux corps

Dans le cas d'une désintégration en deux corps, le facteur d'espace de phase devient, après intégration sur \mathbf{p}_2 puis sur $|\mathbf{p}_1|$ au moyen de la fonction delta :

$$d^2\Phi_2 = \frac{1}{32\pi^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{M}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{M}\right)^2} d\Omega_1, \quad (\text{E.19})$$

avec $d\Omega_1$, l'élément d'angle solide de la particule 1.

Pour des particules de spin nul, ou après moyenne sur les spins initiaux et somme sur les spins finaux, l'intégration sur les angles donne simplement un facteur constant 4π . Par conséquent :

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \overline{|\mathcal{M}|^2} \Phi_2, \quad (\text{E.20})$$

avec

$$\Phi_2 = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{M}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{M}\right)^2}. \quad (\text{E.21})$$

Espace de phase à trois corps

Dans le cas d'une désintégration en trois corps, le facteur d'espace de phase s'écrit, après intégration sur quatre des neuf degrés de liberté initiaux au moyen de la fonction delta :

$$d^5\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^5} dE_1 dE_2 d\alpha d(\cos\beta) d\gamma. \quad (\text{E.22})$$

Les angles α, β et γ spécifient les orientations des moments finaux pour $E_{1,2}$ fixés.

Dans le cas de particules scalaires, ou lorsque l'on considère un taux de désintégration non polarisé, l'intégration sur les angles résulte en un facteur constant $8\pi^2$ et la largeur différentielle devient :

$$d^2\Gamma = \frac{1}{2M} \overline{|\mathcal{M}|^2} d^2\Phi_3, \quad (\text{E.23})$$

avec

$$d^2\Phi_3 = \frac{1}{4(2\pi)^3} dE_1 dE_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{16M^2} dm_{12}^2 dm_{23}^2, \quad m_{ij}^2 \equiv (p_i + p_j)^2. \quad (\text{E.24})$$

Pour m_{12}^2 fixé, les bornes d'intégration sur m_{23}^2 sont données par :

$$\begin{cases} (m_{23}^2)_{\min} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} + \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2 \\ (m_{23}^2)_{\max} = (E_2^* + E_3^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} - \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2, \end{cases} \quad (\text{E.25})$$

avec $E_2^* \equiv (m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)/2m_{12}$ et $E_3^* \equiv (M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)/2m_{12}$.

Bibliographie

- [1] J. Steinberger. On the use of subtraction fields and the lifetimes of some types of meson decay. *Phys.Rev.***76**, 1180 (1949).
- [2] D.G. Sutherland. Current algebra and some nonstrong mesonic decays. *Nucl.Phys.B***2**, 433 (1967).
- [3] M. Veltman. Theoretical aspects of high energy neutrino interactions. *Proc.Roy.Soc.A***301**, 107 (1967).
- [4] S.L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys.Rev.***177**, 2426 (1969).
- [5] J.S. Bell et R. Jackiw. A PCAC puzzle : $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model. *Nuov.Cim.***A60**, 47 (1969).
- [6] R.A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory*. Oxford University Press (1996).
- [7] Pour une revue de ces deux types d'anomalies, voir par exemple : S.L. Adler. Anomalies to all orders. hep-th/0405040 (2004).
- [8] Les premiers travaux concernant l'anomalie de trace (en *QED* ou ailleurs) sont les suivants : S. Coleman et R. Jackiw. Why dilatation generators do not generate dilatations? *Ann.Phys.***67**, 552 (1971) ; M.S. Chanowitz et J. Ellis. Canonical trace anomalies. *Phys.Rev.D***7**, 2490 (1973) ; S.L. Adler, J.C. Collins et A. Duncan. Energy-momentum tensor trace anomaly in spin 1/2 quantum electrodynamics. *Phys.Rev.D***15**, 1712 (1977) ; N.K. Nielsen. The energy momentum tensor in a nonabelian quark gluon theory. *Nucl.Phys.B***120**, 212 (1977) ; J.C. Collins, A. Duncan et S.D. Joglekar. Trace and dilatation anomalies in gauge theories. *Phys.Rev.D***16**, 438 (1977).
- [9] J.-M. Gérard et J. Weyers. Trace anomalies and the $\Delta I = 1/2$ rule. *Phys.Lett.B***503**, 99 (2001).
- [10] M.E. Peskin et D.V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley (1996).
- [11] C.G. Callan, S. Coleman et R. Jackiw. A new improved energy-momentum tensor. *Ann.Phys.***59**, 42 (1970). Voir également : V.M. Braun, G.P. Korchemsky et D. Müller. The uses of conformal symmetry in QCD. *Prog.Part.Nucl.Phys.***51**, 311 (2003).
- [12] Voir par exemple : S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, vol.3*. Cambridge University Press (2000) ; *Gravitation and Cosmology*. Wiley (1972).
- [13] J.G. Esteve. Anomalies in conservation laws in the Hamiltonian formalism. *Phys.Rev.D***34**, 674 (1986) ; Origin of the anomalies : the modified Heisenberg equation. *Phys.Rev.D***66**, 125013 (2002).

- [14] Voir par exemple : B.A. Kniehl. Dispersion relations in loop calculations. *Act.Phys.Pol.B***27**, 3631 (1996).
- [15] A.D. Dolgov et V.I. Zakharov. On conservation of the axial current in massless electrodynamics. *Nucl.Phys.B***27**, 525 (1971); J. Horejsi. Dispersive derivation of the triangle anomaly. *Phys.Rev.D***32**, 1029 (1985); J. Horejsi et M. Schnabl. Dispersive derivation of the trace anomaly. *Z.Phys.C***76**, 561 (1997).
- [16] N. Kawka, O. Teryaev et O. Veretin. Dispersive approach to the trace anomaly. hep-ph/9702228 (1997); M. Schnabl. Some aspects of trace anomaly. hep-ph/9809534 (1998).
- [17] K. Fujikawa. Path integral measure for gauge invariant fermion theories. *Phys.Rev.Lett.***42**, 1195 (1979); Path integral for gauge theories with fermions. *Phys.Rev.D***21**, 2848 (1980); Erratum-ibid.*D***22**, 1499 (1980). Le cas de l'anomalie d'échelle est traité dans : K. Fujikawa. Energy momentum tensor in quantum field theory. *Phys.Rev.D***23**, 2262 (1980).
- [18] S.L. Adler et W.A. Bardeen. Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation. *Phys.Rev.***182**, 1517 (1969).
- [19] W.A. Bardeen. Anomalous Ward identities in spinor field theories. *Phys.Rev.***184**, 1848 (1969).
- [20] Voir par exemple : J.F. Donoghue, E. Golowich et B.R. Holstein. *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge University Press (1992).
- [21] Particle Data Group, S. Eidelman *et al.* Review of Particle Physics. *Phys.Lett.B***592**, 1 (2004).
- [22] E. Witten. Current algebra theorems for the $U(1)$ 'Goldstone boson'. *Nucl.Phys.B***156**, 269 (1979).
- [23] J. Gasser et H. Leutwyler. Chiral perturbation theory to one loop. *Ann.Phys.***158**, 142 (1984); Chiral perturbation theory : expansions in the mass of the strange quark. *Nucl.Phys.B***250**, 465 (1985).
- [24] Pour une revue de *ChPT*, voir par exemple : G. Ecker. Chiral perturbation theory. *Prog.Part.Nucl.Phys.***35**, 1 (1995); A. Pich. Effective field theory. Proc. *Les Houches 1997, Probing the Standard Model of particle interactions 2*, 949 (1997).
- [25] Pour une revue de *ChPT* dans la limite de grand N_C , voir par exemple : R. Kaiser et H. Leutwyler. Large N_C in chiral perturbation theory. *Eur.Phys.J.C***17**, 623 (2000).
- [26] Voir par exemple : J.-M. Gérard. Electroweak interactions of hadrons. *Act.Phys.Pol.B***21**, 257 (1990).
- [27] R.F. Dashen. Chiral $SU(3) \times SU(3)$ as a symmetry of the strong interactions. *Phys.Rev.***183**, 1245 (1969).
- [28] M. Voloshin et V. Zakharov. Measuring quantum-chromodynamic anomalies in hadronic transitions between quarkonium states. *Phys.Rev.Lett.***45**, 688 (1980).
- [29] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein et V.I. Zakharov. A theory of the $J/\psi \rightarrow \eta(\eta')\gamma$ decays. *Nucl.Phys.B***165**, 55 (1980).
- [30] H. Georgi. A bound on $m_\eta/m_{\eta'}$ for large N_C . *Phys.Rev.D***49**, 1666 (1994).
- [31] S. Peris. Higher order corrections to the large N_C bound on $m_\eta/m_{\eta'}$. *Phys.Lett.B***324**, 442 (1994).

-
- [32] P. Herrera-Siklody, J.I. Latorre, P. Pascual et J. Taron. η - η' mixing from $U(3)_L \times U(3)_R$ chiral perturbation theory. *Phys.Lett.B***419**, 326 (1998).
- [33] S. Weinberg. The $U(1)$ problem. *Phys.Rev.D***11**, 3583 (1975).
- [34] J.F. Donoghue, B.R. Holstein et Y.-C.R. Lin. Chiral loops in $\pi^0, \eta^0 \rightarrow \gamma\gamma$ and η - η' mixing. *Phys.Rev.Lett.***55**, 2766 (1985).
- [35] Pour une revue, voir par exemple : T. Feldmann. Quark structure of pseudoscalar mesons. *Int.J.Mod.Phys.A***15**, 159 (2000).
- [36] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein et V.I. Zakharov. Remarks on higgs-boson interactions with nucleons. *Phys.Lett.B***78**, 443 (1978).
- [37] H.-Y. Cheng. Low-energy interactions of scalar and pseudoscalar higgs bosons with baryons. *Phys.Lett.B***219**, 347 (1989).
- [38] H.Y. Cheng. Status of the proton spin problem. *Int.J.Mod.Phys.A***11**, 5109 (1996).
- [39] J. Wess et B. Zumino. Consequences of anomalous Ward identities. *Phys.Lett.B***37**, 95 (1971) ; E. Witten. Global aspects of current algebra. *Nucl.Phys.B***223**, 422 (1983).
- [40] M.S. Chanowitz et J. Ellis. Canonical trace anomalies. *Phys.Rev.D***7**, 2490 (1973).
- [41] Pour une revue, voir par exemple : Particle Data Group, S. Eidelman *et al.* Note on scalar mesons. *Phys.Lett.B***592**, 1 (2004).
- [42] J. Ellis, M.K. Gaillard et D.V. Nanopoulos. A phenomenological profile of the Higgs boson. *Nucl.Phys.B***106**, 292 (1976).
- [43] M.B. Voloshin. The trace anomaly in QCD and processes involving a light Higgs boson. *Sov.J.Nucl.Phys.***45**, 122 (1987).
- [44] H. Leutwyler et M. Shifman. Goldstone bosons generate peculiar conformal anomalies. *Phys.Lett.B***221**, 384 (1989).
- [45] K. Gottfried. Hadronic transitions between quark-antiquark bound states. *Phys.Rev.Lett.***40**, 598 (1978) ; M.B. Voloshin. On dynamics of heavy quarks in a non-perturbative QCD vacuum. *Nucl.Phys.B***154**, 365 (1979) ; M. Peskin. Short-distance analysis for heavy-quark systems. *Nucl.Phys.B***156**, 365 (1979).
- [46] V.A. Novikov et M.A. Shifman. Comment on the $\psi' \rightarrow J/\psi\pi\pi$ Decay. *Z.Phys.C***8**, 43 (1981). Voir également : M.A. Shifman. Anomalies in gauge theories. *Phys.Rept.***209**, 341 (1991).
- [47] BES Collaboration, J.Z. Bai *et al.* $\psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$ decay distributions. *Phys.Rev.D***62**, 032002 (2000).
- [48] A. Gallegos, J.L.Lucio M. et J. Pestieau. $\pi\pi$ invariant mass spectrum in $V' \rightarrow V\pi\pi$ and the $f_0(600)$ pole. *Phys.Rev.D***69**, 074033 (2004).
- [49] Voir entre autres : D. Atwood et A. Soni. $B \rightarrow \eta' + X$ and the QCD anomaly. *Phys.Lett.B***405**, 150 (1997) ; W.-S. Hou et B. Tseng. Enhanced $b \rightarrow sg$ decay, inclusive η' production, and the gluon anomaly. *Phys.Rev.Lett.***80**, 434 (1998) ; H. Fritzsch. The gluonic decay of the b quark and the η' meson. *Phys.Lett.B***415**, 83 (1997) ; M.R. Ahmady, E. Kou et A. Sugamoto. Non-spectator contribution : a mechanism for inclusive $B \rightarrow X_s\eta'$ and exclusive $B \rightarrow K^{(*)}\eta'$ decays. *Phys.Rev.D***58**, 014015 (1998) ; D. Du, C.S. Kim et Y. Yang. A new mechanism for $B^\pm \rightarrow \eta'K^\pm$ in perturbative QCD. *Phys.Lett.B***426**, 133 (1998) ; A. Ali, J. Chay, C. Greub et P. Ko. Contribution of $b \rightarrow sgg$ through the QCD anomaly in exclusive decays $B^\pm \rightarrow (\eta', \eta)(K^\pm, K^{*\pm})$ and $B^0 \rightarrow (\eta', \eta)(K^0, K^{*0})$. *Phys.Lett.B***424**, 161 (1998).

- [50] A.A. Penin et A.A. Pivovarov. A scalar gluonium contribution to $K \rightarrow \pi\pi$ decays. *Nuov.Cim.A***107**, 1211 (1994).
- [51] M.K. Gaillard et B.W. Lee. Rare decay modes of the K mesons in gauge theories. *Phys.Rev.D***10**, 897 (1974); E. Ma et A. Pramudita. $K_L \rightarrow \gamma\gamma$: theory and phenomenology. *Phys.Rev.D***24**, 2476 (1981). Voir également : J. Pestieau. Rare decay modes of light mesons in the Standard Model. Proc. *Mexican School on particles and fields Oaxtepec 1988*, 49 (1988).
- [52] A.A. Penin et A.A. Pivovarov. $\Delta S = 1$ effective nonleptonic Hamiltonian in the standard model : dimension-eight operators. *Phys.Rev.D***49**, 265 (1994).
- [53] G. Buchalla et G. Isidori. The CP conserving contribution to $K_L \rightarrow \pi^0\nu\bar{\nu}$ in the standard model. *Phys.Lett.B***440**, 170 (1998); A.F. Falk, A. Lewandowski et A.A. Petrov. Effects from the charm scale in $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$. *Phys.Lett.B***505**, 107 (2001). Voir également : O. Catà et S. Peris. Kaon mixing and the charm mass. *JHEP***0407**, 079 (2004).
- [54] J.-M. Gérard et S. Trine. QCD anomalies in hadronic weak decays. *Phys.Rev.D***69**, 113005 (2004).
- [55] Voir par exemple : A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A.L. Maroto et J.R. Peláez. *Effective Lagrangians for the Standard Model*. Springer (1997); V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein et V.I. Zakharov. Calculations in external fields in quantum chromodynamics : technical review. *Fortsch.Phys.***32**, 585 (1984).
- [56] Voir par exemple : M. Veltman. *Gammatica*. *Nucl.Phys.B***319**, 253 (1989).
- [57] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein et V.I. Zakharov. Nonleptonic decays of K mesons and hyperons. *Sov.Phys.JETP***45**, 670 (1977).
- [58] W.A. Bardeen, A.J. Buras et J.-M. Gérard. The $K \rightarrow \pi\pi$ decays in the large N limit : quark evolution. *Nucl.Phys.B***293**, 787 (1987).
- [59] A.J. Buras, M. Jamin et M.E. Lautenbacher. The anatomy of ε'/ε beyond leading logarithms with improved hadronic matrix elements. *Nucl.Phys.B***408**, 209 (1993).
- [60] M.K. Gaillard et B.W. Lee. $\Delta I = 1/2$ rule for nonleptonic decays in asymptotically free field theories. *Phys.Rev.Lett.***33**, 108 (1974); G. Altarelli et L. Maiani. Octet enhancement of nonleptonic weak interactions in asymptotically free field theories. *Phys.Lett.B***52**, 351 (1974).
- [61] C.W. Bernard, T. Draper, A. Soni, H.D. Politzer et M.B. Wise. Application of chiral perturbation theory to $K \rightarrow \pi\pi$ decays. *Phys.Rev.D***32**, 2343 (1985).
- [62] Y. Meurice. Calcul des amplitudes associées aux diagrammes 'penguin'. *Ann.Soc.Scient.Brux.***96**, 28 (1982); S.-P. Chia. An exact calculation of $\bar{d}sg$ vertex. *Phys.Lett.B***130**, 315 (1983).
- [63] J.-M. Gérard et W.-S. Hou. CP violation in inclusive and exclusive charmless B decays. *Phys.Rev.D***43**, 2909 (1991).
- [64] I. Halperin et A. Zhitnitsky. $B \rightarrow K\eta'$ decay as unique probe of η' meson. *Phys.Rev.D***56**, 7247 (1997).
- [65] M. Franz, M.V. Polyakov et K. Goeke. Heavy quark mass expansion and intrinsic charm in light hadrons. *Phys.Rev.D***62**, 074024 (2000). Cet article effectue une brève revue des effets du quark c dans les désintégrations $B \rightarrow K\eta'$.

-
- [66] V.L. Chernyak et I.R. Zhitnitsky. B meson exclusive decays into baryons. *Nucl.Phys.B***345**, 137 (1990); V.M. Belyaev, A. Khodjamirian et R. Rückl. QCD calculation of the $B \rightarrow \pi, K$ form factors. *Z.Phys.C***60**, 349 (1993).
- [67] M. Gourdin, A.N. Kamal, Y.Y. Keum et X.Y. Pham. On the determination of a_1 and a_2 from hadronic two-body decays. *Phys.Lett.B***333**, 507 (1994); T. Browder, K. Honscheid et S. Playfer. A review of hadronic and rare B decays, in *B decays*. World Scientific (1994).
- [68] Voir par exemple : G.C. Branco, A.J. Buras et J.-M. Gérard. CP violation in models with two and three scalar doublets. *Nucl.Phys.B***259**, 306 (1985).
- [69] V. Cirigliano, J.F. Donoghue et E. Golowich. Dimension eight operators in the weak OPE. *JHEP***0010**, 048 (2000).
- [70] R. Haag. Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions. *Phys.Rev.***112**, 669 (1958); S.R. Coleman, J. Wess et B. Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians 1. *Phys.Rev.***177**, 2239 (1969); C.G. Callan, S.R. Coleman, J. Wess et B. Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians 2. *Phys.Rev.***177**, 2247 (1969).
- [71] R.J. Crewther. Chiral reduction of $K \rightarrow \pi\pi$ amplitudes. *Nucl.Phys.B***264**, 277 (1986).
- [72] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein et V.I. Zakharov. QCD and resonance physics. *Nucl.Phys.B***147**, 385, 448 (1979).
- [73] J.L. Goity. The decays $K_S^0 \rightarrow \gamma\gamma$ and $K_L^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the chiral approach. *Z.Phys.C***34**, 341 (1987).
- [74] G. Ecker, A. Pich et E. de Rafael. $K^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ decays in chiral perturbation theory. *Phys.Lett.B***189**, 363 (1987).
- [75] M. Gell-Mann. Nonleptonic weak decays and the eightfold way. *Phys.Rev.Lett.***12**, 155 (1964).
- [76] NA48 Collaboration, A. Lai *et al.* First observation of the $K_S^0 \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ decay. *Phys.Lett.B***578**, 276 (2004).
- [77] A.G. Cohen, G. Ecker et A. Pich. Unitarity and $K_L \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$. *Phys.Lett.B***304**, 347 (1993).
- [78] J. Kambor, J. Missimer et D. Wyler. $K \rightarrow 2\pi$ and $\rightarrow 3\pi$ decays in next-to-leading order chiral perturbation theory. *Phys.Lett.B***261**, 496 (1991). Signalons par ailleurs l'analyse plus récente suivante : J. Bijnens, P. Dhonte et F. Persson. $K \rightarrow 3\pi$ decays in chiral perturbation theory. *Nucl.Phys.B***648**, 317 (2003).
- [79] G. Buchalla, G. D'Ambrosio et G. Isidori. Extracting short-distance physics from $K_{L,S} \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ decays. *Nucl.Phys.B***672**, 387 (2003).
- [80] G. Ecker, A. Pich et E. de Rafael. Vector meson exchange in radiative kaon decays and chiral perturbation theory. *Phys.Lett.B***237**, 481 (1990).
- [81] KTeV Collaboration, A. Alavi-Harati *et al.* Measurement of the decay $K_L \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$. *Phys.Rev.Lett.***83**, 917 (1999).
- [82] NA48 Collaboration, A. Lai *et al.* Precise measurement of the decay $K_L \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$. *Phys.Lett.B***536**, 229 (2002).
- [83] F. Gabbiani et G. Valencia. $K_L \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ and the bound on the CP-conserving $K_L \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$. *Phys.Rev.***D64**, 094008 (2001).

- [84] F. Gabbiani et G. Valencia. Vector-meson contributions do not explain the rate and spectrum in $K_L \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$. *Phys.Rev.D***66**, 074006 (2002).
- [85] Voir par exemple : L.B. Okun. *Leptons and Quarks*. North Holland (1982).