



Université catholique de Louvain
Faculté des Sciences
Institut de Recherche en Mathématique et Physique
Centre for Cosmology, Particle Physics and Phenomenology

Sur la variation des constantes de Newton et d'Einstein

Thèse présentée par
Vincent Boucher

en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

Prof. Jean-Marc Gérard (Promoteur)	UCLouvain
Prof. Yves Félix (Président)	UCLouvain
Prof. Christophe Ringeval	UCLouvain
Prof. André Füzfa	Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur
Prof. Michel Tytgat	Université Libre de Bruxelles
Prof. Jean-Michel Alimi	Observatoire de Paris

Louvain-la-Neuve – Juillet 2012

Le moment est venu de remercier, et c'est un réel plaisir, le Professeur Jean-Marc Gérard d'avoir bien voulu accompagner cette thèse. Je pense à son enseignement déterminant à bien des égards comme à son intuition inégalée de la physique doublée d'un sens de l'humour constant. La liberté qu'il m'a accordée, ses encouragements continuels et ses conseils toujours attentifs se retrouvent à chaque chapitre de ce long travail.

Merci! aussi ...

Au Professeur André Füzfa pour son soutien déjà exprimé depuis la licence et sa collaboration ... quintessentielle assurée tant à Louvain-la-Neuve, à Namur qu'à Meudon.

Aux autres membres du Jury : les Professeurs Jean-Michel Alimi, Yves Félix, Christophe Ringeval et Michel Tytgat, pour leurs conseils, les observations et les remarques enrichissantes entre toutes.

Merci! encore ...

A Jean-Michel Alimi et à Yves Wiaux dont l'accueil à l'Observatoire de Paris-Meudon et à l'EPFL à Lausanne fut à chaque fois si bienveillant.

A mes compagnons de thèse de FYMA, du bientôt mythique B322 et de FYNU, Augustin, François, Geoffroy, Jérôme, Michel, Simon et Xavier pour leurs discussions scientifiques toujours intenses et celles... moins scientifiques. On se retrouve déjà sous d'autres horizons.

Aux membres bien nombreux de l'aventure du Centre for Cosmology, Particle Physics and Phenomenology dont la bonne humeur fut souvent encourageante et en particulier à Ginette pour son sens de la gestion jamais pris en défaut.

À Jérôme, Frédéric, Nicolas, Sybille, Thomas pour leur soutien invariant et à tous ceux qui m'ont un jour adressé « Et ta thèse ? », ils se reconnaîtront!

A mes parents, dont la sollicitude affectueuse non-discontinue m'accompagna sans désenchaner. Le principe d'équivalence fort leur est devenu sinon plus familier, certainement moins sombre au moment de se plonger dans ces variations invariables!

On the variation of Newton's and Einstein's constants

Abstract

According to the general theory of relativity, the current paradigm for gravitation and concordant observational data, about 95% of the Universe's content is only perceivable through gravitational effects. Consolidating the predictions of this theory is then of primordial importance. Those predictions are structured around two dimensional constants : Newton's and Einstein's constants. The former, namely the universal constant, yields the universality of free fall of light and compact objects. The latter, also named cosmological constant, explains the late expansion acceleration of the Universe on cosmological scales. The main goal of this thesis is to explore the foundations of general relativity by promoting these constants as dynamical fields.

First of all, we propose a generic test seeking for possible Newton's constant variations in the primeval plasma. The modified weight of baryons translates the equilibrium point of the acoustic oscillations. A constraint on the amplitude of such variations is extracted from the anisotropies of the cosmic microwave background.

Secondly, we scrutinize a simple modification of general relativity providing a minimal violation of the strong equivalence principle. Although the additional scalar field acts as a dark radiation at the cosmological expansion level, the imprint left on the matter field perturbations is clearly distinguishable from other radiations because of the particular scalar field anisotropic stress. Several constraints for this alternative gravitational theory are derived from the analysis of the cosmic microwave background, Type Ia supernovae and the measure of the Lemaître-Hubble constant.

Finally, we replace the cosmological constant by a quintessence field. For selected realistic models agreeing with current cosmological data, it is shown that the non-linear processes driving the growth of matter's large scale structures encode the nature and the dynamics of dark energy.

Although the confrontation between the investigated alternative models and available cosmological data currently does not raise deviation to the concordant Λ CDM model, the present study shows that predictions and signatures of these models are unique compared to the standard scenario.

Table des matières

Avant-dire	11
1 Principes d'équivalence et cosmologie	15
1.1 Gravitation	15
1.1.1 Principe d'équivalence faible	16
1.1.2 Principe d'équivalence d'Einstein	18
1.1.3 Effet Nordtvedt et principe d'équivalence fort	21
1.2 Le modèle du big-bang	27
1.2.1 L'Univers homogène	27
1.2.2 La constante de Lemaître-Hubble	28
1.2.3 Equations de Friedmann-Lemaître	29
1.3 L'Univers perturbé	33
1.4 L'effet Nordtvedt cosmologique	33
1.4.1 Equations du mouvement	34
1.4.2 Oscillations acoustiques	35
1.4.3 Unicité de la signature et dégénérescence	36
1.4.4 Contraintes	37
1.5 En résumé	40

2	Implémentation scalaire de la gravité “zéro-R”	43
2.1	Equations des champs	44
2.2	Solution dans l’univers de Friedmann-Lemaître	47
2.2.1	Solution générale et exacte	47
2.2.2	Fluide de radiation sombre	48
2.2.3	Convergence vers la relativité générale	49
2.2.4	Contrainte théorique sur la densité du champ scalaire	54
2.2.5	Contraintes phénoménologiques sur la densité du champ scalaire	55
2.3	Evolution des perturbations	61
2.3.1	Champ fondamental	62
2.3.2	Fluide effectif	63
2.3.3	Deux cas limites	66
2.3.4	Evolution aux échelles intermédiaires	72
2.3.5	Spectre du CMB	78
2.4	Contraintes et dégénérescences	84
2.4.1	Données cosmologiques	84
2.4.2	Résultats	87
2.4.3	Contraintes futures : Planck	92
2.5	Perspectives	93
2.6	En résumé	96
3	Modèles réalistes de quintessence et grandes structures de matière	99
3.1	Introduction	100
3.2	Modèles réalistes de quintessence	104
3.2.1	Perturbations du champ	105
3.2.2	Contraintes	108

3.2.3	Sélection des modèles réalistes	109
3.3	Prédictions pour les structures cosmiques de la matière	111
3.3.1	Fonctions de transfert et de croissance dans le régime linéaire	112
3.3.2	Croissance non-linéaire	116
3.4	En résumé	121
Après-dire		123

Annexe

A	L'Univers perturbé	129
A.1	Fluctuations	129
A.2	Métrie	131
A.3	Equations du mouvement	132
A.3.1	Photons	135
A.3.2	Neutrinos	137
A.3.3	Baryons	137
A.3.4	Matière sombre	138
A.3.5	Métrie	138
A.3.6	Résumé des équations du mouvement	139
A.3.7	Fluide total	140
A.4	Conditions initiales	142
A.5	Evolution des perturbations	143
A.5.1	Ere de radiation	143
A.5.2	Ere de matière	145
A.5.3	Jauge synchrone	146
A.5.4	Fonction de croissance	147

A.6	Observables	148
A.6.1	Spectre de puissance de la matière	148
A.6.2	Spectre de puissance angulaire du CMB	149
B	Paramètres cosmologiques	155
B.1	Méthode d'estimation	155
B.2	Tables de paramètres cosmologiques	157
C	Représentations de Dicke-Jordan et d'Einstein	161
C.1	Transformation conforme	161
C.2	Théorie "zéro- R "	165
D	Champ scalaire thermalisé	169
	Bibliographie	173

Avant-dire

95%

C'EST LA PROPORTION DU CONTENU DE L'UNIVERS qui ne nous est accessible pour l'instant qu'au travers d'effets gravitationnels. C'est en observant l'évolution de la distribution des 5% restants, la matière ordinaire constituée de baryons, d'électrons, de photons et de neutrinos, que l'on caractérise cette partie dite sombre. On y distingue deux contributions. La première est de nature encore inconnue, il s'agit de la matière sombre. Son poids, environ 20% du budget total de l'Univers, guide l'évolution des structures primitives et récentes de la matière. Dans le cadre des cosmologies de Friedmann-Lemaître, l'énergie sombre, la seconde contribution, est quant à elle responsable de l'accélération tardive de l'expansion cosmologique. Ce dernier secteur sombre représente à lui seul 75% du poids de l'Univers. Son existence s'explique grâce à la constante cosmologique, un ingrédient déjà présent dans le paradigme actuel de la gravitation, soit la relativité générale d'Einstein.

La relativité générale est la base actuelle de notre description de l'Univers. Elle influe les deux missions de la cosmologie. La première consiste en l'étude de son contenu, des différentes formes ou espèces de matière et d'énergie qui le composent. La seconde retrace son histoire et l'enchaînement des processus qui l'ont structuré. L'interprétation des observations en cosmologie est sensible à la théorie de gravitation. Par conséquent, la cosmologie est un laboratoire de la gravitation. Quantifier les composantes actuelles avec justesse, c'est se préparer à discriminer par la suite les scénarios et processus qui président à leur création, à caractériser la nature et à comprendre l'origine des espèces. Pour mesurer avec précision ces différentes composantes, il est nécessaire de bien comprendre les phénomènes gravitationnels. Il importe donc de tester les fondements de la relativité générale, et partant, d'explorer d'autres théories de la gravitation.

Etant donné l'excellente adéquation, à environ une part pour dix mille, entre les prédictions de la relativité générale et les mesures actuelles dans le système solaire, c'est dans les observations aux plus grandes échelles, galactiques et cosmologiques, qu'il faudra chercher les possibles déviations à la relativité générale. De surcroît, selon les scénarios, certaines théories de gravitation n'agissent que dans l'Univers primordial et ressemblent peu à peu, au fur et à mesure que l'Univers évolue, à la relativité générale.

Ce sont ces deux aspects que nous testerons ici. Nous prenons comme point d'entrée aux déviations à la relativité générale les deux constantes dimensionnelles dont elle dispose : la constante universelle de gravitation de Newton et la constante cosmologique d'Einstein. Elles seront chacune à leur tour promues au rang de champ dynamique.

La plupart des théories alternatives de gravitation incluent un champ de gravitation auxiliaire au champ métrique – l'unique champ gravitationnel en relativité générale. Ce nouveau champ reprend le rôle de la constante de gravitation et modifie dès lors l'intensité du couplage gravitationnel en fonction du temps et de la distribution de matière. Il en résulte que, dans un champ gravitationnel donné, l'accélération de chute libre des corps n'est plus universelle mais dépend de leur énergie de liaison gravitationnelle interne, une énergie d'autant plus grande que le corps est compact ou d'extension large. Il s'agit de l'effet Nordtvedt, reflet de la violation du principe d'équivalence fort.

Le premier chapitre a pour objet de chercher l'empreinte de cet effet au niveau cosmologique et donc de tester de manière générique la présence d'une possible violation du principe d'équivalence fort [1, 2, 3]. L'existence d'une telle violation au moment de la combinaison des protons et des électrons, environ 380 000 ans après le big bang, modifie le mouvement du fluide de baryons dans les puits de potentiels principalement créés par la matière sombre. Un tel effet affecte les anisotropies du fond diffus cosmologique (cosmic microwave background, CMB). Grâce aux mesures des anisotropies du CMB par le satellite d'observation WMAP, on extraira une contrainte sur l'amplitude d'une possible violation du principe d'équivalence fort.

Le maintien du caractère générique de ce test nous conduit à plusieurs approximations. Afin de tenir compte, par exemple, de l'évolution temporelle du champ auxiliaire de gravitation, il sera nécessaire de choisir une théorie de gravitation particulière.

Dans le deuxième chapitre, le choix s'est porté sur l'implémentation scalaire d'une théorie "zéro- R ". Trois options apparaissent en effet lorsqu'on construit les équations du champ métrique dans le vide à partir d'une prescription sur

la courbure de l'espace-temps. La première est exclue par les mesures dans le système solaire puisqu'elle propose que l'espace-temps est conformément plan. La seconde possibilité s'identifie à la relativité générale avec ou sans constante cosmologique. La troisième option définit les théories du type "zéro- R ", pour lesquelles le scalaire de courbure est nul, $R = 0$. Une telle théorie se construit à l'aide de champs auxiliaires de gravitation et figure donc parmi les théories les plus simples à ne pas incorporer le principe d'équivalence fort. Une réalisation simple est donnée par un champ scalaire couplé de manière non-minimale à la métrique avec une fonction de couplage particulière.

Afin de mesurer les déviations à la relativité générale que pourrait induire cette théorie, nous étudierons le comportement de ce champ scalaire dans un contexte cosmologique parallèlement à son influence sur l'évolution cosmologique des différents champs de matière. La confrontation des prédictions de cette théorie aux mesures des abondances des éléments légers ainsi qu'aux récentes observations du CMB permettront d'évaluer la déviation maximale permise à la relativité générale. Afin de lever les dégénérescences introduites par le champ scalaire au travers de sa densité d'énergie avec les autres paramètres cosmologiques, on s'aidera aussi des mesures de distance et de luminosité des supernovae de type Ia et aussi de la mesure directe de la constante de Lemaître-Hubble. Les perspectives de contraintes avec les futures données du satellite Planck seront également envisagées.

Le champ scalaire possède les propriétés d'une radiation sombre. Toutefois, quoi qu'elles soient identiques dans un univers homogène, on démontrera, lorsqu'on prend en compte les perturbations cosmologiques, que les empreintes d'un tel champ scalaire se distinguent de celles de neutrinos stériles, une autre radiation sombre hypothétique. Ces deux modèles seront simultanément contraints avec le même jeu de données.

Le troisième chapitre abordera le cas de la constante cosmologique. Souffrant de problèmes conceptuels, elle est à son tour avantageusement remplacée par un champ scalaire, appelé quintessence. Un champ dynamique et minimalement couplé à la métrique. La forme de son potentiel d'auto-interaction lui permet de dominer tardivement le contenu de l'Univers et d'enclencher la récente phase d'expansion accélérée. A l'inverse du scénario de la constante cosmologique, la quintessence développe des perturbations spatiales. Ces dernières modifient l'évolution des potentiels gravitationnels dans lesquels se forment les structures de matière. Les propriétés de ces structures sont affectées en fonction du modèle de quintessence au travers de la forme du potentiel du champ scalaire.

Deux modèles de quintessence sont sélectionnés en comparant leurs prédictions aux données du CMB et des supernovae [4, 5, 6]. La distribution de matière pour

ces modèles réalistes est évaluée dans le cadre de la théorie linéaire des perturbations et sert de point de départ à des simulations numériques de grande ampleur. Ces simulations incluent, de fait, les effets non-linéaires caractéristiques de l'évolution des structures de matière à de petites échelles cosmologiques, en deçà d'un mégaparsec. L'empreinte des modèles réalistes de quintessence laissée dans le spectre de puissance de la matière sera comparée au cas de la constante cosmologique et on cherchera à mettre en évidence la dépendance des phénomènes non-linéaires de structuration de la matière vis-à-vis de la nature de l'énergie sombre.

Chapitre 1

Principes d'équivalence et cosmologie

Déjà testé dans le système solaire et dans les systèmes d'étoiles doubles, un des aspects du principe d'équivalence fort, l'indépendance en la position spatiale des charges gravitationnelles actives, est envisagé ici dans un contexte cosmologique. Dans ce chapitre, la signature de l'effet Nordtvedt introduit par la violation du principe d'équivalence est recherchée dans les anisotropies du rayonnement de fond cosmologique. Pour ce faire, quelques éléments de gravitation et de cosmologie nous paraissent utiles d'être rappelés au préalable.

1.1 Gravitation

Après avoir observé le roulement de différents corps sur un plan incliné, Galilée induit que tous les corps chutent avec des vitesses indépendantes de leur nature, de leur structure interne et de la quantité de matière qu'ils contiennent. Plus tard, Newton, fort de sa seconde loi sur l'inertie, affirme que les charges avec lesquelles un corps subit et exerce une attraction gravitationnelle, les charges gravitationnelles passive et active, sont proportionnelles à la masse inertielle, soit à la quantité de matière qu'il renferme ; la constante de proportionnalité étant accidentellement identique pour tous les corps, elle paraît universelle. Les unités sont choisies de telle sorte que charge gravitationnelle et masse inertielle sont identiques. Einstein prendra cet accident comme point de départ de la théorie de la relativité générale : sous l'effet de la gravitation, un observateur en chute libre ne sent pas son accélération, aucune expérience locale ne lui révélera son accélération. Ces idées reflètent l'expression du principe d'équivalence.

Toute théorie de la gravitation a deux objectifs. Le premier est de détailler la réaction d'un corps soumis à un champ gravitationnel, soit fournir une relation entre la charge gravitationnelle passive d'un corps et ses propriétés inertielles. Le second est de révéler la façon dont un corps exerce une attraction gravitationnelle, à distance, sur un autre corps. Selon les réponses apportées à ces deux problèmes, les différentes théories se classent en fonction de la manière dont elles implémentent le principe d'équivalence.

1.1.1 Principe d'équivalence faible

Le **niveau zéro** d'implémentation du principe d'équivalence constitue un premier pas vers l'universalité de la chute libre pointée par Galilée : toute particule munie de propriétés inertielles et qui fait donc l'objet d'une description dans le cadre d'une théorie physique doit posséder une charge gravitationnelle passive et active non-nulle.

Le **niveau un** invoque l'universalité de la chute libre : sous l'action d'un champ gravitationnel extérieur, en un point de l'espace-temps, l'accélération d'une particule libre de toute autre interaction, sans structure interne et dont on omet la charge gravitationnelle active est indépendante de sa vitesse ainsi que de sa masse inertielle¹.

En chaque point de l'espace-temps il existe dès lors un repère local universel correspondant au repère propre d'une particule dans lequel le vecteur $u^\mu(\lambda) \equiv dx^\mu(\lambda)/d\lambda$, tangent à la trajectoire $x^\mu(\lambda)$ de la particule, est constant

$$\frac{du^\mu(\lambda)}{d\lambda} \stackrel{*}{=} 0. \quad (1.1)$$

C'est la première loi de Newton. On voudrait exprimer la loi du mouvement de cette particule dans un autre référentiel, a priori quelconque. Les deux référentiels étant physiquement équivalents, la forme des équations du mouvement doit être unique. Le changement de référentiel se réalise au travers de transformations locales de coordonnées. Sous de telles transformations la dérivée du vecteur tangent le long de la trajectoire n'est pas un vecteur. Dès lors, avec u^μ les composantes du vecteur tangent à la trajectoire exprimées dans un référentiel quelconque cette fois-ci, l'équation (1.1) ne décrit plus le mouvement de la particule. Après inspection de la loi de transformation de $du^\mu(\lambda)/d\lambda$, on introduit un objet local $\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x^\alpha)$ dont la loi de transformation sous un changement

¹Le niveau un diffère du principe d'équivalence faible défini en [7] : les particules tests sont supposées ici sans structure interne.

local des coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\mu)$ vérifie la relation

$$\Gamma'_{\nu\rho}{}^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} \right]. \quad (1.2)$$

Par construction de $\Gamma_{\nu\rho}{}^\mu$ la quantité suivante est un vecteur²

$$\frac{Du^\mu(\lambda)}{d\lambda} \equiv \frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}{}^\mu u^\nu u^\rho. \quad (1.5)$$

On impose aussi dans le référentiel propre de la particule en chute libre que les coefficients $\Gamma_{\nu\rho}{}^\mu$ s'annulent le long de la trajectoire

$$\Gamma_{\nu\rho}{}^\mu \Big|_{x^\mu(\lambda)} \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{d\Gamma_{\nu\rho}{}^\mu}{d\lambda} \Big|_{x^\mu(\lambda)} \stackrel{*}{=} 0. \quad (1.6)$$

En présence de la seule gravitation, la première loi de Newton, équation (1.1), reste valide et se généralise ainsi en

$$\frac{Du^\mu(\lambda)}{d\lambda} = 0. \quad (1.7)$$

La seconde loi de Newton est redondante à cette équation pour ces particules tests en chute libre. Cette identification s'opère quand la masse inertielle égale la charge gravitationnelle passive.

En vertu du principe d'équivalence implémenté jusqu'ici, les coefficients $\Gamma_{\nu\rho}{}^\mu$ ne dépendent pas des propriétés de la particule dont on décrit la chute libre, ni des conditions initiales de position et de vitesse. Les $\Gamma_{\nu\rho}{}^\mu$ et leur loi de transformation sont universels et ne dépendent que du système de coordonnées locales dans lequel on décrit le mouvement d'une particule en chute libre. D'après les conditions ci-dessus, un objet tel que $\Gamma_{\nu\rho}{}^\mu$ s'identifie alors à une connexion affine (définissant le parallélisme, condition (1.2)) et symétrique (annulant la courbure d'une trajectoire dans un référentiel propre, condition (1.6)) [8]. Par construction, les trajectoires des particules en chute libre sont les géodésiques de la connexion.

²La dérivée covariante d'un vecteur u^μ est donnée par

$$u^\mu{}_{|\nu} = u^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}{}^\mu u^\alpha, \quad (1.3)$$

avec

$$u^\mu{}_{,\nu} = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (1.4)$$

En présence d'un champ gravitationnel $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(x^{\alpha})$ inhomogène ou variable dans le temps, l'accélération relative entre deux particules voisines en chute libre, séparées par un vecteur n^{μ} et dotées de quadri-vitesses instantanées identiques est donnée au premier ordre en n^{μ} par

$$\frac{D^2 n^{\mu}}{d\lambda^2} = -R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} u^{\nu} u^{\rho} n^{\sigma}, \quad (1.8)$$

avec $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$ le tenseur de courbure de Riemann

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}, \quad (1.9)$$

universel comme la connexion dont il dérive. C'est à travers lui que la gravité se manifeste. Son caractère tensoriel est l'expression que la gravité n'est pas une force fictive.

1.1.2 Principe d'équivalence d'Einstein

Le principe d'équivalence d'Einstein, ou **niveau deux**, aborde la question des interactions : *l'universalité de la chute libre est étendue aux systèmes en interaction et possédant une structure interne* –la charge gravitationnelle active est encore prise à zéro. On désire que l'universalité survive lors d'un changement de paradigme des phénomènes non-gravitationnels, après le passage d'une théorie effective à une théorie plus fondamentale et que l'accélération de chute libre soit indépendante des mécanismes dont émergent les masses inertielles des particules. *En présence de gravitation, les particules gardent leurs symétries internes ; l'intensité des interactions ou les résultats d'expériences locales non-gravitationnelles mesurés dans un laboratoire en chute libre sont indépendants de sa vitesse et de sa position dans l'espace-temps.* Dans le référentiel propre d'une particule décrite au niveau un, il suffit que les lois de la physique s'écrivent localement comme en relativité restreinte.

Dans un tel référentiel inertiel, l'élément de longueur ds de l'espace-temps entre deux évènements séparés par le vecteur dx^{μ} doit s'écrire

$$ds \stackrel{*}{=} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}. \quad (1.10)$$

Sous une transformation généralisée des coordonnées et sous la condition que ds est invariant, la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ n'est pas invariante et devient un tenseur dynamique, la métrique, noté $g_{\mu\nu}(x^{\alpha})$

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x^{\alpha}) dx^{\mu} dx^{\nu}}. \quad (1.11)$$

Un lien est établi entre la métrique $g_{\mu\nu}$ et la connexion : en effet, à ce niveau, le principe d'équivalence identifie maintenant les référentiels en chute libre aux référentiels où les équations de la physique s'écrivent comme en relativité restreinte. Parmi les différentes connexions, la connexion de Levi-Civita est la seule à réaliser cette identification : elle s'annule à chaque fois que la métrique se réduit à celle de Minkowski

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\nu\alpha,\rho} + g_{\rho\alpha,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}). \quad (1.12)$$

La métrique reprend maintenant le rôle de champ universel et fondamental de gravitation.

On a jusqu'ici reformulé en termes géométriques l'universalité de la chute libre des corps dotés d'interactions internes non-gravitationnelles : les trajectoires de chute libre de ces corps sont des géodésiques de la métrique de l'espace-temps. Pour un fluide isolé, de tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$, dont on omet les charges gravitationnelles actives qui le composent, l'équation des géodésiques se généralise à

$$T^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (1.13)$$

Le principe d'équivalence d'Einstein remplit le premier objectif que se fixe une théorie de la gravitation : l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion détaille le mouvement du fluide sous l'action du champ de gravité. Le second objectif s'obtient en cherchant les équations qui régissent la dynamique de ce champ. Ce dernier se manifeste par des forces de marées, équation (1.8). Dès lors il semble naturel de dériver les équations de la métrique à partir de contraintes sur le tenseur de Riemann, lequel tenseur se décompose en trois parties

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = W_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{12}[g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}]R \\ + \frac{1}{2}[g_{\mu\rho}{}^{\circ}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}{}^{\circ}R_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}{}^{\circ}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}{}^{\circ}R_{\mu\sigma}]. \quad (1.14)$$

La première, $W_{\mu\nu\rho\sigma}$, est le tenseur de Weyl dont toutes les traces s'annulent. La seconde est proportionnelle au scalaire de courbure, la trace complète du tenseur de Riemann, soit $R = g^{\mu\nu}R^{\sigma}{}_{\mu\nu\sigma}$. Quant à la dernière, elle est construite à partir du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\nu\sigma}$ dont on a ôté la trace, soit ${}^{\circ}R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R$.

Exploitions cette décomposition pour imposer des contraintes sur les composantes du tenseur de Riemann en guise d'équation du champ de gravitation

dans le vide [9]. La Table 1.1 résume les différentes possibilités de contraintes et leurs conséquences. Bien que non indiqué dans cette table, les composantes du tenseur de Riemann vérifient toujours les identités de Bianchi

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} + R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} = 0, \quad (1.15a)$$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma|\kappa} + R^\mu{}_{\nu\kappa\rho|\sigma} + R^\mu{}_{\nu\sigma\kappa|\rho} = 0. \quad (1.15b)$$

Théorie	$W^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$	R	${}^\circ R_{\mu\nu}$	Equations	Conditions
RR	0	0	0	–	$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$
Nordström	0	0	–	$\square_\eta f = 0$	$g_{\mu\nu} = f(x)^2 \eta_{\mu\nu}$
RG	–	0	0	$R_{\mu\nu} = 0$	–
Nordström	0	–	–	–	$g_{\mu\nu} = f(x)^2 \eta_{\mu\nu}$
“zéro- R ”	–	0	–	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \tau_{\mu\nu}$	$\tau^\mu{}_\mu = 0$ et $\tau^{\mu\nu}{}_{ \nu} = 0$
RG + Λ	–	–	0	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\Lambda g_{\mu\nu}$	$\Lambda = \text{constante}$

Tab. 1.1 – Localement dans le vide, soit en absence de charges gravitationnelles actives, équations et conditions pour la métrique à partir de contraintes minimales sur la décomposition (1.14) du tenseur de Riemann.

La géométrie est maximalelement contrainte pour la première théorie de la Table 1.1. Il s’agit de la théorie de la relativité restreinte (RR).

Le deuxième groupe de théories est obtenu en annulant deux des trois secteurs qui composent le tenseur de Riemann. La première théorie de ce groupe, pour laquelle le tenseur de Weyl est nul, correspond à la formulation géométrique d’Einstein et de Fokker issue de la théorie de Nordström. L’espace-temps y est conformément plat, la dynamique du facteur conforme $f(x^\alpha)^2$ est guidée par l’équation $R = 0$ dont dérive l’équation $\square_\eta f = 0$, où \square_η est le D’Alembertien associé à la métrique de Minkowski. La deuxième, pour laquelle toutes les traces du tenseur de Riemann sont nulles³, représente une première version de la relativité générale (RG) dans le vide dont l’équation du champ métrique est $R_{\mu\nu} = 0$.

Des contraintes minimales sont posées pour le dernier groupe de théories. La première théorie impose que $W^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$, on retrouve la théorie de Nordström dans une version étendue où la condition $R = 0$ est relâchée. Le facteur conforme $e^{2f(x)}$ est libre. La seconde de ces possibilités, théorie “zéro- R ” [10], s’obtient en annulant uniquement le scalaire de courbure. A l’aide des identités

³Notons qu’annuler toutes les traces du tenseur de Riemann implique que le tenseur de Weyl satisfait à son tour la condition $W^\mu{}_{\nu\rho\sigma|\mu} = 0$.

de Bianchi⁴, la théorie est fixée à un tenseur conservé et de trace nulle près, $\tau_{\mu\nu}$. Enfin, annuler la partie hors-trace du tenseur de Ricci est équivalent à reprendre la théorie précédente en remplaçant la condition de trace nulle du tenseur arbitraire $\tau_{\mu\nu}$ par $\tau_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$, où Λ est appelée constante cosmologique. C'est la théorie de la relativité générale d'Einstein avec constante cosmologique⁵.

Les théories de géométrie conformément planes ne rendent pas compte de la déflexion de la lumière observée dans un champ gravitationnel. Les théories reprises sous la dénomination *Nordström* de la Table 1.1, sont donc exclues. La première version de la relativité générale ainsi que les deux autres théories aux contraintes minimales sont expérimentalement viables dans le système solaire à condition que les contributions du tenseur arbitraire $\tau_{\mu\nu}$ pour la théorie "zéro- R " ou de la constante cosmologique pour la seconde version de la relativité générale soient suffisamment petites.⁶

Jusqu'ici nous avons obtenu l'équation du mouvement des champs de matière sous l'action de la gravité, équation (1.13), ainsi que les différentes prescription possibles pour la propagation du champ gravitationnel. Il nous reste à déterminer comment le champ gravitationnel est généré.

1.1.3 Effet Nordtvedt et principe d'équivalence fort

Considérons de suite la charge gravitationnelle active. On désire maintenir le principe d'équivalence : les mouvements de chute libre de corps dotés d'une charge active suivent les géodésiques d'une métrique, équation (1.13). Partant de l'égalité des charges actives et passives dans la théorie de Newton, l'équation (1.13) décrivant la réaction des charges passives sous l'effet du champ gravitationnel semble indiquée comme point de départ pour mettre en relation le champ gravitationnel et la distribution des charges actives. Intégrons-la

$$\kappa T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

⁴ A l'aide du tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.16)$$

les identités de Bianchi (1.15) s'écrivent comme

$$G^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0. \quad (1.17)$$

⁵Quelle que soit la valeur de la constante cosmologique, le tenseur de Weyl vérifie pour cette théorie $W^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma|\mu} = 0$.

⁶Les contraintes sont données plus loin, équations (1.32) et (1.36).

On a regroupé dans le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ l'ensemble des champs de matière, laissant dans le tenseur conservé $\tau_{\mu\nu}$ les éventuels champs de gravitation auxiliaires à la métrique. On distingue ces champs auxiliaires des champs de matière en raison de leur couplage non-minimal à la métrique : le tenseur $\tau_{\mu\nu}$ dépend alors du tenseur d'Einstein. La relativité générale avec constante cosmologique dont les équations du champ métrique dans le vide sont données à la Table 1.1 correspond au cas sans champ auxiliaire de gravitation. En présence de matière les équations deviennent⁷

$$\kappa T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.19)$$

La dynamique de la métrique est donc guidée par la charge gravitationnelle active $\kappa T_{\mu\nu}$, la constante κ lie la charge passive $T_{\mu\nu}$ à la charge active. Une extension de la relativité générale est la théorie de Brans-Dicke [12] dont le champ auxiliaire est un champ scalaire $\phi(x^\mu)$ avec comme tenseur source $\tau_{\mu\nu}$

$$\tau_{\mu\nu} = (\phi - 1)G_{\mu\nu} - X_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

où la dynamique du champ scalaire est rassemblée dans $X_{\mu\nu}(\phi, \partial_\alpha \phi, \partial_\alpha \partial_\beta \phi)$. La dynamique du champ métrique est cette fois-ci guidée par l'équation suivante

$$\frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{\phi} g_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} X_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

En comparaison de la relativité générale, équation (1.19), l'effet gravitationnel des champs de matière est ici modifié par le facteur $1/\phi$ qui multiplie $\kappa T_{\mu\nu}$, un effet auquel s'ajoute celui de la source $X_{\mu\nu}$. Le champ scalaire étant dynamique, la charge gravitationnelle de la matière ainsi induite dépend de la position dans l'espace-temps. Contrairement au cas de la relativité générale, la charge gravitationnelle active ne dépend plus seulement des propriétés gravitationnelles passives –et donc inertielles– de la matière mais dépend aussi d'un champ extérieur dynamique, ϕ .

Dans les différentes formulations du principe d'équivalence rencontrées jusqu'ici, nous avons négligé la charge gravitationnelle active. Le principe d'équivalence, le mouvement géodésique de la chute libre donc, survit-il en présence d'une charge active dépendant non seulement des propriétés internes du corps en question mais aussi d'un champ auxiliaire extérieur ?

⁷Par correspondance avec la théorie de Newton en champ faible, on associe κ à la constante de Newton : $\kappa = 8\pi G_N$, avec $G_N = (6.67384 \pm 0.00080) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ dans les unités du SI [11]. On choisit le système d'unités pour lequel $\hbar = k_B = c = 1$.

Considérons un corps non-relativiste d'extension non-nulle et placé dans un champ gravitationnel faible dont l'échelle caractéristique des inhomogénéités reste grande comparée à l'extension du corps. Il est pourvu d'une énergie de liaison interne gravitationnelle E_g fonction des charges gravitationnelles passive et active, de densités respectives $\rho^A(\vec{x})$ et $\rho^P(\vec{x})$. Cette énergie, dans la limite quasi-newtonienne, s'écrit

$$E_g = -\frac{1}{2} \iint \frac{G \rho^A(\vec{x}) \rho^P(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} d^3\vec{x} d^3\vec{x}'. \quad (1.22)$$

Elle contribue à la masse inertielle m_{in} du corps au même titre que les énergies de liaison d'origine non-gravitationnelle incluses dans la masse constituante m_c

$$m_{\text{in}} = m_c + E_g. \quad (1.23)$$

En relativité générale, dans la limite newtonienne, les densités gravitationnelles sont remplacées dans l'équation (1.22) par la densité inertielle et le facteur de couplage G s'identifie à la constante Newton G_N . La correction E_g à la masse inertielle ne dépend alors que des propriétés internes au corps, elle n'est pas fonction du champ gravitationnel. En présence de champs de gravitation auxiliaires à la métrique, tels que celui de Brans-Dicke, équation (1.20), on remplace le facteur de couplage par une fonction dépendant de la position \vec{r} du corps dans le champ de gravitation extérieur

$$G \rightarrow G(\vec{r}). \quad (1.24)$$

Pour ces théories de gravitation, la masse inertielle d'un corps doté d'une énergie de liaison gravitationnelle non-nulle dépend de sa position dans le champ gravitationnel, $m_{\text{in}} = m_{\text{in}}[G(\vec{r})]$. L'équation du mouvement de ce corps dérive d'un lagrangien ne dépendant plus seulement des champs de matière ψ et de la métrique mais aussi du couplage variable $G(\vec{r})$: $\mathcal{L}_{\text{mat}} = \mathcal{L}_{\text{mat}}[\psi, g_{\mu\nu}, G(\vec{r})]$,

$$T^\mu{}_{\nu|\mu} = \frac{\partial G}{\partial x^\nu} \frac{dT}{dG}. \quad (1.25)$$

La présence de champs de gravitation auxiliaires à la métrique rend non-géodésique le mouvement d'un tel corps. C'est l'**effet Nordtvedt** [13, 14]. L'accélération de chute libre de ce corps ne correspond plus à l'accélération universelle des corps tests dans un champ gravitationnel donné mais dépend de son énergie de liaison gravitationnelle. De l'équation (1.25), on obtient cette

accélération qui comparée à l'accélération en relativité générale \vec{g} vaut

$$\vec{a} - \vec{g} = -\vec{\nabla} \ln G \frac{d \ln m_{\text{in}}}{d \ln G}. \quad (1.26)$$

Le dernier facteur du membre de droite représente la sensibilité \mathcal{S}_g de la masse du corps aux variations de G et est fonction de la proportion d'énergie gravitationnelle qu'il contient

$$\mathcal{S}_g \equiv -\frac{d \ln m_{\text{in}}}{d \ln G} \quad (1.27a)$$

$$= \frac{|E_g|}{m_{\text{in}}}. \quad (1.27b)$$

Quant au gradient du couplage gravitationnel G , il dépend de la description des champs auxiliaires et de leur dynamique. En champ faible, on se donne comme prescription générique que G dépend du potentiel newtonien $V(r)$

$$G(r) = G_N [1 - \eta V(r)], \quad (1.28)$$

avec $V(r) = -G_N M/r$ où M la masse du corps générant le champ gravitationnel et \vec{r} le vecteur séparant les deux corps. Le paramètre η reflète la dite description et s'annule pour la théorie de la relativité générale, en absence de champs auxiliaires. L'accélération non-universelle se réduit alors à

$$\vec{a} = (1 - \eta \mathcal{S}_g) \vec{g}. \quad (1.29)$$

En conséquence, en comparaison à la masse inertielle, la masse gravitationnelle passive m_g^P ne reçoit pas la même contribution de la part de l'énergie de liaison gravitationnelle

$$m_g^P = m_{\text{in}} (1 - \eta \mathcal{S}_g) \quad (1.30a)$$

$$= m_c + (1 + \eta) E_g. \quad (1.30b)$$

La dernière égalité est à comparer avec l'équation (1.23). Le raisonnement ci-dessus nous conduit à formuler le principe d'équivalence sans omettre la charge gravitationnelle active.

Le **principe d'équivalence fort** requiert *l'universalité de la chute libre des corps quelque soit leur énergie de liaison gravitationnelle interne ainsi que l'indépendance des résultats d'expériences locales non-gravitationnelles ou gravitationnelles vis-à-vis de la position dans l'espace-temps et de la vitesse de chute libre du laboratoire dans lequel elles sont réalisées.*

L'étude du mouvement de corps de sensibilité \mathcal{S}_g non-nulle permet de sonder les fondements des théories métriques de la gravitation. Contrairement aux sensibilités que l'on pourrait associer aux interactions non-gravitationnelles, la sensibilité gravitationnelle croît avec la taille du corps considéré. La mécanique des corps célestes est donc un laboratoire idéal pour mettre en évidence l'effet Nordtvedt. Pour un corps sphérique de rayon L et de densité uniforme ρ , la sensibilité s'évalue à

$$\mathcal{S}_g = \frac{4}{5}\pi G_N \rho L^2. \quad (1.31)$$

Dans le cas extrême des trous noirs, situation relativiste et de champ intense, différents arguments permettent d'évaluer leur sensibilité à $\frac{1}{2}$. Ces raisonnements se basent soit sur l'émission d'ondes gravitationnelles par un système binaire de trous noirs dans le cadre des théories de Brans-Dicke [15] soit sur la dépendance de la masse d'un trou noir vis-à-vis de la constante de Newton, soit $m \propto G^{-\frac{1}{2}}$ [16]. La compacité des hadrons due à l'interaction nucléaire forte $s_{\text{QCD}} \simeq 1$ est donc plus élevée que la compacité gravitationnelle des trous noirs [16]!

L'accélération relative de la Terre et de la Lune, de sensibilités respectives 4.64×10^{-10} et 1.90×10^{-11} [17, 18], sous l'action gravitationnelle du Soleil permet d'évaluer le paramètre η . Le suivi de la distance Terre-Lune par télémétrie laser contraint η [19, 18]

$$\eta = (4.4 \pm 4.5) \times 10^{-4}. \quad (1.32)$$

Aucune accélération anormale n'a donc été détectée à ce jour. Le principe d'équivalence fort est aussi mis à l'épreuve en analysant les éléments orbitaux de systèmes binaires asymétriques (étoile à neutrons - naine blanche) [20]. De nouvelles contraintes pourraient être obtenues en exploitant les nouveaux systèmes binaires asymétriques récemment découverts [21, 22].

Ces mesures permettent aussi de contraindre la variation annuelle du couplage gravitationnel [19, 23]

$$\frac{\dot{G}}{G} = -(5 \pm 6) \times 10^{-13} \text{ a}^{-1}. \quad (1.33)$$

Une telle contrainte invalide l'hypothèse des grands nombres de Dirac [24] selon laquelle le couplage gravitationnel évolue avec le gradient H_0 de l'expansion cosmique : $|\frac{\dot{G}}{G}| \sim H_0 \sim 10^{-10} \text{ a}^{-1}$.

L'amplitude η de l'effet Nordtvedt s'exprime en fonction des paramètres post-newtoniens d'Eddington-Robertson [13, 14]

$$\eta = 4\beta - \gamma - 3, \quad (1.34)$$

où les paramètres β et γ sont issus du développement de la métrique, spatialement isotrope, en champ faible jusqu'à l'ordre deux dans le potentiel newtonien [25]

$$ds^2 = - [1 + 2\alpha V + 2\beta V^2] dt^2 + \left[1 - 2\gamma V + \frac{3}{2}\delta V^2 \right] (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1.35)$$

Les expériences cherchant à détecter les accélérations relatives entre corps tests de nature et de masse différentes permettent de poser $\alpha = 1$ à une part pour 10^{13} [26]. La meilleure mesure de la courbure de l'espace au voisinage du Soleil est obtenue à l'aide de la sonde spatiale Cassini [27], une contrainte sur γ en est dérivée. L'observation de l'avance du périhélie de Mercure [7] sonde les effets gravitationnels dans un régime plus intense (terme en V^2) et contraint donc à son tour le paramètre β :

$$\alpha - 1 \lesssim 10^{-13}, \quad (1.36a)$$

$$\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}, \quad (1.36b)$$

$$|2\gamma - \beta - 1| < 3 \times 10^{-3}. \quad (1.36c)$$

La contrainte (1.32) pour la combinaison de paramètres (1.34) est indépendante de ces deux dernières contraintes.

Ces valeurs sont à comparer aux prédictions des différentes théories de la Table 1.1. Les deux théories de Nordström sont exclues. En effet, elles prédisent

$$\alpha = -\gamma = 2\beta = \frac{3}{2}\delta = 1 \quad (W^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0, R = 0), \quad (1.37a)$$

$$\alpha = -\gamma, \quad 2\beta = \frac{3}{2}\delta \quad (W^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0). \quad (1.37b)$$

Alors que la relativité générale, sans constante cosmologique, prédit

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1, \quad (1.38)$$

en accord avec les valeurs expérimentales. Enfin, dans le cadre des théories "zéro- R ", d'après la condition $R = 0$, les paramètres vérifient [10]

$$\eta + \eta' = 0, \quad (1.39)$$

où η' est défini par

$$\eta' \equiv 6\delta - 6\gamma^2 - \gamma + 1. \quad (1.40)$$

Les valeurs des paramètres sont fonction de la réalisation de la théorie au travers du tenseur $\tau_{\mu\nu}$, Table 1.1.

Avant d'étendre l'effet Nordtvedt au contexte cosmologique, voici quelques rappels de cosmologie en matière d'introduction.

1.2 Le modèle du big-bang

En 1927, Georges Lemaître titre, en le paraphrasant, que l'*Univers subit une expansion universelle* et que *sa densité décroît avec son âge* [28]. Ces deux propositions forment les piliers de la cosmologie physique actuelle. La première pose que l'espace-temps, dynamique, induit un décalage vers le rouge des rayonnements émis par des objets lointains, décalage d'autant plus grand qu'ils sont distants. La seconde implique que l'Univers a une histoire thermique. Un univers d'autant plus froid qu'il est âgé et dont les différents champs de matière présents aujourd'hui sont les reliques stables de déséquilibres thermodynamiques engendrés dans le passé, à plus haute température, par l'expansion.

1.2.1 L'Univers homogène

On suppose le principe cosmologique : la distribution de matière est identique en tout point de l'espace et les résultats d'observations de l'Univers, réalisées dans un repère localement comobile à la matière, sont indépendants de la direction d'observation. Ce principe dérive de la constatation de l'isotropie de l'Univers tel que nous l'*observons* depuis notre position particulière dans l'espace-temps et du *postulat* d'universalité des lois de la physique en tout point de l'espace-temps .

Sous ces conditions d'homogénéité et d'isotropie, le tenseur énergie-impulsion total ou pour une espèce particulière prend la forme

$$T_{\nu}^{\mu} = [\bar{\rho}(\lambda) + \bar{p}(\lambda)] u^{\mu} u_{\nu} + \bar{p}(\lambda) \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (1.41)$$

où $u^{\mu} = dx^{\mu}(\lambda)/d\lambda$ est la quadri-vitesse, universelle, de la matière; $\bar{\rho}(\lambda)$ et $\bar{p}(\lambda)$ sont respectivement la densité d'énergie et la pression du fluide en question.

Dans la suite on substituera la pression par l'équation d'état du fluide

$$w(\lambda) \equiv \frac{\bar{p}(\lambda)}{\bar{\rho}(\lambda)}. \quad (1.42)$$

La métrique apparaît pour un observateur comobile à la matière sous la forme

$$d\lambda^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.43)$$

avec $a(t)$ le facteur d'échelle, normalisé aujourd'hui, $a(t_0) = 1$, et K désigne la courbure spatiale constante. Plutôt que de traiter les équations en fonction du temps propre ou temps cosmique dt , on utilise le temps conforme $d\tau$ que l'on déduit de la distance comobile parcourue par la lumière en un temps dt

$$d\tau \equiv \frac{dt}{a(t)}, \quad d\lambda^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.44)$$

Pour une espèce s , on déduit de l'équation du mouvement de chute libre (1.13) la loi de conservation de la matière dans un espace-temps en expansion

$$\bar{\rho}'_s = -3 \frac{a'}{a} (1 + w_s) \bar{\rho}_s, \quad \text{avec la dérivée } a'(\tau) \equiv \frac{da}{d\tau}, \quad (1.45)$$

dont la solution pour un fluide d'équation d'état constante vaut

$$\bar{\rho}_s(a) = \bar{\rho}_{s0} a^{-3(1+w_s)}. \quad (1.46)$$

1.2.2 La constante de Lemaître-Hubble

Le taux de dilution (1.45) de la matière est fonction de ses propriétés, w_s , mais aussi du taux d'expansion \mathcal{H} de l'espace-temps

$$\mathcal{H}(\tau) \equiv \frac{a'}{a}. \quad (1.47)$$

Sa valeur actuelle, dite constante de Lemaître-Hubble [28, 29], donne le gradient local d'expansion

$$H_0 \equiv \mathcal{H}(\tau_0). \quad (1.48)$$

Le taux d'expansion actuel est mesuré de manière directe en comparant le redshift et la distance des galaxies dans l'Univers proche. Grâce aux obser-

vations du télescope Hubble, la constante de Lemaître-Hubble est évaluée à $H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [30]. On utilise aussi la quantité normalisée $h \equiv H_0 / (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$.

On définit les densités relatives Ω_s en exprimant la densité actuelle $\bar{\rho}_{s0}$ d'une espèce par rapport à la densité critique ρ_{cr}

$$\Omega_s = \frac{\bar{\rho}_{s0}}{\rho_{\text{cr}}}, \quad \rho_{\text{cr}} \equiv \frac{3H_0^2}{\kappa}. \quad (1.49)$$

1.2.3 Equations de Friedmann-Lemaître

Enfin, le taux d'expansion est quant à lui déterminé par les équations de la relativité générale (1.19) qui, avec les symétries imposées, se réduisent à

$$\mathcal{H}^2 = \frac{a^2}{3} \left[\kappa \sum_s \bar{\rho}_s + \Lambda - \frac{3K}{a^2} \right], \quad (1.50a)$$

$$\mathcal{H}' = \frac{a^2}{3} \left[-\frac{\kappa}{2} \sum_s \bar{\rho}_s (1 + 3w_s) + \Lambda \right]. \quad (1.50b)$$

Ce sont les équations de Friedmann [31, 32] (traduction : [33, 34]) et de Lemaître [28].

On définit l'âge d'un univers dont la dynamique admet une singularité initiale en $a = 0$ par

$$t_0 \equiv \int_0^1 \frac{da}{\mathcal{H}}. \quad (1.51)$$

L'âge dépend de l'évolution du contenu au cours de l'expansion et de la constante de Lemaître-Hubble.

Un tel modèle, celui du big-bang, décrit donc un univers en *expansion* et en *évolution*, d'âge fini et satisfaisant le principe cosmologique. L'*expansion* est supportée par l'observation du décalage vers le rouge, ou redshift z , du rayonnement des galaxies dans l'univers tant proche que lointain,

$$z = \frac{1}{a} - 1. \quad (1.52)$$

Responsable de ce redshift cosmologique, la dilatation des échelles de temps des phénomènes distants a aussi été mesurée sur des intervalles de quelques semaines à l'aide des courbes de luminosité de supernovae de type Ia [35, 36].

L'évolution de la brillance de surface des galaxies est aussi un test de la réalité l'expansion [37].

A ces tests de l'expansion s'ajoutent ceux de l'*évolution*. Les preuves que l'Univers a une histoire thermique et a traversé plusieurs régimes, conséquence d'un âge borné, sont principalement les suivantes. L'abondance des éléments légers formés par synthèse nucléaire dans l'univers primordial, fonction de la fraction du nombre de baryons relative au nombre de photons, est en accord avec l'analyse du rayonnement de fond diffus cosmologique [38, 39]. Ce rayonnement de corps noir, *Cosmic Microwave Background* (CMB), trouve son origine dans la combinaison rapide des protons et des électrons en atomes neutres jusque-là maintenus à l'état de plasma, combinaison qui induit ensuite le découplage de la matière avec les photons du bain thermique. La décroissance de la température de ce rayonnement au cours de l'expansion est mesurée dans des systèmes lointains jusqu'à un redshift $z \simeq 3$ [40, 41]. Relevons aussi l'empreinte laissée dans les anisotropies du CMB par une autre relique de l'Univers chaud, les neutrinos [42, 38]. Quant au creux de Gunn-Peterson dans le spectre d'absorption des quasars de redshift $z \gtrsim 6$, il permet de sonder une partie la période dominée par la matière neutre située après la combinaison. L'absence d'un tel effet pour les quasars proches indique que l'Univers devient par la suite à nouveau ionisé. Par ailleurs, la distribution des inhomogénéités de matière contient deux échelles caractéristiques de l'évolution de l'Univers : la première est liée à la taille du rayon d'expansion au moment de l'égalité des densités de radiation et de matière, la seconde dépend du moment du découplage des photons et de la matière.

Passons en revue les différentes contributions aux membres de droite des équations de Friedmann-Lemaître.

Les radiations. Constituées des particules relativistes à une époque donnée, aujourd'hui seuls les photons et au plus une seule des trois familles de neutrinos associée aux neutrinos les plus légers les composent.⁸ Elles forment un fluide

⁸L'échelle absolue des masses des neutrinos n'est pas encore connue. Toutefois, des mesures des différences quadratiques des masses des neutrinos [43]

$$\Delta m_{\nu_{21}}^2 = (7.59 \pm 0.21) \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad (1.53a)$$

$$|\Delta m_{\nu_{32}}^2| = (2.43 \pm 0.13) \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (1.53b)$$

on déduit que la hiérarchie normale, soit $m_{\nu_1} < m_{\nu_2} \ll m_{\nu_3}$, est la plus légère, celle dont la densité d'énergie totale des neutrinos est la plus petite. Les masses des deux états les plus lourds sont alors contraintes par $m_{\nu_2} \gtrsim 8.7 \text{ meV}$ et $m_{\nu_3} \gtrsim 50 \text{ meV}$. Aujourd'hui, pour une telle hiérarchie, ces deux états de masse ne sont plus relativistes, même si le premier neutrino est de masse nulle, puisque $m_{\nu_i} \ll T_{\nu_i} \simeq 0.168 \text{ meV}$ ($i = 2, 3$), avec T_{ν_i} la température actuelle d'un fluide de neutrinos ν_i relativistes, équation (D.9). La hiérarchie inversée, soit $m_{\nu_3} \ll m_{\nu_1} < m_{\nu_2}$, elle aussi, n'autorise aujourd'hui, au plus, qu'une seule famille de neutrinos relativistes.

d'équation d'état $w_{\text{rad}} = \frac{1}{3}$, leur densité ρ_{rad} décroît dès lors comme a^{-4} . Elles régissent l'expansion de l'Univers jusqu'à un redshift $z_{\text{eg}} \simeq 3200$. La densité d'énergie des photons, largement dominée par le rayonnement de fond diffus cosmologique, vaut aujourd'hui d'après les mesures de l'instrument FIRAS embarqué sur le satellite COBE [39]

$$\Omega_\gamma h^2 = (2.4712 \pm 0.0018) \times 10^{-5} \quad (2\sigma). \quad (1.54)$$

La distribution en énergie des photons du CMB correspond à celle d'un corps noir de température⁹ $T_{\text{CMB}} = 2.725 \pm 0.002\text{K}$. Dans le cadre du Modèle Standard de la physique des particules, on déduit la densité associée à trois familles de neutrinos de masse nulle, elle s'élève à

$$\Omega_\nu h^2 \simeq 1.71 \times 10^{-5}. \quad (1.55)$$

Les baryons. On regroupe sous cette domination tant les nucléons que les électrons. Avec le secteur des photons, les baryons constituent l'univers *visible* qui peut être sondé de manière non-gravitationnelle. Aux températures qui nous intéressent, les baryons se comportent au niveau homogène comme un fluide de poussière de pression nulle, $w_b = 0$. Leur densité ρ_b évolue avec a^{-3} et est évaluée aujourd'hui à $\Omega_b \simeq 0.044$.

La matière sombre froide – cold dark matter (CDM). Contribution dominante de matière de pression nulle, d'origine inconnue mais non-baryonique de densité $\Omega_c \simeq 0.21$.

Baryons et matière sombre dominant l'Univers après l'ère de radiation avec une densité $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c \simeq 0.26$.

L'énergie sombre. Responsable de l'accélération tardive de l'expansion qui débute en $z_a \simeq 0.8$, l'énergie sombre domine les précédentes contributions après un redshift $z_d \simeq 0.4$. La constante cosmologique Λ de la relativité générale, équation (1.19), possède les propriétés suffisantes pour jouer le rôle de l'énergie sombre avec une densité d'énergie constante $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2 \simeq 0.74$, soit $\Lambda/\kappa \simeq (2.4 \text{ meV})^4$, son équation d'état effective est suffisamment négative, $w_\Lambda = -1$.

La courbure. Selon que K est positif, nul ou négatif, l'espace est respectivement sphérique, euclidien ou hyperbolique. Sous l'hypothèse d'un modèle d'univers minimal, la densité d'énergie associée au terme de courbure $\Omega_K = -K/H_0^2$ est actuellement contrainte à $-0.0178 < \Omega_K < 0.0063$ [38]. Dans la suite, on

⁹Une nouvelle calibration des données de FIRAS à l'aide de celles du satellite WMAP, donne, en combinaison avec d'autres sources de données, $T_{\text{CMB}} = 2.72548 \pm 0.00057\text{K}$ [44].

supposera la courbure nulle, ou du moins négligeable face aux perturbations de courbure.

Un inventaire du contenu de l'Univers sous plus de 40 formes est donné par [45].

Cet ensemble d'hypothèses sur le contenu de l'Univers, les lois gravitationnelles qui le gouvernent et les symétries de l'espace, constitue le modèle minimal, dit modèle Λ CDM.

Parmi le jeu de paramètres cosmologiques décrit jusqu'ici, seuls le taux d'expansion actuel H_0 et la densité physique de photons $\Omega_\gamma h^2$ sont mesurés directement. Leurs valeurs, au niveau de précision actuel, ne dépendent ni d'un modèle d'univers sous-jacent ni de la détermination des autres paramètres cosmologiques. Par ailleurs, comparée aux autres paramètres cosmologiques et à leurs incertitudes, on considère la densité physique des photons comme déterminée. La confrontation de la distance lumineuse des supernovae à leur redshift sonde la combinaison du paramètre d'accélération aux termes suivants du développement en série du facteur d'échelle en fonction du temps. Le paramètre d'accélération relève du second ordre de ce développement

$$q \equiv \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}, \quad (1.56)$$

Dans le modèle Λ CDM, trois paramètres restent donc à estimer pour décrire la dynamique d'un univers plat et les observables cosmologiques au niveau homogène : $\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$ et H_0 .

En résumé, les paramètres du modèle Λ CDM plat, ou leurs combinaisons, sont extraits des observables suivantes :

- $\Omega_\gamma h^2$, fonction de la température du CMB,
- $\Omega_b h^2 / \Omega_\gamma h^2$, déterminé par comparaison des abondances astrophysiques des éléments légers aux prédictions de la nucléosynthèse primordiale,
- Ω_m , obtenu par confrontation des redshifts de supernovae lointaines de type Ia et de leurs distances relatives,
- H_0 , dérivé de la relation linéaire entre les redshifts et les distances absolues d'objets dans l'Univers proche.

L'étude de la dynamique des fluctuations de densité des champs de matière introduit un deuxième ensemble de paramètres cosmologiques que nous décrivons dans la prochaine section. Eux non plus ne peuvent encore être dérivés de principes premiers. La Table B.1 renseigne un jeu de paramètres que nous utiliserons comme modèle de référence. Ce modèle est tiré de contraintes observationnelles concordantes, Table B.2.

Pour une revue historique de la recombinaison des électrons et des protons, on pourra consulter [46]. Le détail des processus est donné en [47, 48]. On trouvera une approche moderne pour le calcul de la recombinaison dans [49, 50] et de récents développements en [51, 48].

La nucléosynthèse primordiale des éléments légers [52, 53, 54] est brièvement abordée à la section 2.2.5, page 56. Pour une revue récente sur le problème du Lithium, voir [55].

Concernant les techniques de recensement de l'expansion cosmique on pourra se référer à [56], quant aux évidences de l'expansion accélérée on pourra consulter [57, 58, 59], ainsi que [60] et [61, 58, 62] pour des explications et des modèles alternatifs à la problématique constante cosmologique [63]

1.3 L'Univers perturbé

L'évolution des inhomogénéités des champs de matière et de la métrique est détaillée dans le cadre de la relativité générale à l'Annexe A, page 129. On y trouvera successivement la description statistique de ces fluctuations, les équations du mouvement des perturbations des différentes composantes de l'Univers ainsi que leurs solutions à différentes époques et échelles, pour enfin dériver les principales caractéristiques de deux observables cosmologiques : le spectre de puissance de la distribution de matière et le spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB.

Dans la section suivante, une violation du principe d'équivalence fort est envisagée au moment de la combinaison des électrons et des protons. Une contrainte sur l'amplitude d'une telle déviation à la relativité générale est obtenue en confrontant l'empreinte laissée dans les oscillations acoustiques du plasma baryons-photons aux mesures du spectre angulaire du CMB par le satellite WMAP.

1.4 L'effet Nordtvedt cosmologique

Le spectre du CMB dépend de la dynamique des perturbations de température au moment de la recombinaison. Il se révèle donc comme un laboratoire idéal pour l'étude de théories de gravitation dont les déviations à la relativité générale se manifestent tôt dans l'histoire thermique de l'Univers.

Nous proposons ici un test de la relativité générale au niveau cosmologique [1, 2, 3] en cherchant dans le spectre du CMB la signature d'une violation du principe

d'équivalence fort induite par une dépendance en les coordonnées d'espace du couplage gravitationnel $G(\vec{x})$.

1.4.1 Equations du mouvement

A la manière de l'effet Nordtvedt introduit plus haut pour les corps compacts, au niveau quasi-Newtonien l'effet d'une déviation à la relativité générale est intégré dans une modification du couplage gravitationnel (1.28). La dépendance de ce couplage en la position est donnée par le potentiel Φ , équation (A.9a). Dans un champ gravitationnel, le mouvement des corps possédant une énergie de liaison gravitationnelle non-négligeable en est affecté. Un tel corps existe dans l'Univers primordial : le fluide des baryons, intensément couplé au fluide de photons par diffusion Compton, subit une série d'oscillations avant la recombinaison. Le mélange de ces deux fluides est en chute libre dans les potentiels gravitationnels dont la source principale est extérieure au mélange : la matière sombre.

Pour un fluide dont l'énergie de liaison gravitationnelle interne n'est pas négligeable, le terme source (1.25) qui reflète la violation du SEP s'écrit

$$\frac{\partial \ln G}{\partial x^\mu} \frac{dT}{d \ln G} = \rho(1 - 3w) \frac{\partial \ln G}{\partial x^\mu} \mathcal{S}, \quad (1.57)$$

avec \mathcal{S} la sensibilité de la densité du fluide aux variations de G , que nous évaluerons plus tard,

$$\mathcal{S} = \frac{d \ln \rho}{d \ln G}. \quad (1.58)$$

La dépendance spatiale du couplage gravitationnel responsable donc de la violation du SEP est paramétrée à la manière de l'équation (1.28)

$$G(\vec{x}) = G_N(1 + \eta\Phi). \quad (1.59)$$

On en déduit pour les perturbations cosmologiques que la violation du principe d'équivalence fort intervient via un terme source en Ξ , équation (A.18),

$$\Xi = \frac{1 - 3w}{1 + w} \eta\Phi\mathcal{S}, \quad (1.60)$$

pour les équations du mouvement (A.17).

1.4.2 Oscillations acoustiques

Dans le régime du couplage intense entre photons et baryons les vitesses des fluides de baryons et de photons s'égalisent, $v_\gamma = v_b$. En combinant les équations d'évolution des deux fluides parfaits de photons et de baryons, équations (A.35) et (A.37), on obtient

$$\delta_\gamma'' + \frac{\mathcal{R}'}{1+\mathcal{R}}\delta_\gamma' + k^2 c_A^2 \delta_\gamma = 4\Psi'' + 4\frac{\mathcal{R}'}{1+\mathcal{R}}\Psi' - 4k^2 c_A^2 \Phi[1 + \mathcal{R}(1 - \eta\mathcal{S}_b)], \quad (1.61)$$

avec pour célérité acoustique

$$c_A = \frac{1}{\sqrt{3(1+\mathcal{R})}}. \quad (1.62)$$

Cette équation différentielle nous indique que le fluide de photons et de baryons subit une série d'oscillations acoustiques. Face aux oscillations rapides de la densité, négligeons les variations des potentiels et du rapport des densités baryons-photons \mathcal{R} . L'équation se réduit alors pour la température Sachs-Wolfe Θ_0^{SW} à

$$\Theta_0^{\text{SW}''} + k^2 c_A^2 \Theta_0^{\text{SW}} = -k^2 c_A^2 \Phi \mathcal{R}(1 - \eta\mathcal{S}_b). \quad (1.63)$$

La pression de radiation des photons, terme en c_A^2 du membre de gauche de la précédente équation, provoque une série d'oscillations de la température effective (Θ_0^{SW}) du fluide dont la valeur moyenne est déplacée par le poids des baryons, terme en $\Phi\mathcal{R}$. C'est cette compétition entre effets inertiel et gravitationnel qui nous permet de sonder la violation du principe d'équivalence fort. On résout cette équation en effectuant le changement de variable $d\tau \rightarrow kdr_s$, avec $r_s(\tau)$ l'horizon acoustique comobile défini par

$$r_s(\tau) \equiv \int_0^{a(\tau)} c_A(a) da. \quad (1.64)$$

Les constantes d'intégration sont obtenues en remarquant d'abord que les conditions initiales adiabatiques (A.51) et (A.54) indiquent qu'au départ les perturbations sont gelées jusqu'à l'ordre deux en $k\tau$, préférant la solution en $\cos[kr_s(\tau)]$ à celle en $\sin[kr_s(\tau)]$. Ensuite, étant intéressé par la solution pour les modes dont le type devient sub-expansion¹⁰ après la transition radiation-matière, on exprime l'amplitude des oscillations en fonction de quantités éva-

¹⁰Un mode de Fourier de nombre d'onde k est de type sub-expansion quand la longueur d'onde associée est très petite devant le rayon d'expansion \mathcal{H}^{-1} , soit $k\mathcal{H}^{-1} \gg 1$, et de type super-expansion lorsque $k\mathcal{H}^{-1} \ll 1$.

luées au moment de cette transition, lorsque la condition $kr_s(\tau_{\text{eg}}) \ll 1$ est encore vérifiée. La solution à l'équation du mouvement du fluide s'écrit ainsi

$$\Theta_0^{\text{SW}}(k, \tau) = [\Theta_0^{\text{SW}} + \mathcal{R}(1 - \eta\mathcal{S}_b)\Phi](k, \tau_{\text{eg}}) \cos[kr_s(\tau)] - \mathcal{R}(1 - \eta\mathcal{S}_b)\Phi. \quad (1.65)$$

Au moment de la recombinaison, le rapport entre les deux premiers extrema devient

$$H_{12} \equiv \frac{\Theta_0^{\text{SW}}(k_*/2, \tau_*)}{\Theta_0^{\text{SW}}(k_*, \tau_*)} = -\frac{\Phi(k_*/2, \tau_{\text{eg}})}{\Phi(k_*, \tau_{\text{eg}})} [1 + 4\mathcal{R}(1 - \eta\mathcal{S}_b)], \quad (1.66)$$

où $k_* \equiv 2\pi/r_s(\tau_*)$.

Dans l'approximation d'une recombinaison instantanée, la contribution acoustique (A.81a) au spectre angulaire du CMB est donnée par la température Sachs-Wolfe au moment de la recombinaison, $\Theta_0^{\text{SW}}(k, \tau_*)$. A temps fixé, la température effective du fluide oscille en fonction de k , cette modulation est ensuite répercutée dans le spectre du CMB : c'est la structure en pics acoustiques du CMB.

Comparer l'amplitude des deux premiers pics acoustiques du spectre observable permet donc de sonder la violation du principe d'équivalence fort au moment de la recombinaison.

1.4.3 Unicité de la signature et dégénérescence

Extraire une valeur ou une contrainte des données du CMB sur l'amplitude de la violation du principe d'équivalence fort, η , demande d'abord de mettre en exergue les éventuelles dégénérescences entre les paramètres cosmologiques introduites par η . Après inspection de l'équation (1.66), deux dégénérescences émergent. Premièrement, le paramètre η est dégénéré avec la densité des baryons $\Omega_b h^2$ contenue dans la variable \mathcal{R} , relation (A.32), la quantité $\Omega_\gamma h^2$ étant considérée comme connue. Ensuite, le rapport des hauteurs des pics acoustiques est lui aussi fonction du rapport des températures Sachs-Wolfe initiales qui dépend à son tour du spectre primordial des fluctuations. Pour un spectre paramétré comme en (A.62), le rapport est fonction de l'indice spectral n_s et égal à 2^{1-n_s} .

Ces dégénérescences sont brisées en obtenant des contraintes sur $\Omega_b h^2$ et n_s indépendamment du rapport des hauteurs entre les pics pairs et impairs. Ces observables internes au spectre du CMB sont pour l'indice spectral le plateau

Sachs-Wolfe et le rapport des hauteurs des pics de parité identique. La position horizontale des pics acoustiques est fonction du multipôle acoustique l_A caractéristique de l'échelle angulaire acoustique θ_{A*} au moment de la recombinaison

$$l_A \equiv \frac{\pi}{\theta_{A*}}, \quad (1.67a)$$

$$\theta_{A*} \equiv \frac{r_s(\tau_*)}{D_A(\tau_*)}, \quad (1.67b)$$

où $D_A(\tau_*) = \tau_0 - \tau_*$ représente la distance comobile nous séparant de la surface de dernière diffusion. La position horizontale des pics permet donc de déterminer la densité des baryons, soit \mathcal{R} . Indépendamment du CMB, cette dernière s'extrait aussi en analysant l'abondance des éléments légers à la lumière de la nucléosynthèse primordiale.

On sépare ainsi la contribution des baryons au CMB en deux parts. La première est une contribution d'origine inertielle, la quantité de baryons détermine le moment de la recombinaison, la valeur de la célérité acoustique du plasma photons-baryons à ce moment et par conséquent fixe la taille angulaire des anisotropies du CMB. La seconde contribution est gravitationnelle, le poids des baryons induit l'assymétrie entre pics pairs et impairs. On apprend de l'équation (1.61) que le poids des baryons \mathcal{R}_{gr} s'exprime en fonction de leur densité inertielle \mathcal{R} selon

$$\mathcal{R}_{\text{gr}} = \mathcal{R}(1 - \eta\mathcal{S}_b). \quad (1.68)$$

1.4.4 Contraintes

La densité inertielle s'obtient soit en mesurant la position des pics acoustiques, soit à l'aide de la nucléosynthèse primordiale. La densité gravitationnelle est exclusivement dérivée du rapport des hauteurs des deux premiers pics acoustiques du spectre du CMB.

De l'erreur expérimentale ΔH_{12} sur l'estimation du rapport des hauteur des deux premiers pics du CMB, on infère la variation permise de \mathcal{R}_{gr} . De l'équation (1.66) et sous l'hypothèse d'un spectre primordial en loi de puissance (A.62) on déduit que

$$\frac{\Delta \mathcal{R}_{\text{gr}}}{\mathcal{R}_{\text{gr}}} = \frac{1 + 4\mathcal{R}_{\text{gr}}}{4\mathcal{R}_{\text{gr}}} \left[\frac{\Delta H_{12}}{H_{12}} + \ln 2 \Delta n_s \right]. \quad (1.69)$$

De l'absence de dégénérescence supplémentaire due à la violation du principe d'équivalence fort envisagée, on reprend l'estimation de l'erreur de l'indice spectral Δn_s issue des analyses standards, colonne WMAP5 de la Table B.2, soit $\Delta n_s = 0.014$. L'erreur ΔH_{12} est dérivée de la Table 9 de la référence [64]. Les amplitudes des perturbations associées aux premier et second pics s'évaluent donc, à un niveau de confiance de 68%, respectivement à

$$\delta T_1 = 0.8494 \pm 0.0050 \mu K, \quad (1.70a)$$

$$\delta T_2 = 0.2351 \pm 0.0038 \mu K. \quad (1.70b)$$

On en déduit que l'erreur sur le rapport des hauteurs des pics s'élève à $\Delta H_{12}/H_{12} = 0.022$. Le dernier élément pour l'évaluation de $\Delta \mathcal{R}_{\text{gr}}$ est la valeur de \mathcal{R}_{gr} qui est prise égale à la quantité inertielle $\mathcal{R} = 0.6276$, d'après le jeu de paramètres de la Table B.1. On se limite en effet à estimer les barres d'erreurs et donc l'amplitude de la violation du principe d'équivalence fort qu'il est possible d'obtenir, sans chercher à comparer les valeurs absolues des paramètres tels que \mathcal{R}_{gr} ou η . On a finalement $\Delta \mathcal{R}_{\text{gr}}/\mathcal{R}_{\text{gr}} = 0.031$.

A l'aide de simulations numériques [65] du spectre du CMB, la contrepartie inertielle s'obtient en observant que la position l_1 du premier pic acoustique varie avec la quantité de baryons comme

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} \simeq 0.16 \frac{\Delta \mathcal{R}}{\mathcal{R}}. \quad (1.71)$$

D'après les données WMAP3 [64], le premier pic est trouvé en $l_1 = 220.8 \pm 0.7$, dès lors $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R} = 0.020$.

La densité inertielle des baryons se déduit aussi de mesures des abondances primordiales des éléments légers tels que le deutérium, l'hélium. Les abondances de ces éléments dépendent notamment de la compétition entre les processus nucléaires et le taux d'expansion au moment de la nucléosynthèse primordiale, lorsque que la température moyenne de l'Univers est de l'ordre de 0.1 MeV. Le principe d'équivalence d'Einstein étant maintenu, les processus nucléaires sont insensibles à la modification de la gravité envisagée ici. Le taux d'expansion est quant à lui indépendant du paramètre déterminant l'amplitude de la violation du principe d'équivalence fort. La densité de baryons régit étroitement la production de deutérium. Dès lors, la compilation [54] d'observations de l'absorption du rayonnement de quasars lointains par des nuages riches en hydrogène permet d'inférer que $\Omega_b h^2 = 0.021 \pm 0.001$, soit $\Delta \mathcal{R}/\mathcal{R} = 0.05$.

En combinant les contraintes sur les densités gravitationnelles et inertielles, on obtient la contrainte sur le produit $\eta\mathcal{S}_b$,

$$\text{CMB : } \quad \Delta(\eta\mathcal{S}_b) = 0.064, \quad (1.72a)$$

$$\text{CMB-BBN : } \quad \Delta(\eta\mathcal{S}_b) = 0.09. \quad (1.72b)$$

Il reste à évaluer la sensibilité des baryons au moment de la recombinaison, équation (1.58). Sous l'hypothèse d'une distribution homogène des baryons, la compacité d'une région sphérique de baryons de rayon physique L s'évalue à

$$\mathcal{S}_b = \frac{4\pi}{5}G\bar{\rho}_b L^2. \quad (1.73)$$

La taille de la région de baryons est associée au rayon d'expansion, $L = a\mathcal{H}^{-1}$. Dès lors, au moment de la recombinaison, la sensibilité vaut

$$\mathcal{S}_b = 0.038. \quad (1.74)$$

Combinée aux contraintes sur le produit $\eta\mathcal{S}_b$, on déduit finalement que l'incertitude sur l'amplitude de la violation du principe d'équivalence fort déduite d'une l'analyse du CMB ou de la nucléosynthèse primordiale s'élève à

$$\text{CMB : } \quad \Delta\eta = 1.7, \quad (1.75a)$$

$$\text{CMB-BBN : } \quad \Delta\eta = 2.5. \quad (1.75b)$$

Ces résultats sont à comparer à la contrainte obtenue dans le système solaire, équation (1.32). Bien que nos contraintes soient nettement moins fortes, elles sondent la violation du principe d'équivalence fort sur des distances cosmologiques et à une époque cosmologiquement différente, à un redshift d'environ 1100. Dans le cadre de théories de gravitation de Brans-Dicke étendues associées à un mécanisme de convergence vers la relativité générale, le comportement typique des paramètres qui mesurent la déviation à la relativité générale est le suivant. Ils sont d'abord figés dans l'ère de radiation puis décroissent dans les ères ultérieures. Entre la recombinaison et aujourd'hui, la dynamique des paramètres de déviation à la relativité générale dépend évidemment du modèle en particulier. Par conséquent, pour les modèles dont la variation est d'au moins trois ordres de grandeurs, les contraintes (1.75) suggérées par le CMB sont pertinentes.

1.5 En résumé

Après avoir introduit les éléments essentiels de gravitation et de cosmologie, nous avons proposé un test cosmologique de la relativité générale. Ce test applique l'effet Nordtvedt au plasma primordial afin de mettre en évidence une éventuelle violation du principe d'équivalence fort. En présence de champs auxiliaires de gravitation modifiant le couplage gravitationnel, l'énergie de liaison gravitationnelle interne des corps ne contribue plus de la même manière aux masses inertielle et gravitationnelle passive. L'universalité de la chute libre de ces corps est brisée. L'effet est d'autant plus grand que le corps est dense ou d'extension spatiale large. Nous avons exploité cette deuxième propriété pour les régions de baryons. L'éventuelle violation du principe d'équivalence fort altère la chute libre des baryons dans les puits de potentiels gravitationnels créés par la matière noire. La position d'équilibre des oscillations acoustiques en est déplacée. La signature d'un tel effet se révèle au niveau du rapport des hauteurs des pics acoustiques pairs et impairs du spectre angulaire des anisotropies du fond diffus cosmologique. L'empreinte est notamment dégénérée avec la densité inertielle des baryons. Cette dégénérescence est supprimée en exploitant des mesures de la densité de baryons indépendantes de la hauteur des pics acoustiques. L'amplitude de l'éventuelle violation du principe d'équivalence fort est estimée sur base des mesures du satellite WMAP et des mesures des abondances des éléments légers issus de la nucléosynthèse primordiale.

Pour contraindre une éventuelle violation du principe d'équivalence fort au niveau cosmologique, différentes approximations ont été réalisées. D'abord, remarquons celles qui ont permis une résolution analytique des oscillations acoustiques, au profit de l'interprétation physique mais aux dépens de la précision. Une résolution numérique des phénomènes acoustiques et gravitationnels est dès lors indispensable. Par ailleurs, une telle résolution permet de mieux comparer les prédictions et les résultats observationnels afin de chercher et ensuite de réduire les éventuelles dégénérescences entre les paramètres cosmologiques.

La plus sérieuse des approximations se situe cependant au niveau de l'implémentation même de l'effet d'une théorie alternative de gravitation au travers de la seule dépendance spatiale du couplage gravitationnel. D'autres effets sont en principe à envisager, comme par exemple une modification du taux d'expansion, une évolution temporelle du couplage gravitationnel, des sources supplémentaires pour les potentiels gravitationnels. Au chapitre qui suit, l'étude d'une théorie alternative particulière dotée d'un champ auxiliaire s'impose donc, au détriment d'une analyse générique. Le spectre angulaire du CMB et le spectre de la matière seront obtenus numériquement en tenant compte de ces effets. De

la confrontation entre les prédictions du spectre du CMB et les observations du satellite WMAP on dérivera, à l'aide de simulations Monte Carlo (MCMC), une contrainte sur la densité d'énergie du champ auxiliaire de gravitation.

Chapitre 2

Implémentation scalaire de la gravité “zéro- R ”

L’empreinte d’une violation du principe d’équivalence fort laissée sur les anisotropies CMB est ici mise à l’étude dans un cadre particulier. La théorie de gravitation, examinée plus spécifiquement dans ce chapitre, appartient à la famille des théories tenseur-scalaire étendues de Brans-Dicke. Notre choix est guidé par les contraintes sur la décomposition du tenseur de Riemann, table 1.1.

Parmi les différentes possibilités répertoriées dans cette table, comme nous l’avons vu, les théories de Nordström sont exclues par les tests dans le système solaire. Quant à la relativité générale, elle passe avec succès ces tests. Reste les théories “zéro- R ”, dont l’amplitude des déviations à la relativité générale est fonction de la nature des champs auxiliaires de gravitation qu’elle introduit ; c’est-à-dire, fonction de l’implémentation du tenseur source $\tau_{\mu\nu}$. De part la présence de champs auxiliaires, les théories de cette classe ne respectent pas le principe d’équivalence fort. Au cours de ce chapitre nous chercherons à révéler la violation du principe d’équivalence fort pour une implémentation minimale de cette classe de théories à l’aide d’un seul champ scalaire.

Après avoir proposé une contrainte théorique sur la densité du champ scalaire, nous détaillerons le comportement du champ scalaire dans l’Univers au niveau tant homogène que perturbé. L’étude de l’influence gravitationnelle de ce champ sur les autres composantes de l’Univers nous permettra ensuite d’évaluer la déviation à la relativité générale maximale permise par les observations en cosmologie.

2.1 Equations des champs

D’après le principe d’équivalence fort, le couplage gravitationnel de deux corps est indépendant de leurs qualités respectives, qu’elles soient d’origine simple (entre corps tests), non-gravitationnelle (en incluant les interactions internes aux corps) ou gravitationnelle. L’expression de cette universalité au travers d’une équation du mouvement est obtenue en poussant l’analogie entre relativité générale et théories de jauge jusqu’aux équations des champs. L’analogie gravitationnel de l’équation du tenseur de courbure de la connexion de jauge s’écrit pour le tenseur de courbure de l’espace-temps [10]

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma|\mu} = 0. \quad (2.1)$$

Il est remarquable que dans la limite en champ faible, en termes des paramètres post-newtoniens (1.34) et (1.40), cette relation implique que

$$\eta = 0 \quad \Leftrightarrow R^\mu{}_{00k|\mu} = 0, \quad (2.2a)$$

$$\eta' = 0 \quad \Leftrightarrow R^\mu{}_{ijk|\mu} = 0, \quad (2.2b)$$

où $\eta = 0$ est précisément la condition nécessaire de validité du principe d’équivalence fort recherchée. Au chapitre précédent, table 1.1, quelques théories de gravitation ont été classées sur base de la décomposition du tenseur de Riemann, relation (1.14). Pour cette décomposition, la condition (2.1) est équivalente à imposer conjointement que

$$W^\mu{}_{\nu\rho\sigma|\mu} = 0 \quad (2.3a)$$

$$R_{|\mu} = 0. \quad (2.3b)$$

A leur tour, ces équations se traduisent, dans la limite en champ faible, respectivement par

$$2\eta - \eta' = 0 \quad (2.4a)$$

$$\eta + \eta' = 0. \quad (2.4b)$$

La relativité générale et la théorie de Nordström satisfont simultanément ces deux conditions. Quant à la théorie “zéro- R ”, elle n’intègre pas le principe d’équivalence fort, $\eta \neq 0$ et $\eta' \neq 0$. Toutefois, on dira que dans ce cadre il est violé de manière minimale puisque la seconde condition est vérifiée, $\eta + \eta' = 0$.

On cherche l’implémentation d’une théorie “zéro- R ” sous la forme d’une théorie tenseur-scalaire de Brans-Dicke étendue dont l’action, en l’absence d’auto-

interaction du champ scalaire Φ^{BD} , s'écrit

$$S = \frac{1}{2\bar{\kappa}} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi^{\text{BD}} R - \frac{\omega(\Phi^{\text{BD}})}{\Phi^{\text{BD}}} \partial^\mu \Phi^{\text{BD}} \partial_\mu \Phi^{\text{BD}} \right] + S_\psi[g_{\mu\nu}, \psi]. \quad (2.5)$$

avec S_ψ est l'action des champs de matière ψ . La constante cosmologique est ici omise ou bien sens-entendue dans l'action des champs de matière.

Dans le vide, la condition $R = 0$ devient une équation différentielle¹ pour la fonction de couplage $\omega(\Phi^{\text{BD}})$

$$\omega - \frac{3\Phi^{\text{BD}}}{2\omega + 3} \frac{d\omega}{d\Phi^{\text{BD}}} = 0. \quad (2.8)$$

La fonction de couplage, qui définit donc l'implémentation scalaire d'une théorie "zéro- R ", est solution de l'équation précédente

$$\omega(\Phi^{\text{BD}}) = \frac{3}{2} \frac{\Phi^{\text{BD}}}{\Phi_0^{\text{BD}} - \Phi^{\text{BD}}}, \quad \text{théorie "zéro-}R\text{" scalaire} \quad (2.9)$$

L'action (2.5) est indépendante de la constante Φ_0^{BD} , à un changement d'échelle de Φ^{BD} et $\bar{\kappa}$ près. Optons pour $\Phi_0^{\text{BD}} = 1$, soit $\bar{\kappa} = \kappa$.

Redéfinissons ensuite le champ scalaire,

$$\Phi^{\text{BD}} \equiv 1 - \frac{\kappa\varphi^2}{6}, \quad (2.10)$$

¹En théorie tenseur-scalaire, le couplage gravitationnel effectif et les paramètres post-newtoniens s'écrivent

$$G = \frac{G_N}{\Phi^{\text{BD}}} \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \quad (2.6a)$$

$$\gamma - 1 = -\frac{1}{\omega + 2} \quad (2.6b)$$

$$\beta - 1 = \frac{d\omega}{d\Phi^{\text{BD}}} \frac{\Phi^{\text{BD}}}{(2\omega + 3)(2\omega + 4)^2} \quad (2.6c)$$

$$\delta = \frac{4}{3}(\beta - 1) + \frac{1}{6}(8\gamma^2 - \gamma - 1) \quad (2.6d)$$

et par conséquent

$$2\eta - \eta' = 2(1 - \gamma^2) \quad (2.7a)$$

$$\eta + \eta' = 12(\beta - 1) + (\gamma - 1)(2\gamma - 1). \quad (2.7b)$$

de sorte que le terme cinétique du champ scalaire dans l'action (2.5), exprimé cette fois-ci en termes de φ , soit canonique [66]

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(1 - \frac{\kappa\varphi^2}{6}\right) R - \kappa \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi \right] + S_\psi[g_{\mu\nu}, \psi]. \quad (2.11)$$

Remarquons que cette théorie est différente de celle où le couplage non-minimal ne possède pas de terme constant, soit $-\frac{\kappa\varphi^2}{6}R$, voir par exemple [67]. Cette dernière, est associée à une théorie de Brans-Dicke avec une fonction de couplage ω constante, indépendante du champ auxiliaire, $\omega = -\frac{3}{2}$. L'Annexe C, page 161, détaille les différentes paramétrisations des champs auxiliaires, l'évolution cosmologique du champ scalaire dans la représentation d'Einstein y est aussi calculée.

Après cette reparamétrisation du secteur du champ scalaire, les équations du mouvement de la métrique et de φ deviennent

$$\left(1 - \frac{\kappa\varphi^2}{6}\right) G_\nu^\mu = \kappa (T_{\psi\nu}^\mu + \mathcal{T}_{\varphi\nu}^\mu), \quad (2.12a)$$

$$\square\varphi = \frac{\varphi}{6}R, \quad (2.12b)$$

où $\mathcal{T}_{\varphi\nu}^\mu$ est le tenseur énergie-impulsion habituel du champ scalaire en théorie tenseur-scalaire. En y incorporant le terme en $\varphi^2 G_{\mu\nu}$ du membre de gauche de l'équation (2.12a), l'équation d'Einstein prend alors la forme

$$G_\nu^\mu = \kappa (T_{\psi\nu}^\mu + T_{\varphi\nu}^\mu), \quad (2.13)$$

avec $T_{\varphi\nu}^\mu$ en tenseur énergie-impulsion effectif du champ scalaire

$$T_{\varphi\nu}^\mu \equiv \frac{\varphi^2}{6} G_\nu^\mu - \frac{\varphi}{3} (\varphi^{|\mu}{}_{|\nu} - \delta_\nu^\mu \square\varphi) + \frac{2}{3} (\varphi^{|\mu} \varphi_{|\nu} - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu \varphi^{|\alpha} \varphi_{|\alpha}). \quad (2.14)$$

Ce tenseur étant de trace nulle, il ne contribue pas au scalaire de courbure quels que soient le contexte et la configuration des autres champs

$$R = -\kappa T_\psi. \quad (2.15)$$

Le secteur scalaire de l'action (2.5), exprimé en terme de φ est en effet invariant sous la transformation locale d'échelle $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2 g_{\mu\nu}$, $\varphi \rightarrow \Omega\varphi$. On parlera alors de couplage conforme pour la théorie définie par (2.9).

Soulignons que ce tenseur énergie-impulsion est associé à quatre lois de conservation

$$T_{\varphi\nu|\mu}{}^{\mu} = 0. \quad (2.16)$$

La conservation du tenseur énergie-impulsion ne signifie pas que le champ scalaire φ vérifie isolément le principe d'équivalence faible. Les dérivées secondes de la métrique apportées par le terme $\varphi^2 G_{\nu}^{\mu}$, reflet du couplage non-minimal, ne peuvent pas être annulées par un changement de coordonnées. Elles induisent, par le biais de l'équation tensorielle (2.13), la violation du principe d'équivalence fort dans le secteur de la matière.

2.2 Solution dans l'univers de Friedmann-Lemaître

2.2.1 Solution générale et exacte

Dans un univers de Friedmann-Lemaître, en présence ou non des autres champs de matière ou d'une éventuelle constante cosmologique, l'équation de Klein-Gordon (2.12b) se réduit à

$$(a\varphi)'' = 0, \quad (2.17)$$

où $\varphi = \varphi(\tau)$.

La solution générale à cette équation est obtenue en termes du facteur d'échelle a et du temps conforme τ

$$\varphi = \frac{c_1}{a} + c_2 \frac{\tau}{a}, \quad (2.18)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration. Puisque les observables physiques sont indépendantes du signe de φ , on requiert que $c_2 \geq 0$, le signe de c_1 reste libre. La seconde est éliminée au profit de la densité d'énergie du champ scalaire, ρ_{φ} ,

$$\rho_{\varphi}(a) \equiv T_{\varphi 0}^0, \quad (2.19)$$

puisque

$$\begin{aligned} T_{\varphi 0}^0 &= \frac{1}{2a^4} [(a\varphi)']^2, \\ &= \frac{c_2^2}{2a^4}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les constantes c_1 et c_2 sont avantageusement remplacées respectivement par $\sqrt{\frac{6}{\kappa}}\mu$ et $\sqrt{\frac{6}{\kappa}}\Omega_\varphi H_0^2$, de sorte que

$$\varphi = \sqrt{\frac{6}{\kappa}} \left(\frac{\mu}{a} + \sqrt{\Omega_\varphi H_0^2} \frac{\tau}{a} \right), \quad (2.21)$$

avec Ω_φ la densité d'énergie du champ mesurée relativement à la densité critique de l'univers en question, équation (1.49)

$$\rho_\varphi(a) = \rho_{\text{cr}0} \frac{\Omega_\varphi}{a^4}. \quad (2.22)$$

Les solutions associées à une densité d'énergie nulle, $\Omega_\varphi = 0$ mais $\mu \neq 0$, seront appelées *modes d'énergie nulle*. La solution dans la représentation d'Einstein est obtenue à l'Annexe C.

2.2.2 Fluide de radiation sombre

L'évolution de l'Univers dans le cadre de cette théorie se comprend soit en termes du champ φ , équation (2.21), soit en fonction d'un fluide effectif. En voici les propriétés.

A ce stade-ci, dans un univers homogène, seules les composantes diagonales de $T_{\varphi\nu}^\mu$ sont non-nulles. L'isotropie impose à son tour que les composantes spatiales soient identiques. Si bien que, en vertu de l'invariance d'échelle du secteur scalaire, $T_{\varphi\mu}^\mu = 0$, le fluide effectif se comporte comme un fluide de radiation. En effet, l'équation d'état s'écrit

$$\begin{aligned} w_\varphi &\equiv \frac{p_\varphi}{\rho_\varphi} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le paramètre d'état étant constant, le carré de la célérité acoustique adiabatique $c_{A\varphi}^2$ lui est égal

$$\begin{aligned} c_{A\varphi}^2 &\equiv \frac{p'_\varphi}{\rho'_\varphi} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

En l'absence de couplage direct entre le champ scalaire et les champs de matière dans l'action (2.5), le fluide de radiation est dit sombre ou stérile.

D'après (2.20) et (2.23), la constante μ ne contribue pas au terme source des équations de Friedmann-Lemaître. A priori, les modes d'énergie nulle n'affectent donc pas l'expansion d'un univers homogène. Par conséquent, de ces deux nouveaux paramètres, μ et Ω_φ , seule la densité d'énergie du champ scalaire contrôle l'expansion.

2.2.3 Convergence vers la relativité générale

Relaxation

En théorie tenseur-scalaire, l'attraction vers la relativité générale au cours de l'expansion cosmologique est assurée si, et seulement si, asymptotiquement, les paramètres γ et β du développement d'Eddington-Robertson tendent vers l'unité. Pour la théorie "zéro- R ", ces paramètres deviennent, équations (2.6) et (2.7),

$$\gamma - 1 = -\frac{2\kappa\varphi^2}{18 + \kappa\varphi^2}, \tag{2.25}$$

$$\beta - 1 = -\frac{1}{12}(\gamma - 1)(2\gamma - 1). \tag{2.26}$$

La convergence est donc obtenue si asymptotiquement le champ scalaire tend vers zéro. Dans le cas d'un univers en expansion, le terme en $\frac{\tau}{a}$ de l'expression (2.21) déterminera la convergence. Cette condition est satisfaite pour autant que le paramètre d'état effectif w du contenu total de l'univers, relation (A.42a), vérifie $w < \frac{1}{3}$, puisque $\frac{\tau}{a} \propto a^{-\frac{1}{2}(1-3w)}$. En cosmologie standard, une telle condition est rencontrée dès que la densité de matière $\bar{\rho}_m(a)$ n'est plus négligeable comparée à la densité totale des radiations.

La relaxation vers la relativité générale est d'autant plus rapide que le paramètre d'état effectif est petit. Par exemple, l'expansion accélérée d'un univers

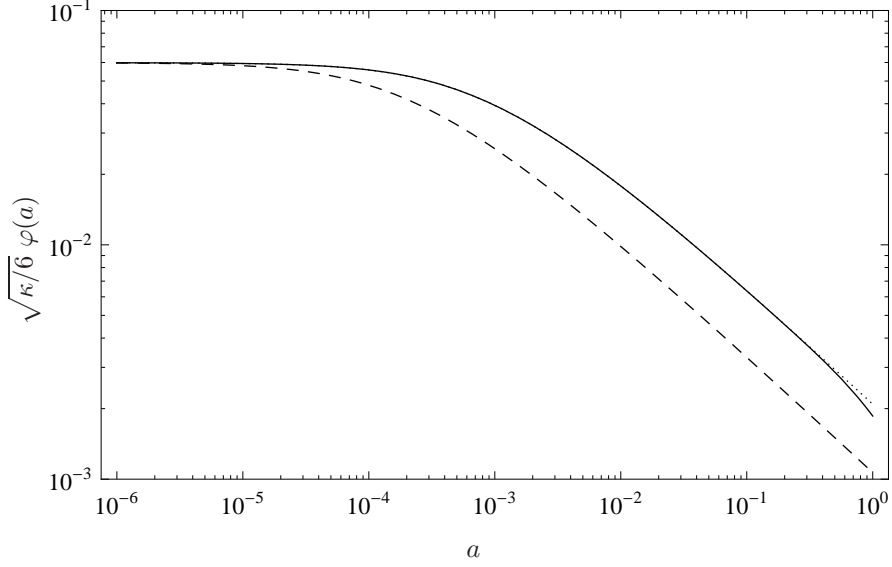


Fig. 2.1 – Evolution temporelle du champ scalaire pour les modèles suivants : $\Omega_{m1} = 1$, $\Omega_{\Lambda1} = 0$ (traits tirets) et $\Omega_{m2} = 0.256$, $\Omega_{\Lambda2} = 0.744$ (trait continu); les autres paramètres cosmologiques étant pris à leur valeur de référence, voir Table B.1. Dans les deux cas, $\mu = 0$ et $\Omega_\varphi = 6.08 \times 10^{-3} \Omega_\gamma$ –ce choix de densité sera motivé à la section 2.2.4. A titre indicatif, le segment en pointillés ($a \gtrsim 1$) aide à distinguer le léger effet de l’expansion accélérée.

dominé par la constante cosmologique Λ ($w_\Lambda = -1$) conduira le champ scalaire à des valeurs asymptotiques plus petites que dans un univers de matière. Néanmoins, ce propos est à nuancer lorsqu’il s’agit d’une ère mixte de matière et de constante cosmologique. Considérons les deux modèles cosmologiques suivants. Tous deux sont spatialement plats, ont une vitesse d’expansion actuelle identique et possèdent la même quantité de radiation, $\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\varphi$. Pour le champ scalaire (2.21), on choisit, pour l’exemple, une densité sous-dominante du champ scalaire $\Omega_\varphi = 6.08 \times 10^{-3} \Omega_\gamma$ et dans un premier temps $\mu = 0$, le choix de la densité relève de la section 2.2.4.

Le premier modèle serait dominé aujourd’hui par la matière, la constante cosmologique étant fixée à zéro, $\Omega_{\Lambda1} = 0$ et $\Omega_{m1} \simeq 1$. Pour le second, la constante cosmologique Λ est ajustée de sorte que $\Omega_{\Lambda2} = 0.744$ et $\Omega_{m2} \simeq 0.256$, soit le modèle de référence Λ CDM défini par la Table B.1.

Retraçons alors l’évolution temporelle du champ scalaire représentée par la figure (2.1). Durant l’ère de radiation, le temps conforme est donné par $\tau =$

$a/\sqrt{\Omega_r H_0^2}$. Par conséquent, le champ est constant et sa valeur est fixée par le rapport Ω_φ/Ω_r . Ensuite, le champ scalaire décroche à l'approche de la transition entre les ères de radiation et de matière. Le moment caractéristique du décrochage est l'époque d'égalité entre les densités de radiation et de matière, associée au facteur d'échelle $a_{\text{eg}}^{r-m} = \Omega_r/\Omega_m$ ($a_{\text{eg}}^{r-m} \sim 10^{-4}$ pour les deux modèles). Dans le second modèle le décrochage sera retardé, l'ère de radiation s'y maintenant plus longuement. Plus tard, profondément dans l'ère de matière lorsque $\tau \propto \sqrt{a}$, le champ va décroître parallèlement dans les deux modèles en $1/\sqrt{a}$. En négligeant la densité de radiation à ce moment là, le rapport des valeurs du champ du second et du premier modèle vaudra

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} &\approx \sqrt{\Omega_{m1}/\Omega_{m2}} \quad \text{dans l'ère de matière,} \\ &\approx 2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Par la suite, après l'égalité des densités d'énergie de la matière et de la constante cosmologique, la croissance du temps conforme est réduite par rapport au modèle sans constante cosmologique, réduisant d'autant le rapport des valeurs du champ dans les deux modèles. Cependant, aujourd'hui en $a = 1$ cette réduction n'étant pas suffisante pour inverser la hiérarchie, une évaluation numérique donne ainsi

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \simeq 1.74 \quad \text{aujourd'hui.} \tag{2.28}$$

Jusqu'ici nous avons considéré l'évolution du champ φ en imposant $\mu = 0$. Relâchons cette contrainte. Soit $\mu > 0$. Pour des petites valeurs du facteur d'échelle a , le terme μ/a de l'expression du champ scalaire (2.21) est dominant. Dans un univers de paramètre d'état $w_{\text{eff}} > -\frac{1}{3}$, par exemple un univers de radiation et de matière, le temps conforme n'est pas borné. Si bien que, plus tard au cours de l'expansion, le terme en τ/a dominera.

Par contre dans un univers en expansion accélérée, le temps conforme est borné supérieurement, $\tau_\infty = \tau(a \rightarrow \infty)$. Ce qui permet au mode d'énergie nulle de dominer la relaxation du champ tout au long de l'expansion cosmique, pour autant que μ dépasse

$$\mu_\infty \equiv \sqrt{\Omega_\varphi H_0^2} \tau_\infty. \tag{2.29}$$

La figure 2.2, panneau droit, montre les valeurs de $\gamma - 1$ en fonction des paramètres du champ scalaire Ω_φ et μ . Le cas $\mu < 0$, panneau gauche, est discuté ci-après.

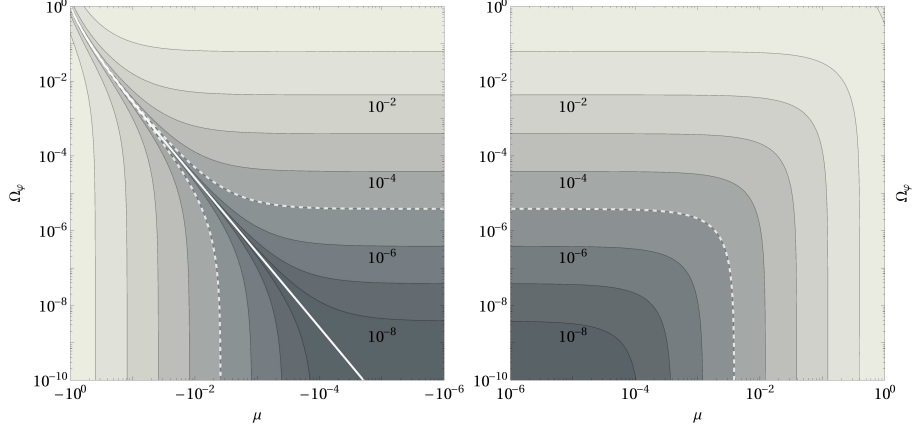


Fig. 2.2 – Courbes de niveau de la valeur actuelle de $|\gamma - 1|$ dans l’espace des paramètres (μ, Ω_φ) . La courbe en traits tirets est l’iso-contour $|\gamma - 1| = 10^{-5}$, caractéristique de la contrainte Cassini, équation (1.36b). Le modèle d’univers est ici défini par $\Omega_m = 1 - (\Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\varphi)$ et $\Omega_\Lambda = 0$, les autres paramètres étant fixés à leur valeur de référence, Table B.1. A gauche, $\mu < 0$, la relativité générale est temporairement restaurée, équation (2.30), le long de la courbe en trait continu blanc, $\gamma - 1 = 0$. Ce passage par zéro a lieu quand le terme en μ compense le terme en Ω_φ , solution (2.21). A droite, $\mu > 0$.

Oscillations

Dans le cas où μ est négatif, le champ scalaire change de signe quand le terme en μ/a cesse de dominer. A cet instant, au niveau homogène, le champ φ s’annule. Les quantités $\gamma - 1$, $\beta - 1$, \dot{G}/G , Φ^{BD} , $\Phi^{\text{BD}'}$ et $\omega(\Phi^{\text{BD}})$ recouvrent à leur tour leurs valeurs asymptotiques. Nous dirons que la relativité générale est *temporairement restaurée* à ce moment. Toutefois, cette restauration n’est que ponctuelle : les dérivées temporelles de $\beta - 1$ ou $\gamma - 1$ d’ordre supérieur ou égal à 3 sont non-nulles.

Pour ce choix de μ , on peut réécrire le champ sous la forme

$$\varphi(a) = \sqrt{\frac{6}{\kappa}} \sqrt{\Omega_\varphi H_0^2} \frac{\tau - \tau_s}{a}, \quad (2.30)$$

avec $\tau_s = \tau(a_s)$ l’instant où le changement de signe se produit. Par exemple, dans l’ère de radiation ce moment s’évalue à $a_s = |\mu| \sqrt{\Omega_r / \Omega_\varphi}$. Le temps conforme étant une fonction croissante du facteur d’échelle, la relation (2.30) montre que la relativité générale ne peut être retrouvée de manière transitoire

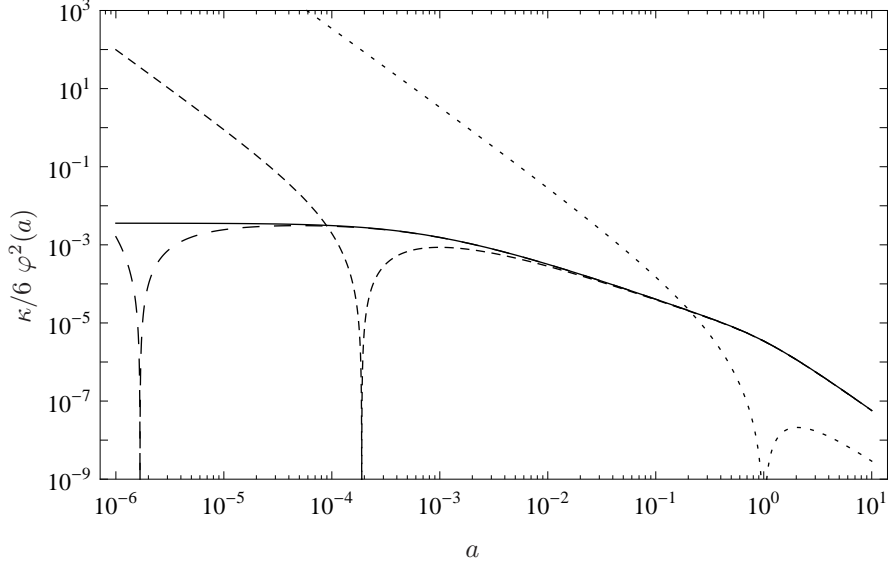


Fig. 2.3 – Oscillations du champ scalaire. Pour chacun des modèles $\Omega_\varphi = 6.08 \times 10^{-3} \Omega_\gamma$. Différents choix de valeurs de μ sont représentés : $\mu = 0$ (trait continu) et dans l'ordre chronologique des oscillations $\mu = -10^{-7}$, $\mu = -10^{-5}$ et $\mu = -\sqrt{\Omega_\varphi H_0^2} \tau_0 \simeq -1.86 \times 10^{-3}$. Cette dernière valeur a été finement ajustée de sorte que, aujourd'hui en $a = 1$, la relativité générale est temporairement restaurée, équation (2.30).

qu'une seule fois au cours de l'expansion. Après ce passage par zéro, le champ scalaire croît pour atteindre une valeur maximale à l'instant a_m donné par l'équation $\mathcal{H}^{-1}(a_m) = \tau(a_m) - \tau_s$. Pour ensuite décroître et converger asymptotiquement vers la relativité générale.

Si l'oscillation se produit dans l'ère de radiation, le maximum est atteint peu de temps avant l'égalité radiation-matière en raison du décrochage du champ à l'égalité. Pour une oscillation profondément dans l'ère de matière, le maximum survient pour $a_m = 4 a_s$.

Evaluons la largeur de l'oscillation $\Delta a = a_2 - a_1$ entre deux valeurs de φ^2 identiques

$$\alpha \varphi(a_m) = -\varphi(a_1) = \varphi(a_2) , \quad (2.31)$$

avec $a_1 \leq a_s \leq a_2$ et α la hauteur relative de l'oscillation par rapport au maximum, $0 \leq \alpha < 1$. Ainsi, si l'oscillation se termine dans l'ère de radiation :

$\Delta a/a_s = 2\alpha/(1 - \alpha^2)$. En revanche, pour une oscillation qui débute dans l'ère de matière : $\Delta a/a_s = 8(\sqrt{1 + \alpha} - \sqrt{1 - \alpha} + \alpha)/\alpha^2$. On remarque donc que dans une ère donnée la largeur relative est invariante quelle que soit le moment auquel se produit l'oscillation.

Dans un univers qui serait tardivement dominé par la constante cosmologique, il est possible que le champ ne subisse aucune oscillation, malgré la valeur négative de μ . L'oscillation est évitée si on choisit $\mu < -\mu_\infty$ ou encore $\tau_s > \tau_\infty$.

En choisissant $\tau_s = \tau_\infty$, en rejetant donc l'oscillation en $a \rightarrow \infty$, on en conclut que la relaxation de la théorie vers la relativité générale est optimale. Asymptotiquement, de toutes les valeurs possibles de μ tant positives que négatives, lorsque $\mu = -\mu_\infty$ l'indicateur $\gamma - 1$ est au plus près de sa valeur en relativité générale.

La figure 2.3 montre l'évolution et l'oscillation caractéristiques du champ pour quelques valeurs négatives de μ .

En conclusion, la convergence cosmologique vers la relativité générale est assurée pour toutes les valeurs de Ω_φ et μ , tant que la valeur asymptotique de l'équation d'état effective de l'Univers est inférieure à celle de la radiation.

2.2.4 Contrainte théorique sur la densité du champ scalaire

Dans l'hypothèse où il existe un processus permettant de thermaliser le champ scalaire avec les autres champs relativistes présents dans l'univers, il est possible de prédire la densité d'énergie relique Ω_φ du champ scalaire. La valeur de la densité dépend du contenu relativiste de l'Univers au moment où ce processus cesse d'être efficace, voir Annexe D, page 169.

Sans nouveaux degrés de liberté autres que ceux du Modèle Standard de la physique des particules et si ce processus cesse d'exister à une température supérieure à celle de la transition électro-faible, la température du fluide associé au champ scalaire est identique au fond cosmologique d'ondes gravitationnelles. De nos jours, elle vaudrait

$$T_\varphi = \left[\frac{43}{\frac{11}{\frac{427}{4}}} \right]^{1/3} T_{CMB} \quad (2.32a)$$

$$= 0.9049K, \quad (2.32b)$$

soit une densité physique de, équation (D.12),

$$\Omega_\varphi h^2 \simeq 6.08 \times 10^{-3} \Omega_\gamma h^2 \quad (2.33a)$$

$$\simeq 1.50 \times 10^{-7}, \quad (2.33b)$$

une valeur sous-dominante aux contributions des photons et des neutrinos.

Pour des modèles au delà du Modèle Standard, si le champ scalaire se découple avant la dernière annihilation des nouveaux degrés de liberté ainsi introduits, cette valeur est alors interprétée comme la borne supérieure de la prédiction pour $\Omega_\varphi h^2$. Après le découplage du champ scalaire, si certains de ces nouveaux degrés de liberté se découplent en conservant le nombre de particules associées, le raisonnement qui a conduit à la prédiction ci-dessus reste valide.

Un tel processus est présent dans l'interprétation classique de la théorie "zéro- R ", équation (2.11), lorsque la métrique est le médiateur de la thermalisation de toutes les espèces, y compris le champ scalaire φ , soit pour des températures de l'ordre de ou supérieures à la masse de Planck [68]. Toutefois, si un mécanisme d'inflation se produit après le découplage, la densité relique du champ scalaire s'en trouve diluée d'au moins un facteur e^{-160} , sur base d'un minimum de 40 e-folds. Après l'inflation, à la manière des ondes gravitationnelles en relativité générale [69], un rayonnement de fond du champ scalaire pourrait être créé à la condition que l'Univers subisse des transitions de phase d'ordre un. Enfin, au moment du reheating ou après l'inflation, l'existence d'une interaction directe, non-inclue dans le lagrangien (2.11), entre le champ scalaire et l'inflaton ou une espèce du plasma primordial génèrerait une densité relique en accord avec (2.33). Les contraintes sur une violation du principe d'équivalence faible requièrent toutefois que ce processus soit efficace de manière temporaire.

Dans la suite du chapitre, nous étudierons le comportement du champ scalaire et contraindrons sa densité d'énergie indépendamment de l'hypothèse de thermalisation et de la prédiction (2.33) ainsi obtenue.

2.2.5 Contraintes phénoménologiques sur la densité du champ scalaire

Sur base des mesures de l'abondance primordiale de l'hélium, une première contrainte sur la densité est obtenue dans le cadre de la nucléosynthèse primordiale des éléments légers. Ensuite, l'opportunité d'obtenir à ce stade une contrainte à l'aide de la position horizontale des pics du spectre du CMB est discutée.

Au niveau de la notation, les deux modèles de radiations sont présentés sous la forme $\{x_\nu, x_\varphi\}$, où les x_s sont les densités de neutrinos et du champ scalaire exprimées relativement à la densité standard des neutrinos² (équivalente à $N_{\nu\text{eff}}^{\text{Std}} = 3.04$). Ainsi, le modèle $\{1, 0\}$ correspond au modèle Λ CDM de référence, Table B.1, l’ajout du champ scalaire φ avec une densité d’énergie identique à la densité standard des neutrinos est, quant à lui, noté $\{1, 1\}$.

Nucléosynthèse primordiale

La nucléosynthèse primordiale est un laboratoire privilégié pour la mesure du taux d’expansion dans l’univers primordial. Toute déviation à la relativité générale entraîne une modification du facteur d’expansion qui se répercute ensuite sur les taux de production des éléments légers. La mesure des abondances primordiales de ces éléments permet ainsi de tester la théorie de gravitation à l’œuvre au moment de la nucléosynthèse primordiale [73]. A contrario, des inconsistances entre les abondances observées et la prédiction du scénario standard peuvent être expliquées par un ajustement de l’évolution du taux d’expansion. Le taux d’expansion est notamment contrôlé par la fonction de couplage $\omega(\Phi^{\text{BD}})$ et la possible auto-interaction du champ scalaire. L’ajustement du potentiel d’auto-interaction favorise la production de l’un ou l’autre élément léger [74]. Notons aussi, que l’ajustement fin d’un éventuel potentiel d’auto-interaction permet d’obtenir, de manière approximative et uniquement pendant l’ère de radiation, un champ scalaire imitant une radiation [75].

Avant d’aborder les contraintes de Ω_φ extraites des mesures d’abondance des éléments légers, évoquons d’entrée les grandes lignes de la nucléosynthèse primordiale.

La nucléosynthèse primordiale des éléments légers permet de sonder le taux d’expansion à des températures de l’ordre de 0.1 MeV. La compétition entre le taux d’expansion et le taux des interactions nucléaires contrôle l’équilibre thermodynamique des baryons avec le reste du plasma. C’est la déviation par rapport à cet équilibre qui permet d’obtenir des abondances non-négligeables pour les éléments légers. On sait qu’à des températures supérieures au MeV, les neutrons et les protons sont maintenus à l’équilibre par les neutrinos. Le rapport des densités de neutrons et de protons est alors fonction de leur différence de masse Δm et vaut $e^{-\Delta m/T}$. Lorsque le taux des interactions –indirectes– des neutrinos avec les protons et les neutrons devient inférieur au taux d’expansion,

²Le découplage des neutrinos actifs n’est pas instantané si bien que ceux-ci profitent aussi de l’annihilation e^+e^- , ralentissant ainsi leur refroidissement [70]. En incluant également les corrections quantiques aux relations de dispersion des photons et des e^\pm [71], le nombre effectif de familles de neutrinos actifs est porté à 3.04 après le découplage e^+e^- [72].

plus aucune interaction n'a lieu. En deçà de cette température T_f , le rapport de ces densités est donc gelé.

Parallèlement, la production de deutérium $n + p \rightarrow D + \gamma$ est énergétiquement favorisée par rapport à la réaction inverse : la photodissociation. Cependant, le grand nombre de photons, caractéristique du rapport $\eta_{10} = 10^{10} n_b / n_\gamma$, maintient la densité de deutérium à un niveau négligeable. La production de deutérium n'est effective que lorsque le nombre de photons d'énergie supérieure à l'énergie de liaison du deutérium est insuffisant pour contrecarrer la réaction de production. On définit à ce moment-là la température de nucléosynthèse T_{nuc} à partir de laquelle l'abondance de deutérium augmente rapidement. Cette température est inférieure à l'énergie de liaison B_D du deutérium, $T_{\text{nuc}} = B_D/25 \simeq 0.07$ MeV. La présence de deutérium entraîne à son tour la formation des éléments plus lourds. Grâce à la grande énergie de liaison des nucléons du noyau d'hélium ${}^4\text{He}$, les neutrons présents à la température T_{nuc} se retrouveront sous forme de ${}^4\text{He}$. L'abondance des neutrons en T_{nuc} est donc un bon traceur de l'abondance d'hélium à la fin de la nucléosynthèse. Vu que l'intervalle de temps Δt_{fn} séparant les températures de gel T_f et de nucléosynthèse T_{nuc} n'est pas négligeable par rapport au temps de vie τ_n du neutron, l'abondance de ces derniers en T_{nuc} correspond à l'abondance en T_f corrigée d'un facteur $e^{-\Delta t_{fn}/\tau_n}$.

Les températures T_f et T_{nuc} sont sensibles à une modification du taux d'expansion \mathcal{H} . L'ajout de degrés de liberté relativistes stériles a pour effet, au travers d'une augmentation de \mathcal{H} , d'élever la température de gel des interactions faibles. Accroissant ainsi l'abondance –gelée– des neutrons. De plus, l'expansion étant plus rapide, la température de nucléosynthèse est atteinte plus rapidement, diminuant l'écart de temps entre T_f et T_{nuc} . Temps au cours duquel, rappelons-le, une fraction des neutrons se désintègrent. Ces deux effets combinés accroissent dans un premier temps l'abondance de neutrons en T_{nuc} et ensuite l'abondance d'hélium à la fin de la nucléosynthèse.

Avant de contraindre Ω_φ , notons que les analyses portant sur les degrés de liberté relativistes supplémentaires s'expriment en fonction du nombre effectif de familles de neutrinos légers et stériles $\Delta N_{\nu\text{eff}}$. *Effectifs* car leur température est prise égale à celle des neutrinos actifs.

Au niveau homogène, à l’instar de Ω_φ , ces neutrinos supplémentaires se comportent comme une radiation additionnelle pure, on a donc l’équivalence

$$\Omega_\varphi h^2 = \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \Omega_\gamma h^2 \Delta N_{\nu\text{eff}} \quad (2.34)$$

$$\simeq 0.227 \Omega_\gamma h^2 \Delta N_{\nu\text{eff}} \quad (2.35)$$

$$\simeq 5.61 \cdot 10^{-6} \Delta N_{\nu\text{eff}} . \quad (2.36)$$

La prédiction (2.33) se traduit en $\Delta N_{\nu\text{eff}} \simeq 0.0268$.

A l’aide du code PArthENoPE [76, 77] nous avons réalisé un fit de la prédiction de la fraction de masse Y_p de l’hélium-4 en fonction du nombre de neutrinos effectifs. La densité des baryons est celle du modèle de référence, Table B.1, $\Omega_b h^2 = 0.0223$. Sur l’intervalle $0 \leq \Delta N_{\nu\text{eff}} \leq 1$ le résultat du fit linéaire exprimé en fonction de $\Omega_\varphi h^2$ est

$$Y_p = 0.2478 + 0.0577 \frac{\Omega_\varphi h^2}{\Omega_\gamma h^2} , \quad (2.37)$$

en accord avec l’estimation analytique [78, 52] et l’analyse numérique [79], données en fonction de $\Delta N_{\nu\text{eff}}$.

L’abondance primordiale est déduite de mesures astrophysiques [54]

$$Y_p = 0.247 \pm 0.002 (\text{stat } 1\sigma) \pm 0.004 (\text{syst}) . \quad (2.38)$$

Bien qu’étant dominantes à l’heure actuelle, les incertitudes systématiques sont ici omises pour obtenir enfin la contrainte

$$\text{Nucléosynthèse primordiale : } \quad \Omega_\varphi h^2 < 1.7 \times 10^{-6} \quad (\text{stat } 2\sigma) . \quad (2.39)$$

On en déduit une contrainte sur le nombre effectif de degrés de liberté relativistes au moment de l’éventuel découplage, équation (D.8), $q^\ell(T_D) \gtrsim 15$, ou encore $T_D \gtrsim \mathcal{O}(10)$ GeV, d’après la figure 4.7 de [80]. L’hypothèse d’un champ scalaire thermalisé au dessus d’une température de l’ordre de 1 TeV, prédiction (2.33), n’est pas exclue par cette contrainte.

Position des pics acoustiques du CMB

La deuxième contrainte sur Ω_φ pourrait être extraite de la position des pics acoustiques du spectre du CMB. Comme nous l’avons vu au chapitre précédent,

Modèle	z_{eg}	τ_{eg} (Mpc)	z_*	τ_* (Mpc)	$r_s(\tau_*)$ (Mpc)
$\{x_\nu = 0, x_\varphi = 0\}$	5367	93.09	1087	322.8	166.5
$\{1, 0\}$ et $\{0, 1\}$	3174	121.0	1088	286.0	146.9
$\{1, 1\}$	2253	143.6	1091	260.6	133.4

Tab. 2.1 – Redshift et valeur du temps conforme à l'égalité radiation-matière et au moment de la recombinaison pour les quatre modèles de référence. Rayon de l'horizon acoustique comobile à la recombinaison. Le temps conforme au moment de la recombinaison correspond au maximum de la fonction de visibilité, figure 2.4.

la position des pics dépend de la taille de l'horizon acoustique au moment de la recombinaison $e - p$. La taille de cet horizon $r_s(\tau_*)$, équation (1.64), dépend à la fois de l'histoire du taux d'expansion et à la fois du facteur d'échelle a_* à la recombinaison. La sensibilité de $r_s(\tau_*)$ vis-à-vis de Ω_φ provient essentiellement du taux d'expansion. En effet, le facteur d'échelle de la recombinaison est d'abord fonction du rapport des densités des nombres de photons ionisants et de baryons et seulement dans une moindre mesure fonction du rapport $\Omega_{\text{rad}}/\Omega_m$, Table 2.1. Cependant, l'expansion étant plus rapide dans un modèle avec une plus grande densité de radiation, ce rapport critique des densités de nombres sera atteint plus rapidement, en raisonnant en temps conforme τ et non plus sur a . Le temps τ_* s'écoulant jusqu'en a_* est moins élevé, réduisant de facto l'extension spatiale de l'horizon acoustique $\int c_s d\tau$.

L'angle sous lequel on observe aujourd'hui cet horizon étant diminué, le multipôle acoustique l_A , équation (1.67a), est déplacé vers des multipôles plus élevés. La structure acoustique du spectre du CMB s'en trouve ainsi décalée. Cependant une contrainte sur Ω_φ ne peut pas être simplement dérivée de la relation $l_m = m \cdot l_A$ en extrayant la valeur du multipôle acoustique l_A à partir des valeurs expérimentales l_m .

En ce qui concerne l'effet d'une radiation additionnelle sur la position des pics acoustiques, à la modification de la taille de l'horizon acoustique s'ajoute l'effet Sachs-Wolfe intégré produit au moment de la transition radiation-matière. La chute des potentiels gravitationnels à l'origine de ce déplacement acoustique est sensible au redshift de l'égalité et donc à la densité de radiation additionnelle. Cette dépendance rend caduque la relation $l_m = m \cdot l_A$ ainsi que son extension à décalages acoustiques constants, $l_m = m l_A (1 - \phi_m)$, invalidant par conséquent toute contrainte obtenue par l'analyse du positionnement des multipôles acoustiques. La dépendance des décalages acoustiques vis-à-vis de cette radiation s'obtient par l'étude de l'évolution des perturbations cosmologiques.

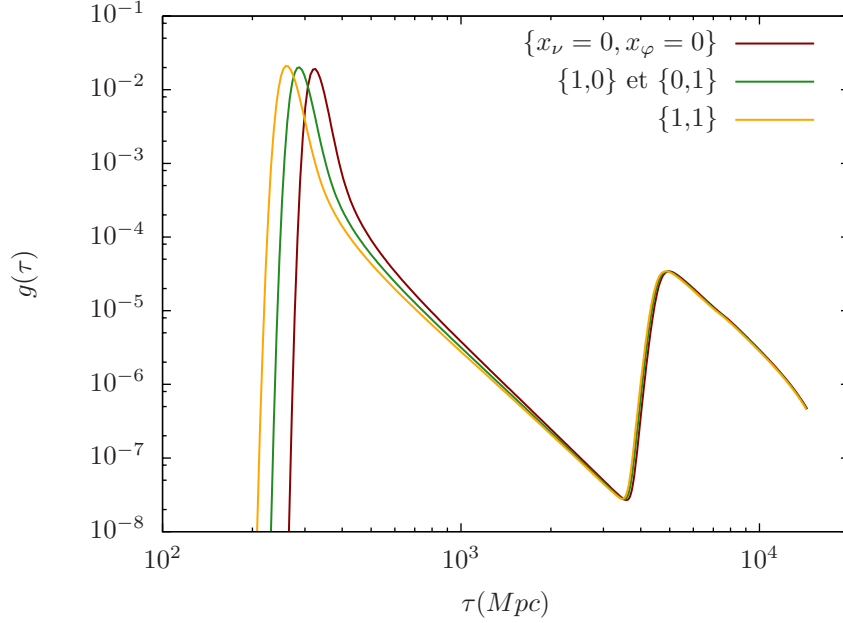


Fig. 2.4 – Evolution de la fonction de visibilité, équation (A.26), calculée par RECFAST [49] selon le temps conforme pour les quatre modèles de référence. L’instant de la recombinaison τ_* est donné par la position du pic, Table 2.1.

L’influence des perturbations d’une radiation supplémentaire, de type neutrinos stériles, minimalement couplée à la métrique a déjà été mise à l’étude [81] et implémentée dans le code CAMB. La dynamique des potentiels gravitationnels au moment de la transition radiation-matière étant notamment propre aux propriétés des perturbations de la radiation supplémentaire considérée, il n’est pas possible de traduire ces contraintes pour les neutrinos en contraintes pour le champ scalaire qui nous occupe ici.

A titre d’illustration, nous avons adapté le code CAMB en y intégrant la modification de l’expansion au travers de \mathcal{H} . A ce stade, il ne s’agit que de l’ajout d’une radiation sombre de densité homogène, l’étude des perturbations du champ φ est réservée à la section suivante. La figure 2.5 (traits tirets) représente la position du premier pic acoustique en fonction de la densité de neutrinos additionnels et/ou de la radiation sombre homogène. A densités identiques, c’est-à-dire à valeurs de l_A ou à évolutions de \mathcal{H} identiques, les deux modèles de radiation en jeu présentent des décalages acoustiques sensiblement différents.

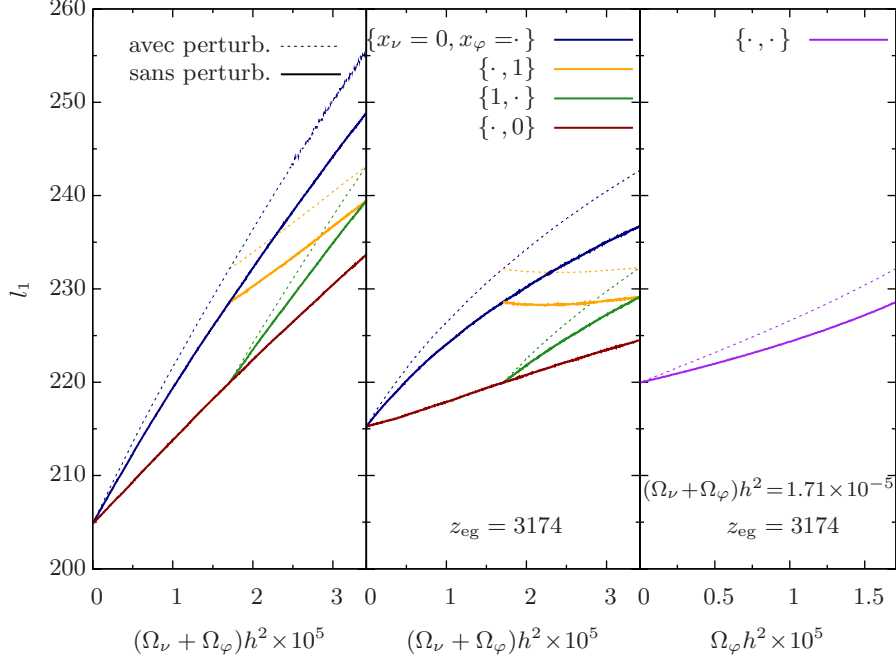


Fig. 2.5 – Evolution de la position du premier pic acoustique du spectre du CMB pour des modèles avec une densité de radiation sombre homogène (Ω_φ) et un fluide de neutrinos inhomogène (N_ν). En traits tirets, les perturbations du champ scalaire sont maintenues nulles. Les traits pleins représentent la simulation complète du spectre du CMB (section 2.3). A gauche, variation de la densité de l’un ou l’autre type de radiation. Au centre, la densité de matière varie aussi de manière à maintenir constant le redshift de l’égalité. A droite, la somme des densités des radiations additionnelles est maintenue à une valeur équivalente à $N_{\nu\text{eff}}^{\text{Std}} = 3.04$.

En conclusion, la structure acoustique du CMB dépend de la densité de radiation mais aussi de la nature du fluide associé à cette radiation. La nature de ces radiations ne s’exprimant pas au niveau homogène, il est nécessaire d’étudier le comportement des perturbations cosmologiques dans le cadre de cette théorie de gravitation modifiée.

2.3 Evolution des perturbations

La précédente comparaison de l’échelle acoustique entre des modèles de radiations homogène et inhomogène motive l’étude de l’évolution des perturbations du champ scalaire. Dans cette section, nous complétons d’abord l’analogie entre

le fluide de radiation et le champ scalaire, pour ensuite résoudre analytiquement les équations de perturbations dans deux cas limites et présenter les solutions numériques dans des cas intermédiaires et, in fine, dériver le spectre du CMB.

A partir de ces résultats, nous contraignons à la section 2.4 l’ensemble des paramètres du modèle cosmologique construit dans le cadre de la théorie scalaire “zéro- R ”. Une contrainte sur la densité du champ scalaire est ainsi obtenue à l’aide de mesures des anisotropies du CMB, de mesures de distances absolues dans l’Univers proche et de distances relatives dans l’Univers lointain. La performance de cette nouvelle analyse, équation (2.78) s’approche de celle de la nucléosynthèse primordiale, équation (2.39). L’analyse s’avère aussi plus discriminante quant à la signature des neutrinos et du champ scalaire.

L’évolution des perturbations cosmologiques en théorie de Brans-Dicke et de l’impact sur le CMB a déjà été étudiée précédemment. Certains travaux se limitent aux théories de Brans-Dicke pures, où le paramètre ω est constant [82, 83], les déviations à la relativité générale y sont par conséquent constantes. Ces modèles sont donc mieux contraints par les tests de la gravitation dans le système solaire que par les mesures cosmologiques. D’autres travaux s’attaquent au problème plus général où la fonction de couplage $\omega(\Phi^{\text{BD}})$ équivaut au potentiel effectif quadratique dans la représentation d’Einstein, par exemple [84]. Dans l’Annexe C, en comparaison de la théorie “zéro- R ” on démontre les limites du potentiel effectif quadratique. Ajouter un terme d’auto-interaction pour le champ scalaire en vue d’expliquer l’accélération de l’expansion force l’intensité du couplage non-minimal vers de petites valeurs afin de respecter les contraintes observationnelles. Dans ce sens [85] est un test des théories tenseur-scalaire dans le régime des grandes valeurs du champ scalaire.

2.3.1 Champ fondamental

Dans un espace-temps perturbé, le champ scalaire développe aussi des fluctuations. Le champ total s’écrit $\varphi(t) + \delta\varphi(t, \vec{x})$. La dynamique de ces fluctuations $\delta\varphi$ est donnée par l’équation (2.12b) qui, au premier ordre des perturbations de la métrique et du champ scalaire, devient ainsi dans l’espace de Fourier, exprimée dans la jauge synchrone (A.11)

$$\begin{aligned} \delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' + k^2\delta\varphi + \varphi'(3C' - k^2E') = \\ - (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\delta\varphi - \frac{\varphi}{3} [3\mathcal{H}(3C' - k^2E') + (3C'' - k^2E'') + 2k^2C] . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dans le membre de gauche sont regroupés les termes caractéristiques de l'équation de Klein-Gordon pour un champ en chute libre. Ceux du membre de droite dérivent du couplage non-minimal à la métrique en $\varphi^2 R$ dans l'action (2.5).

2.3.2 Fluide effectif

Grâce à la formulation (2.13), les perturbations du champ influencent l'évolution des potentiels gravitationnels à la manière d'un fluide via les perturbations $\delta T_{\varphi\nu}^{\mu}$. Il convient de déterminer les propriétés de ce fluide en comparant le tenseur énergie-impulsion fondamental (2.14) au tenseur énergie-impulsion d'un fluide (A.12).

Ce fluide effectif est pour partie caractérisé par les perturbations absolues de la densité d'énergie $\delta\rho_{\varphi}$, de la pression δp_{φ} . De la correspondance entre les tenseurs énergie-impulsion effectif et fondamental, il en ressort que

$$\delta\rho_{\varphi} \equiv \frac{1}{3a^2} \left\{ k^2 C \varphi^2 + \delta\varphi [(k^2 + 3\mathcal{H}^2)\varphi + 3\mathcal{H}\varphi'] + (\mathcal{H}\varphi + \varphi') [3\delta\varphi' + \varphi(3C' - k^2 E')] \right\}. \quad (2.41)$$

A l'aide de l'équation de Klein-Gordon perturbée, les perturbations de pression δp_{φ} , obtenues également par identification vis-à-vis du tenseur énergie-impulsion fondamental, s'expriment en fonction de $\delta\rho_{\varphi}$

$$\delta p_{\varphi} = \frac{1}{3} \delta\rho_{\varphi}. \quad (2.42)$$

Cette relation révèle que le fluide associé à φ ne possède pas d'entropie intrinsèque. Le mode non-adiabatique Γ_{φ} des perturbations de pression est nul

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi} &= \frac{1}{p_{\varphi}} (\delta p_{\varphi} - c_{A\varphi}^2 \delta\rho_{\varphi}), \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec $c_{A\varphi}$ la vitesse du son des modes adiabatiques. Dans ce cas, la quantité $c_{A\varphi}^2$, équation (2.24), est identique à celle des modes de perturbations de la pression –isotrope– totale $c_{s\varphi}^2 \equiv \frac{\delta p_{\varphi}}{\delta\rho_{\varphi}}$.

L'analogie champ-fluide se poursuit en identifiant la vitesse du fluide v_{φ} . Nous définissons pour cela la quantité $Q_{\varphi} \equiv \rho_{\varphi}(1 + w_{\varphi})v_{\varphi}$

$$Q_{\varphi} = \frac{\rho_{\varphi}}{3a^2} \left[-\delta\varphi(\mathcal{H}\varphi + 2\varphi') + \varphi(\delta\varphi' + \varphi C') \right]. \quad (2.44)$$

La pression anisotrope absolue Π_φ complète la description du fluide

$$\Pi_\varphi \equiv \frac{\varphi}{6a^2} \left\{ -2\delta\varphi + (E'' - C)\varphi + 2(\mathcal{H}\varphi + \varphi')E' \right\}. \quad (2.45)$$

Malgré la propagation adiabatique des perturbations de pression, le fluide effectif simulant les effets du champ scalaire sur les potentiels n’est pas parfait : le couplage non-minimal du champ scalaire à la métrique génère une pression anisotrope via les composantes hors de la diagonale de $T_{\varphi_j}^i$.

Les fluides de photons, de neutrinos et celui associé à φ sont tous trois caractérisés par une propagation adiabatique des perturbations de pression, par une même équation d’état et par des célérités acoustiques adiabatiques identiques. C’est la pression anisotrope qui permet de distinguer les effets du champ scalaire parmi les autres radiations. Pour les photons et les neutrinos la pression anisotrope est un degré de liberté indépendant dont la dynamique est guidée par l’équation de Boltzmann. Ces deux fluides possèdent autant de degrés de liberté qu’il y a de multipôles angulaires de la fonction de distribution, c’est-à-dire un nombre arbitrairement grand. Tandis que le fluide φ est fonction de $\delta\varphi$ et $\delta\varphi'$ uniquement, ou encore de $\delta\rho_\varphi$ et Q_φ .

La dynamique des perturbations du fluide $\delta\rho_\varphi$ et Q_φ dérive de la conservation de $T_{\varphi\nu}^\mu$. L’équation de Klein-Gordon pour les perturbations du champ scalaire se réécrit donc en un système d’équations dont la première est celle de continuité et la seconde celle d’Euler

$$\delta\rho'_\varphi = k^2 Q_\varphi - 4\mathcal{H}\delta\rho_\varphi - \frac{4}{3}\rho_\varphi(3C' - k^2 E'), \quad (2.46a)$$

$$Q'_\varphi = -\frac{1}{3}\delta\rho_\varphi - 4\mathcal{H}Q_\varphi + \frac{2}{3}k^2 \Pi_\varphi. \quad (2.46b)$$

Ces équations sont bien entendu identiques à celles d’un fluide dont le tenseur énergie-impulsion est conservé, équations (A.40). Par exemple, la combinaison des pressions isotrope et anisotrope du fluide de neutrinos décrit l’écoulement libre de ce fluide de radiation en chute libre. En ce qui concerne le fluide associé au champ scalaire, le détail de la pression anisotrope est l’expression du couplage non-minimal.

Tant au regard des équations d’Einstein que de celles de conservation des autres fluides, afin de fermer le système (2.46) il convient d’exprimer la pression ani-

sotrope en fonction de $\delta\rho_\varphi$ et de Q_φ

$$\Pi_\varphi = \frac{\varphi^2}{6a^2} \left\{ E'' - C + \frac{2k^2\varphi^2 C + 6a^2 \left[-\delta\rho_\varphi + \frac{\mathcal{H}\varphi + \varphi'}{\varphi} (3Q_\varphi + 4\rho_\varphi E') \right]}{k^2\varphi^2 + 12a^2\rho_\varphi} \right\}. \quad (2.47)$$

Il est maintenant manifeste pourquoi le fluide a été développé, jusqu'ici, en termes de quantités absolues : pour les modèles avec $\mu \neq 0$ lorsque la densité d'énergie Ω_φ du champ scalaire est nulle, la pression anisotrope relative $\pi_\varphi = \Pi_\varphi/p_\varphi$ est singulière. Or les potentiels gravitationnels ressentent les effets du champ au travers des perturbations absolues $\delta\rho_\varphi = \rho_\varphi\delta\varphi$, $Q_\varphi = \rho_\varphi(1 + w_\varphi)v_\varphi$ et Π_φ qui, elles, restent régulières et non nulles en $\rho_\varphi = 0$, reflet de l'influence du mode d'énergie nulle ($\mu \neq 0$, $\Omega_\varphi = 0$) sur les potentiels. L'évolution cosmologique au niveau homogène est indépendante de la valeur de μ et ce n'est qu'au premier ordre des perturbations cosmologiques que les effets de ce mode se font ressentir.

En raison du terme en E'' , les expressions (2.45) et (2.47) sont implicites pour Π_φ . A l'aide de l'équation (A.41) on obtient

$$\Pi_\varphi = \frac{\varphi^2}{1 - \frac{\kappa\varphi^2}{6}} \left\{ \frac{\kappa\Pi_\psi}{6} - \frac{\frac{k^2\varphi^2}{3a^2}(\mathcal{H}E' - C) + \delta\rho_\varphi + 4\rho_\varphi\mathcal{H}E' - \frac{\mathcal{H}\varphi + \varphi'}{\varphi}(3Q_\varphi + 4\rho_\varphi E')}{k^2\varphi^2 + 12a^2\rho_\varphi} \right\}. \quad (2.48)$$

On remarque ici la divergence quand φ s'approche de la valeur $\sqrt{6/\kappa}$, empêchant l'étude perturbative des fluctuations des champs de matière, du champ scalaire et de la métrique pour l'ensemble des modèles pour lesquels au cours de l'expansion $|\varphi| \geq \sqrt{6/\kappa}$, soit tous les modèles avec $\mu \neq 0$. Ce comportement singulier tient son origine dans la perte de la dynamique au niveau de la métrique, équation (2.12a).

Dans la suite nous nous limiterons donc aux modèles avec $\mu = 0$, valides à tout instant. Pour ceux-ci le fluide est correctement décrit par les quantités relatives. La limite $\Omega_\varphi \rightarrow 0$ est en effet régulière : $\pi_\varphi \rightarrow 0$. Exprimée cette fois-ci en fonction des variables de la jauge de Newton la pression anisotrope

relative prend la forme

$$\pi_\varphi = \frac{3}{\rho_\varphi} \frac{\varphi^2}{1 - \frac{\kappa\varphi^2}{6}} \left\{ \frac{\kappa w_\psi \rho_\psi \pi_\psi}{6} - \frac{\frac{k^2 \varphi^2}{3a^2} \Psi + \rho_\varphi \left(\delta_\varphi^N - 4 \frac{\mathcal{H}\varphi + \varphi'}{\varphi} v_\varphi^N \right)}{k^2 \varphi^2 + 12a^2 \rho_\varphi} \right\}. \quad (2.49)$$

Pour les modèles avec $\mu = 0$, elle se simplifie en

$$\pi_\varphi = \frac{\tau^2}{1 - \Omega_\varphi H_0^2 \frac{\tau^2}{a^2}} \left[\kappa a^2 w_\psi \rho_\psi \pi_\psi - \frac{2k^2 \tau^2 \Psi + 3 \left(\delta_\varphi^N - 4\tau^{-1} v_\varphi^N \right)}{6 + k^2 \tau^2} \right]. \quad (2.50)$$

En résumé, c’est la pression anisotrope qui distingue à la fois le comportement des fluides de radiation ainsi que leur influence sur les potentiels gravitationnels.

2.3.3 Deux cas limites

Explorons ici les solutions aux équations des perturbations cosmologiques dans le cadre de cette théorie particulière de gravitation.

Conditions initiales

Les équations (A.40), (A.41) et (2.46) sont résolues profondément dans l’ère de radiation, $\mathcal{H} = \tau^{-1}$, pour les grandes échelles, $k\mathcal{H}^{-1} \ll 1$. Au travers de ses deux degrés de libertés, le fluide φ introduit deux nouveaux modes non-adiabatiques. Nous n’étudions pas ces deux modes et limitons le propos au mode adiabatique. A ces échelles, le fluide φ vérifie donc la condition adiabatique : $S_{\gamma\varphi} = 0$, ou encore $\delta_\varphi = \delta_\gamma$, initialement.

Nous travaillons avec les mêmes hypothèses qu’à la section A.5.1. A cette époque, le couplage fort entre les photons et les baryons égalise les vitesses de ces deux fluides, $v_b = v_\gamma$, et annule la pression anisotrope, $\pi_\gamma = 0$ ainsi que les multipôles suivants de la hiérarchie de Boltzmann des photons, soit $\Theta_l = 0$ pour $l \geq 2$, équation (A.28d). Par contre, la libre propagation des neutrinos provoque le développement d’une pression anisotrope π_ν , nous tronquons dès lors la hiérarchie de Boltzmann des neutrinos seulement au delà de l’ordre 3, $N_{\nu l} = 0$ pour $l \geq 4$, équation (A.30).

Dans l'hypothèse adiabatique et à l'ordre le plus bas en $k\tau$, écrivons les équations de conservation pour les fluides de radiation uniquement en termes des vitesses, après avoir précisé les différentes pressions anisotropes

$$v_\gamma'' = \frac{h'}{6}, \quad (2.51a)$$

$$v_\nu'' = -\frac{8}{5\tau^2}(f_\gamma v_\gamma + f_\nu v_\nu + f_\varphi v_\varphi) + \frac{3h'}{10}, \quad (2.51b)$$

$$v_\varphi'' = -\frac{8f_\nu}{5(1-f_\varphi)\tau^2}(f_\gamma v_\gamma + f_\nu v_\nu + f_\varphi v_\varphi) - \frac{[5(1-f_\varphi) + 4f_\nu]h'}{30(1-f_\varphi)}, \quad (2.51c)$$

avec $\eta \equiv -C$ et $h \equiv 2(3C - k^2 E)$ et où $f_\varphi \equiv \Omega_\varphi / (\Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\varphi)$ satisfait dans une ère de radiation la relation de fermeture $f_\gamma + f_\nu + f_\varphi = 1$. Il n'y a pas de restriction sur la valeur de f_φ , notre raisonnement reste valide pour un champ sous-dominant ou dominant, $0 \leq f_\varphi < 1$. Grâce à la solution adiabatique régulière (A.58a) pour le potentiel on résout ces dernières équations pour obtenir l'évolution de l'ensemble des perturbations cosmologiques

$$h = A(k\tau)^2 \quad (2.52a)$$

$$\delta_\gamma = \delta_\nu = \delta_\varphi = \frac{4}{3}\delta_b = \frac{4}{3}\delta_c = -\frac{2}{3}A(k\tau)^2 \quad (2.52b)$$

$$v_\gamma = v_b = \frac{A}{18}k^2\tau^3 \quad (2.52c)$$

$$v_\nu = \frac{23(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} \frac{A}{18}k^2\tau^3 \quad (2.52d)$$

$$v_\varphi = \frac{5(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} \frac{A}{6}k^2\tau^3 \quad (2.52e)$$

$$\pi_\nu = \frac{\Omega_\gamma + \Omega_\nu}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} 8A\tau^2 \quad (2.52f)$$

$$N_{\nu 3} = \frac{\Omega_\gamma + \Omega_\nu}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} \frac{8A}{21}k^3\tau^3 \quad (2.52g)$$

$$\eta = \left[2 - \frac{1}{6} \frac{5(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} k^2\tau^2 \right] A, \quad (2.52h)$$

à l'ordre le plus bas en $k\tau$, avec $A \equiv \frac{7}{10}\Psi_p$. De manière assez surprenante on retrouve les résultats obtenus en relativité générale, ces expressions sont indépendantes de Ω_φ . Bien qu'étant non-négligeables, les fluctuations du champ scalaire n'ont pas d'influence sur l'évolution des potentiels gravitationnels et des perturbations des différents fluides cosmologiques, évolution exprimée en termes du temps conforme τ . L'amplitude des perturbations du fluide φ est aussi indépendante de la densité Ω_φ . Cependant, les perturbations ne sont

pas totalement indépendantes de Ω_φ : en les réécrivant en fonction du facteur d'échelle on notera l'effet de la modification de l'expansion sur leur évolution.

Les perturbations du fluide φ passent donc inaperçues aux grandes échelles grâce à la forme particulière de la pression anisotrope. Dans cette approximation, π_φ prend la valeur moyenne –pondérée par les densités respectives– des autres pressions anisotropes, en l'occurrence

$$\begin{aligned}\pi_\varphi &= \frac{f_\nu}{15(1-f_\varphi) + 4f_\nu} 8A\tau^2 \\ &= \frac{\Omega_\nu}{\Omega_\gamma + \Omega_\nu} \pi_\nu .\end{aligned}\quad (2.53)$$

Dès lors l'équation (2.51c), est la moyenne des équations (2.51a) et (2.51b) dont la solution est

$$v_\varphi = \frac{\Omega_\gamma v_\gamma + \Omega_\nu v_\nu}{\Omega_\gamma + \Omega_\nu} .\quad (2.54)$$

De même, la condition d'adiabaticité implique que δ_φ est la moyenne des autres perturbations de densités. Ceci étant, les membres de droite des équations des potentiels (A.41), exprimés en temps conforme, sont alors indépendants des perturbations du fluide φ et de la quantité Ω_φ .

Rappelons les conditions dans lesquelles cette observation est valide : on a supposé ici que l'expansion cosmologique et l'évolution des perturbations sont guidées uniquement par les radiations, que les perturbations initiales de densité sont dans un rapport adiabatique et que nous nous sommes intéressés aux perturbations dans le régime de type super-expansion.

Aux grandes échelles $k\mathcal{H}^{-1} \ll 1$ et dans l'ère de radiation, cette théorie “zéro- R ” apparaît donc comme une *non-modification* de la gravité.

Propriétés du fluide φ

Avant de poursuivre l'évolution des perturbations dans l'ère de matière, attardons-nous un moment sur les propriétés du fluide effectif afin de mieux cerner le comportement du champ scalaire.

Les équations de conservation (2.46) peuvent être rassemblées en une équation du second ordre pour la perturbation δ_φ

$$\delta_\varphi'' - \frac{4}{3}(3C'' - k^2 E'') + k^2 \left(c_{A\varphi}^2 - \frac{2k^2}{9} \frac{\pi_\varphi}{\delta_\varphi} \right) \delta_\varphi = 0 ,\quad (2.55)$$

où on interprète le terme en π/δ comme une correction à la célérité adiabatique [86, 87]. C'est la célérité –acoustique– anisotrope $c_{\pi\varphi}$,

$$c_{\pi\varphi}^2 \equiv \frac{2k^2}{9} \frac{\pi_\varphi}{\delta_\varphi}, \quad (2.56)$$

qui combinée à la célérité adiabatique contrôle l'évolution du fluide φ par l'intermédiaire de la célérité effective

$$c_{\text{eff}\varphi}^2 \equiv c_{A\varphi}^2 - c_{\pi\varphi}^2. \quad (2.57)$$

Contrairement à la célérité adiabatique $c_{A\varphi}$, la célérité anisotrope est une fonction des quantités perturbées : en plus de varier dans le temps elle dépend de l'échelle considérée.

D'après (2.53), à grande échelle, $c_{\pi\varphi}^2$ contribue à augmenter la vitesse de propagation des perturbations du fluide φ

$$c_{\pi\varphi}^2 = -\frac{8}{3} \frac{\Omega_\nu}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} \quad (2.58)$$

et vaut -0.0655 pour les modèles $\{1, \cdot\}$, π_ν étant la source dominante de $c_{\pi\varphi}^2$.

En l'absence d'une source dominante initiale de pression anisotrope, lorsque $\Omega_\nu = 0$ par exemple, il est nécessaire d'aller rechercher les ordres suivants dans l'expression (2.48). Les contributions intrinsèques à φ évoluent à l'ordre dominant en $k^2\tau^4$ dans une ère de radiation, la contribution extérieure π_ψ étant donnée par τ^2 . Cependant, il est possible d'extraire un terme d'importance intermédiaire dans le cadre d'une ère mixte de radiation et de matière. Bien avant la transition radiation-matière, on développe le taux d'expansion et le facteur d'échelle à l'aide du paramètre de petitesse $\omega\tau$ où $\omega = \Omega_m H_0 / \sqrt{\Omega_r}$. On obtient par voie de conséquence, à l'ordre le plus bas en $\omega\tau$, l'expression de la pression anisotrope

$$\pi_\varphi = \frac{5\Omega_r A\tau^2}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} \omega\tau, \quad (2.59)$$

dont on dérive la célérité anisotrope

$$c_{\pi\varphi}^2 = -\frac{5}{3} \frac{\Omega_r}{15(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 4\Omega_\nu} \omega\tau, \quad (2.60)$$

soit $-0.153\omega\tau$ pour le modèle $\{0, 1\}$. Non seulement ce terme en $\omega\tau$ est dominant pour les modèles sans neutrinos, mais il est aussi compétitif au terme en π_ψ

en présence d'une densité quelconque de neutrinos à l'approche de la transition radiation-matière pour les modes qui seraient encore de type super-expansion.

On définit une version invariante de jauge de la célérité anisotrope à l'aide de la quantité $\delta_\varphi - 4\mathcal{H}v_\varphi$ à la place de δ_φ , relation (2.56)

$$c_{\pi\varphi}^2 \equiv \frac{2k^2}{9} \frac{\pi_\varphi}{\delta_\varphi - 4\mathcal{H}v_\varphi}, \quad (2.61)$$

qui, en l'absence d'une source extérieure de pression anisotrope π_ψ , se réduit à

$$c_{\pi\varphi}^2 = -\frac{5}{3} \frac{\Omega_\tau}{20(\Omega_\gamma + \Omega_\nu) + 8\Omega_\nu} \omega\tau. \quad (2.62)$$

Dans l'ère de matière

Avant tout, considérons les modes qui, tard dans l'ère de matière, sont encore dans le régime de type super-expansion. Dans ce cas, les perturbations de densité des différentes espèces demeurent toujours dans leur rapport adiabatique, par exemple $\delta_m = \frac{3}{4}\delta_\varphi$. Au niveau du terme source de l'équation de Poisson, la contribution du fluide φ comparée à celle de la matière est donc supprimée d'un facteur $a_{\varphi m}/a$, où $a_{\varphi m}$ est le facteur d'échelle au moment de l'égalité des densités du champ scalaire et de la matière, soit 1.29×10^{-4} pour les modèles $\{\cdot, 1\}$. De même, la pression anisotrope absolue de φ devient négligeable à cette époque, dès lors $\Phi = \Psi$. La conservation des perturbations de la courbure spatiale pour ces modes permet d'établir une relation entre les conditions initiales dans l'ère radiative et les potentiels dans l'ère de matière, à savoir

$$\Psi(\tau \gg \tau_{\text{eg}}) = \frac{3}{5}\zeta(0), \quad (2.63)$$

avec $\zeta(0)$ la perturbation de la courbure spatiale initiale, équation (A.46), identique pour tous les modèles $\{\cdot, \cdot\}$. Cette théorie et la relativité générale établissent donc un lien identique entre les conditions initiales et la valeur des potentiels de type super-expansion dans l'ère de matière. Pour ces modes, la fonction de transfert des perturbations de matière n'est pas affectée par φ . En effet, on dérive de la conservation de l'entropie une relation identique à la relativité générale entre $\zeta(0)$ et les perturbations de matière

$$\delta_m(\tau \gg \tau_{\text{eg}}) = -\frac{6}{5}\zeta(0). \quad (2.64)$$

En ce qui concerne les modes devenus de type sub-expansion tard dans l'ère de matière, à nouveau la conservation de l'entropie impose que les perturbations absolues du fluide φ sont supprimées par rapport à celles de la matière. Les potentiels Ψ et Φ étant constants lorsqu'ils deviennent de type sub-expansion dans l'ère de matière, ils sont dès lors fixés par la relation (2.63). La matière entame son évolution avec la même valeur d'entrée (2.64) qu'en relativité générale et s'effondre aussi dans les mêmes potentiels. La croissance des perturbations de densité de matière de ces modes s'effectue de manière identique dans les deux théories, l'expansion ne dépendant plus de Ω_φ . Aux grandes échelles, pour lesquelles $k \ll k_{\text{eg}}$, la fonction de transfert, la fonction de croissance et donc le spectre de puissance des perturbations de matière sont insensibles au fluide φ .

Nous dérivons maintenant l'évolution des perturbations du fluide φ pour les petites échelles $k\mathcal{H}^{-1} \gg 1$. L'équation du second ordre (2.55) pour δ_φ est résolue après avoir simplifié l'expression de la pression anisotrope π_φ . Le terme en v_φ de la relation (2.50) est négligé aux petites échelles. De plus, dans l'hypothèse d'une ère dominée par la matière, les termes en π_ψ et $\Omega_\varphi H_0^2 \frac{\tau^2}{a^2}$ sont eux aussi négligeables. Notons que ces approximations restent valables dans une ère dominée par la constante cosmologique. La célérité anisotrope prend alors la forme suivante

$$c_{\pi_\varphi}^2 = -\frac{2}{9} \left[3 + 2k^2 \tau^2 \frac{\Psi}{\delta_\varphi^N} \right]. \quad (2.65)$$

L'équation (2.55) devient ainsi à l'ordre le plus élevé en $k\tau$

$$\delta_\varphi^{N''} + k^2 \left[\delta_\varphi^N + \frac{4}{9} k^2 \tau^2 \Psi \right] - 4\Psi'' = 0. \quad (2.66)$$

On y reconnaît une contribution acoustique en $k^2 \delta_\varphi^N$ et le potentiel Ψ y jouant le rôle de source.

Pour des potentiels constants, comme dans l'ère de matière, la solution à cette équation s'écrit

$$\delta_\varphi^N(\tau) = -\frac{4}{9} k^2 \tau^2 \Psi + \alpha \cos(k\tau + \phi). \quad (2.67)$$

Les constantes d'intégration α et ϕ sont à raccorder avec la solution obtenue en dehors du domaine de validité de (2.67). Le terme croissant en $k^2 \tau^2$ est caractéristique d'un fluide sans pression s'effondrant dans un puits de potentiel. A ce mode monotone se superposent des oscillations acoustiques sans dispersion dont la célérité égale celle de la lumière. Au cours de l'expansion, l'amplitude de ces oscillations décroît relativement à celle du mode croissant, si bien qu'asymptotiquement

totiquement dans l'ère de matière, les perturbations des densités des fluides φ et de matière croissent de concert, $\delta_\varphi \propto \delta_m$.

Parallèlement, la célérité anisotrope (2.65) se simplifie en

$$c_{\pi\varphi}^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{1 + \frac{\beta \cos(k\tau)}{k^2 \tau^2}} - 2 \right], \quad (2.68)$$

la phase des oscillations étant omise et β étant une constante du même ordre de grandeur que α . La célérité anisotrope oscille donc autour d'une valeur constante avec une amplitude diminuant avec $k^2 \tau^2$. Asymptotiquement, on obtient que $c_{\pi\varphi}^2 = \frac{1}{3}$: la célérité effective (2.57) s'annule.

2.3.4 Evolution aux échelles intermédiaires

Afin d'obtenir à plus petite échelle l'évolution cosmologique des perturbations du fluide φ et des différents champs de matière, nous avons modifié le code CAMB [88]. Ce code intègre, mode par mode, les équations de conservation des perturbations des différents champs de matière et les équations d'Einstein. Nous y avons ajouté les équations (2.46) et (2.48) exprimées en fonction des perturbations relatives, ainsi que les sources correspondantes dans les équations d'Einstein. L'intégration débute pour chaque mode profondément dans l'ère de radiation lorsque le mode est encore dans le régime de type super-expansion. Les conditions initiales sont donc dérivées des relations (2.52).

Nous avons aussi implémenté l'intégration des équations de conservation en fonction des perturbations absolues du fluide φ ainsi que celle de l'équation (2.40) en termes de la perturbation du champ fondamental $\delta\varphi$. En guise de validation, les solutions des trois implémentations ont été comparées. Pour le modèle $\{1, 1\}$, les trois méthodes s'accordent sur les perturbations du fluide φ à 10^{-6} près tout au long de l'évolution cosmologique. Pour les autres fluides ou potentiels gravitationnels la concordance est au moins de l'ordre de 10^{-6} . La précision globale visée par CAMB étant de 10^{-3} , les trois implémentations sont donc équivalentes aussi du point de vue numérique.

Perturbations du fluide φ

Les solutions obtenues numériquement sont maintenant présentées. La figure 2.6 compare l'évolution de la célérité anisotrope du fluide φ (trait continu) à celle du fluide équivalent à tous les fluides minimalement couplés (traits tirets) de

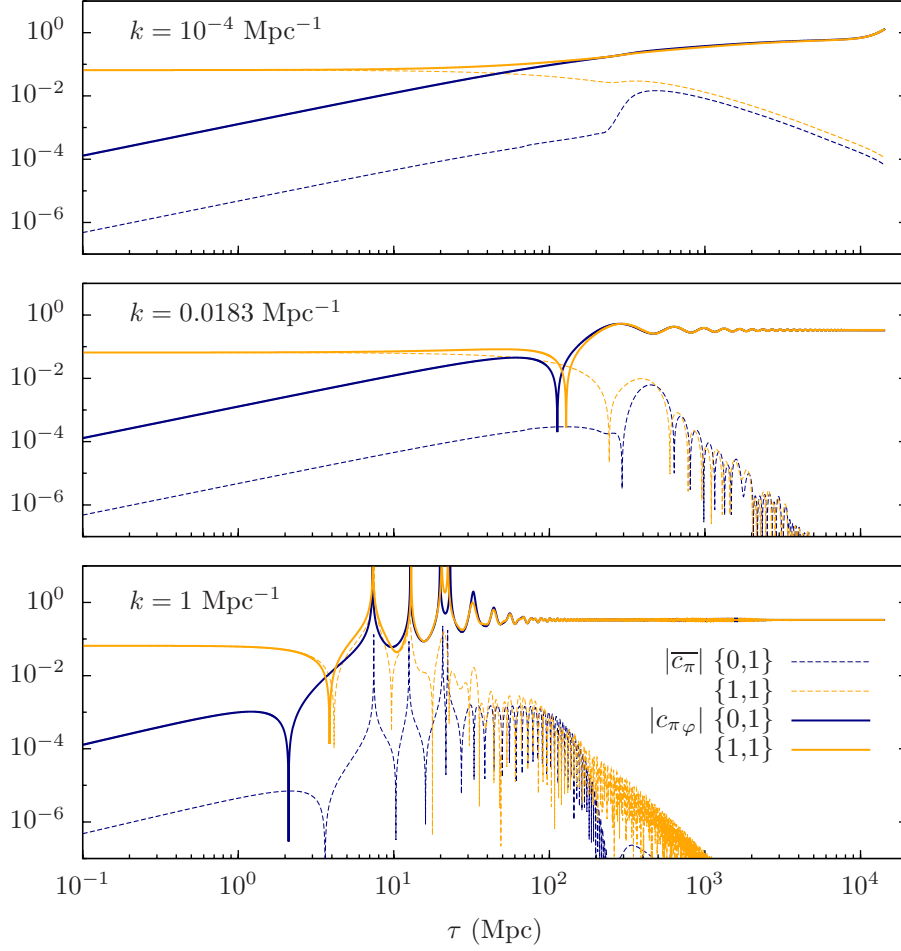


Fig. 2.6 – Célérités acoustiques anisotropes c_π du fluide φ et du fluide équivalent à tous les autres champs de matière pour trois échelles caractéristiques. Dans l'ère de radiation et lorsque les modes sont encore dans le régime de type super-expansion ($\tau \ll k^{-1}$), la solution (2.58) est d'application pour le modèle $\{1, 1\}$; en l'absence de neutrinos, modèle $\{0, 1\}$, on retrouve la solution (2.60). Dans le régime de type sub-expansion, après une série d'oscillations entre $c_{\pi\varphi} \rightarrow -\infty$ et $c_{\pi\varphi} \rightarrow +\infty$, la célérité acoustique quadratique se stabilise autour de la valeur $\frac{1}{3}$, solution (2.68).

perturbation de densité

$$\bar{\delta} \equiv \frac{\sum_{\psi} \rho_{\psi} \delta_{\psi}}{\sum_{\psi'} \rho_{\psi'}}. \quad (2.69)$$

On définit de manière équivalente sa pression anisotrope $\bar{\pi}$ contribuant à $\overline{c_{\pi}^2} \propto \bar{\pi}/\bar{\delta}$. Deux modèles sont étudiés : $\{0,1\}$ et $\{1,1\}$, mis à part le nombre de neutrinos ils sont pourvus des mêmes paramètres cosmologiques, en particulier $N_{\varphi} = 3.04$. Trois échelles caractéristiques ont été choisies : $k = 10^{-4}$, 0.0183 et 1 Mpc^{-1} . Le premier mode devient de type sub-expansion aujourd’hui, le second au moment du découplage photons-baryons et le dernier dans l’ère de radiation.

A grande échelle, dans l’ère de radiation, les résultats dérivés précédemment sont confirmés. Pour le modèle $\{1,1\}$ l’évolution des perturbations relatives du fluide φ (figure 2.6, $\tau \lesssim 10 \text{ Mpc}$, trait continu en jaune) suit l’évolution des perturbations moyennes des champs de matière (traits tirets en jaune), indépendamment donc de Ω_{φ} . En corollaire, les potentiels et les perturbations des autres fluides ne ressentent pas les perturbations du fluide φ . Quand les modes sont de type super-expansion, la pression anisotrope π_{ψ} n’est pas négligeable et contribue de façon dominante à la pression π_{φ} , de telle sorte que $c_{\pi\varphi}^2 = \overline{c_{\pi}^2}$, relation (2.58). Pour le modèle $\{0,1\}$, seuls les photons participent à la pression anisotrope π_{ψ} . Le couplage photons-baryons rendant isotrope le fluide de photons, le terme intrinsèque à φ domine $c_{\pi\varphi}^2$ (trait continu en bleu), relation (2.60).

Pour le mode $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$, modèle $\{0,1\}$, les termes d’ordres supérieurs en $k\tau$ dominent pour $\tau \gtrsim 1 \text{ Mpc}$ provoquant un changement de signe de π_{φ} , après quoi $c_{\pi\varphi}^2 > 0$. Après ce renversement, le taux de croissance est plus élevé. Pour le modèle $\{1,1\}$, en raison de la différence de signe entre $\overline{c_{\pi}^2}$ et la contribution dite intrinsèque le changement de signe de $c_{\pi\varphi}^2$ se produit plus tôt que pour $\overline{c_{\pi}^2}$. Lorsque que le mode entre dans le régime de type sub-expansion, puisque la célérité effective est positive et proche de $c_{A\varphi}$, le fluide φ subit une série d’oscillations acoustiques. Les divergences de $c_{\pi\varphi}^2$ dans le régime acoustique n’ont pas d’impact sur la dynamique de δ_{φ} . En effet dans l’équation (2.55) le terme $\frac{\pi}{\delta} \times \delta$ reste fini quand $\delta \rightarrow 0$.

A la transition radiation-matière, la célérité anisotrope des autres champs de matière décroît : le coefficient du terme en π_{ψ} est proportionnel à $(\rho_{\gamma} + \rho_{\nu})/(\rho_r + \rho_m)$ et est décroissant au fur et à mesure que la matière domine. Le terme intrinsèque (2.60) prend alors le dessus.

A la manière du fluide photons-baryons, la contribution du terme intrinsèque conduit à une asymétrie entre la pression effective du fluide φ et le terme gravitationnel. Les oscillations développent une moyenne non-nulle, les pics impairs sont d'amplitude réduite par rapport aux pics pairs. Lorsque la pression effective du fluide est suffisamment petite, les oscillations acoustiques de δ_φ cessent (oscillations avec changement de signe). A ce niveau, c'est-à-dire à suffisamment petite échelle et dans l'ère de matière, le régime régit par (2.67) et (2.68) est alors atteint : les perturbations de densités δ_φ croissent et sont modulées par la pression effective résiduelle.

Comme nous l'avons vu, les perturbations du fluide φ se comportent asymptotiquement comme un fluide de matière : dans l'ère de matière $\delta_\varphi \propto a$. Ce constat n'est valide qu'en termes de perturbations relatives. Les perturbations absolues de ces deux fluides évoluent différemment : au niveau homogène la densité d'énergie évolue toujours comme $\rho_\varphi \propto a^{-4}$.

Potentiels et perturbations de matière

Les modes devenant de type sub-expansion tard dans l'ère de matière sont traités aux équations (2.63) et (2.64). Les potentiels et les perturbations de matière à ces échelles ne sont pas affectés par le fluide φ . Concentrons-nous maintenant sur les modes pour lesquels $k\mathcal{H}^{-1} \gtrsim 1$ dans l'ère de radiation.

Pour des modes de type sub-expansion dans l'ère de radiation, les perturbations du fluide φ subissent une série d'oscillations acoustiques à l'instar des neutrinos. Ces oscillations ne permettent pas aux potentiels de se maintenir. Ils décroissent donc quand le mode devient de type sub-expansion. Au fur et à mesure que l'ère de matière approche, la pression effective du fluide φ diminue permettant à δ_φ de croître. La célérité anisotrope oscille autour de la valeur $c_{A\varphi}^2$. Par moment la célérité effective est alors négative, permettant aux fluctuations relatives de φ de croître plus vite que celles de matière. On remarque que le rapport des fluctuations absolues $\rho_\varphi \delta_\varphi / \rho_c \delta_c$ est constant à l'approche de la transition radiation-matière. Pour ces échelles le fluide φ se comporte comme une composante de matière au niveau des perturbations absolues. Le fluide φ contribue donc au potentiel gravitationnel Ψ via l'équation de Poisson, au même titre que la matière sombre. L'amplitude des potentiels s'en trouve augmentée à la transition radiation-matière. Puisque la valeur des potentiels à la transition sert de condition initiale à la croissance des perturbations de matière, le spectre de matière (A.63) est amplifié pour les échelles $k \gg k_{\text{eg}}$ (si $\Omega_\varphi = \mathcal{O}(\Omega_r)$). Le facteur d'amplification est fonction du rapport des perturbations absolues du fluide φ et de matière sombre à l'égalité.

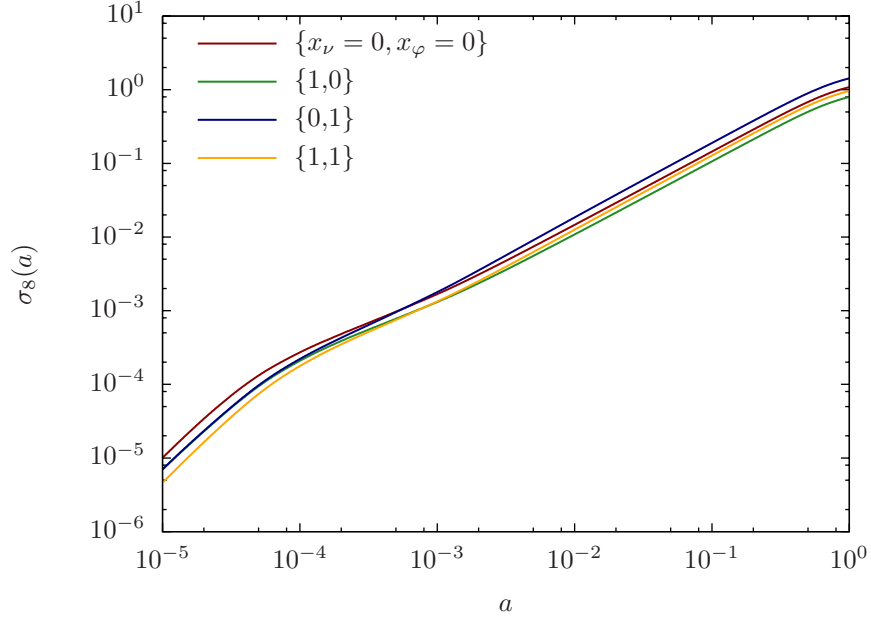


Fig. 2.7 – σ_8 en fonction du facteur d'échelle pour différents contenus en radiation.

La figure 2.7 représente l'évolution de σ_8 en fonction du facteur d'échelle. Pour $a \lesssim 10^{-4}$ les échelles contribuant à σ_8 sont encore de type super-expansion. Calculées dans la jauge synchrone à la matière sombre, les valeurs de σ_8 diffèrent, pour une valeur donnée du facteur d'échelle, uniquement en fonction du contenu radiatif Ω_r au niveau homogène. D'après la solution (2.52b), on constate que σ_8 évolue avec a^2/Ω_r . Par la suite, à l'approche de la transition, la présence des perturbations du fluide φ favorise la croissance des perturbations de matière. La valeur de σ_8 est systématiquement plus élevée en présence du champ scalaire.

Pour comparer l'évolution des perturbations dans l'ère de radiation, il s'avère utile de représenter les valeurs de σ_8 à leur valeur d'aujourd'hui, figure 2.8. Les perturbations absolues du fluide φ étant négligeables profondément dans l'ère de matière ($a > 10^{-2}$), le formalisme de la fonction de croissance s'applique : l'évolution dans l'ère de matière ne dépend pas de l'histoire radiative de l'univers. Par contre avant la transition, l'évolution des σ_8 normalisés se différencie non pas en fonction de Ω_r mais bien selon Ω_φ .

La figure 2.9 montre le spectre de puissance de la matière pour les quatre modèles de référence. Pour les grandes échelles, en deçà du *turn-around* (A.64), le

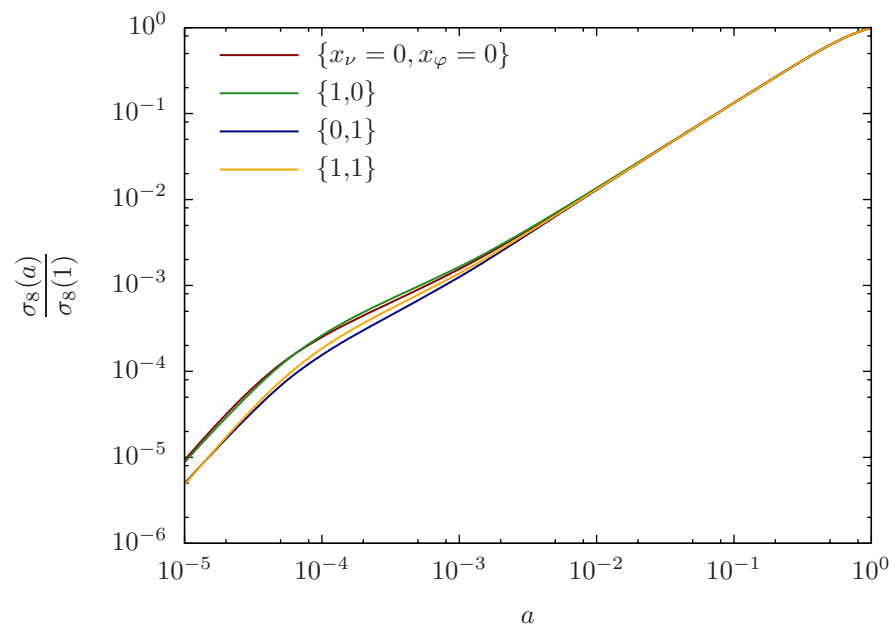


Fig. 2.8 – L'évolution de la fonction de croissance dans l'ère de radiation est sensible à la nature de ces radiations.

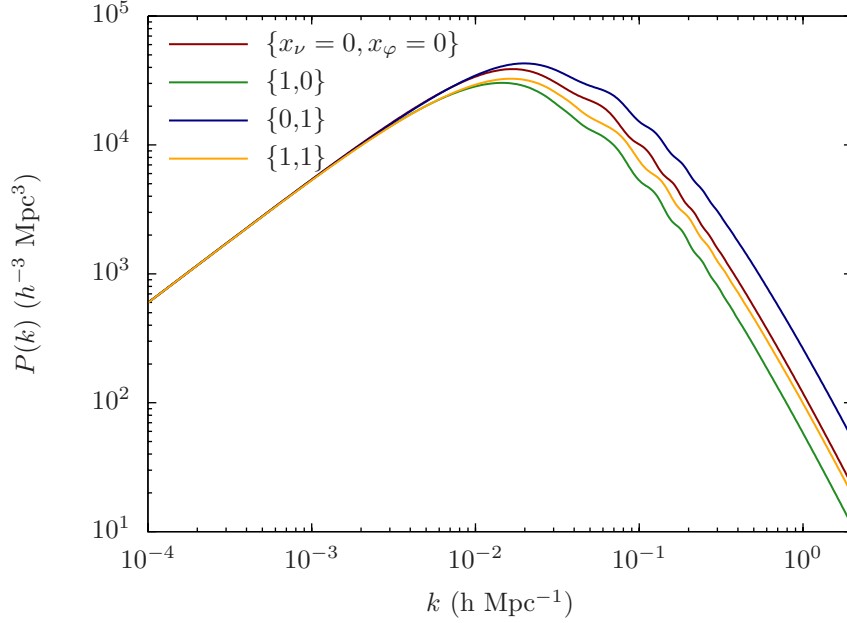


Fig. 2.9 – Spectre de puissance de la matière. Les effets des neutrinos non-massifs et de la radiation sombre φ sont opposés.

spectre n’est pas affecté par le champ scalaire. Pour les petites échelles, contrairement aux neutrinos dont les oscillations sont amorties dans l’ère de radiation, les perturbations absolues du fluide φ contribuent positivement aux potentiels et modifient la valeur de départ des perturbations de matière lorsque celles-ci entament leur croissance après la transition radiation-matière. A petite échelle l’amplitude des perturbations est donc plus importante lorsque le fluide φ est présent.

2.3.5 Spectre du CMB

Plateau Sachs-Wolfe

Intéressons-nous maintenant à l’une des sources du spectre du CMB aux grandes échelles, à savoir la contribution Sachs-Wolfe ordinaire $\Theta_0^{\text{SW}} \equiv \Theta_0 + \Phi$ à l’époque de la recombinaison, soit au début de l’ère de matière. A l’aide de la condition initiale $\Theta_0(0) = -\frac{1}{2}\Phi(0)$ et de l’équation de conservation des perturbations de température à grande échelle $(\Theta_0 - \Psi)(\tau) = c^{\text{te}}$, on peut exprimer $\Theta_0^{\text{SW}}(\tau)$ sous

la forme suivante, indépendamment de l'ère considérée

$$\Theta_0^{\text{SW}}(\tau) = -\zeta(0) + (\Psi + \Phi)(\tau). \quad (2.70)$$

Au départ, la température Sachs-Wolfe $\Theta_0^{\text{SW}}(0) = \frac{1}{2}\Phi(0)$ dépend notamment de la pression anisotrope moyenne mais reste finalement insensible aux perturbations du champ scalaire. Dans l'ère dominée par les radiations le potentiel Ψ reçoit une contribution positive de la part de la pression anisotrope

$$\Psi = \frac{2}{3}\zeta(0) + \frac{1}{3}\kappa a^2 \rho_s w_s \pi_s, \quad \tau \ll \tau_{\text{eg}}. \quad (2.71)$$

La partie de Θ_0^{SW} sensible à la pression anisotrope devient alors

$$\Psi + \Phi = \frac{4}{3}\zeta(0) - \frac{1}{3}\kappa a^2 \rho_s w_s \pi_s, \quad \tau \ll \tau_{\text{eg}}, \quad (2.72)$$

une valeur positive de la pression anisotrope réduit l'amplitude de la température $\Theta_0^{\text{SW}}(\tau \ll \tau_{\text{eg}})$. Plus tard profondément dans l'ère dominée par la matière et les perturbations de matière, les potentiels ne dépendent que de la perturbation initiale de courbure spatiale

$$\Psi + \Phi = 2\Psi \quad (2.73a)$$

$$= \frac{6}{5}\zeta(0), \quad \tau \gg \tau_{\text{eg}}. \quad (2.73b)$$

Si la recombinaison se produit profondément dans l'ère de matière l'amplitude Sachs-Wolfe est indépendante de l'histoire radiative de l'Univers. Dans ce cas, la température Sachs-Wolfe n'est pas un indicateur de la présence de pression anisotrope. Dans un cas réaliste la recombinaison a lieu peu après la transition radiation-matière, Table 2.1, il s'impose dès lors de dépasser le cas limite (2.73).

D'après (2.72), dans l'ère de radiation, la présence d'une pression anisotrope positive fixe la hiérarchie $\Theta_0^{\text{SW}}_{\{1,\cdot\}} < \Theta_0^{\text{SW}}_{\{0,\cdot\}}$ entre les modèles avec et sans neutrinos. La question est de savoir si cette hiérarchie se maintient lors de la transition radiation-matière. Pour des potentiels variables dans le temps, la conservation de $\zeta(\tau)$ à grande échelle permet d'écrire

$$(\Psi + \Phi)(\tau) = \frac{2}{5 + 3w} \left[3(1 + w)\zeta(0) - (1 + 3w)\kappa a^2 \rho_s w_s \pi_s - \frac{2}{\mathcal{H}}\Psi' \right], \quad (2.74)$$

avec $w = w(\tau)$ le paramètre d'état du mélange radiation-matière et la somme sur les espèces s inclut tous les champs de matière et φ . A l'approche de la transition, contrairement au terme en π_s le terme $-\frac{2}{\mathcal{H}}\Psi'$ est positif. Cette

dernière contribution due à la décroissance du potentiel Ψ est d’autant plus importante que la pression anisotrope initiale est grande (2.71). C’est donc la combinaison de ces deux termes, de signes opposés, qui détermine la hauteur du plateau Sachs-Wolfe des différents modèles. De surcroît, chaque modèle possède sa propre histoire radiative et une époque de recombinaison différente. La fonction de visibilité sélectionne donc la combinaison $\Psi + \Phi$ à des moments τ_* différents, figure 2.4. Les simulations numériques montrent qu’à la transition et après celle-ci, on observe un renversement de la hiérarchie des températures Sachs-Wolfe $\Theta_0^{\text{SW}}_{\{1,\cdot\}} > \Theta_0^{\text{SW}}_{\{0,\cdot\}}$ et aussi $\Theta_0^{\text{SW}}_{\{1,1\}} > \Theta_0^{\text{SW}}_{\{1,0\}}$.

Cette différence entre les modèles reste cependant réduite. Le plateau Sachs-Wolfe du spectre du CMB est peu sensible à Ω_φ et aux perturbations du fluide φ : la source Sachs-Wolfe est donc un *piètre* indicateur de la présence de pression anisotrope aux grandes échelles, figure 2.10.

Pics acoustiques

Dans l’approximation du couplage intense photons-baryons, la contribution de l’effet Sachs-Wolfe ordinaire aux pics acoustiques se déduit des potentiels à la recombinaison [89]. C’est à la fois les potentiels et leurs dérivées qui déterminent la dynamique des oscillations du fluide photons-baryons. La solution numérique est donnée à la figure 2.10 (courbes SW). **Pour la contribution SW, le fluide φ se distingue des neutrinos au niveau des pics pairs.**

Effet Sachs-Wolfe intégré

Dans l’approximation d’une recombinaison instantanée, l’effet Sachs-Wolfe intégré dépend de la variation des potentiels entre la recombinaison et aujourd’hui : $\Psi + \Phi|_{\tau_*}^{\tau_0}$. L’ajout de radiation a pour effet de rapprocher la transition radiation-matière de la recombinaison. La recombinaison a lieu alors que les potentiels sont encore dans leur phase de variation juste après la transition, pour les modes contribuant aux deux premiers pics acoustiques. Cependant, cette variation est moindre en présence du champ scalaire. Car en effet, d’une part le mimétisme du fluide φ ne modifie pas la valeur initiale des potentiels et d’autre part les perturbations absolues du fluide φ maintiennent le potentiel final à une valeur élevée. La présence du champ scalaire se distingue donc de celle des neutrinos par un effet Sachs-Wolfe intégré primitif de moindre amplitude.

La variation tardive des potentiels lors de la transition entre l’ère de matière et celle dominée par la constante cosmologique influe aussi l’effet Sachs-Wolfe intégré. Tant la densité d’énergie que les perturbations du champ scalaire étant

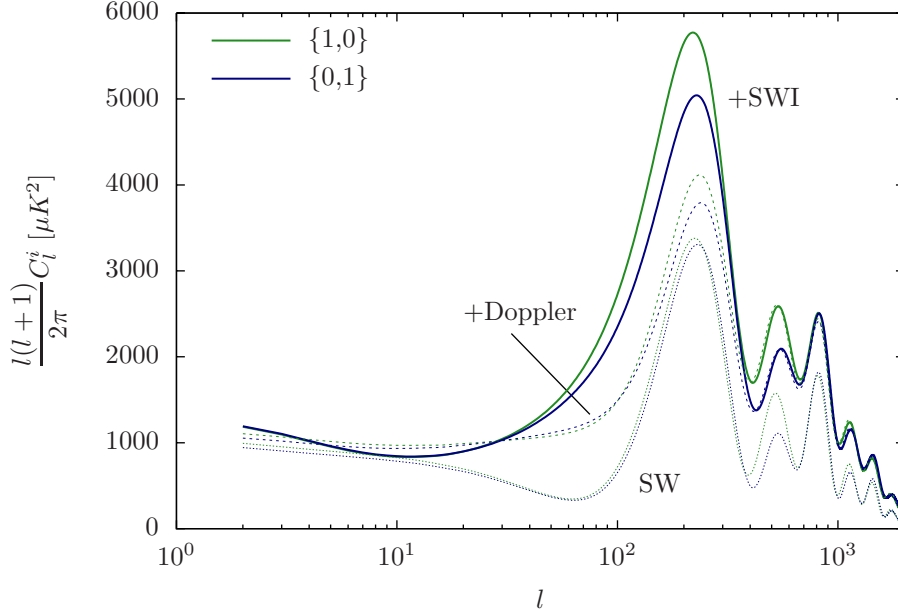


Fig. 2.10 – Contributions cumulées des différentes sources au spectre de puissance du CMB, équation (A.81) : effets Sachs-Wolfe ordinaire (SW), Doppler et Sachs-Wolfe intégré (SWI).

négligeables à cette époque, les potentiels varient de la même façon qu'en relativité générale.

La figure 2.11 représente le spectre angulaire de l'effet Sachs-Wolfe intégré. Les contributions primitive et récente sont séparées en divisant le domaine d'intégration de (A.81c) en $[0, a_c]$ et $]a_c, 1]$. La coupure $a_c = 0.1$ a été choisie telle que l'amplitude des deux effets est invariante pour une petite variation de a_c .

Spectre complet

Contrairement à la source Doppler, la source SWI s'additionne de façon cohérente au terme SW. La distinction entre champ scalaire et neutrinos au niveau du premier pic du spectre total 2.12 provient principalement de l'effet SWI-primitif. A plus petite échelle angulaire, la puissance SWI est réduite et ne contribue plus significativement à partir de $l \sim 500$, soit la position du deuxième

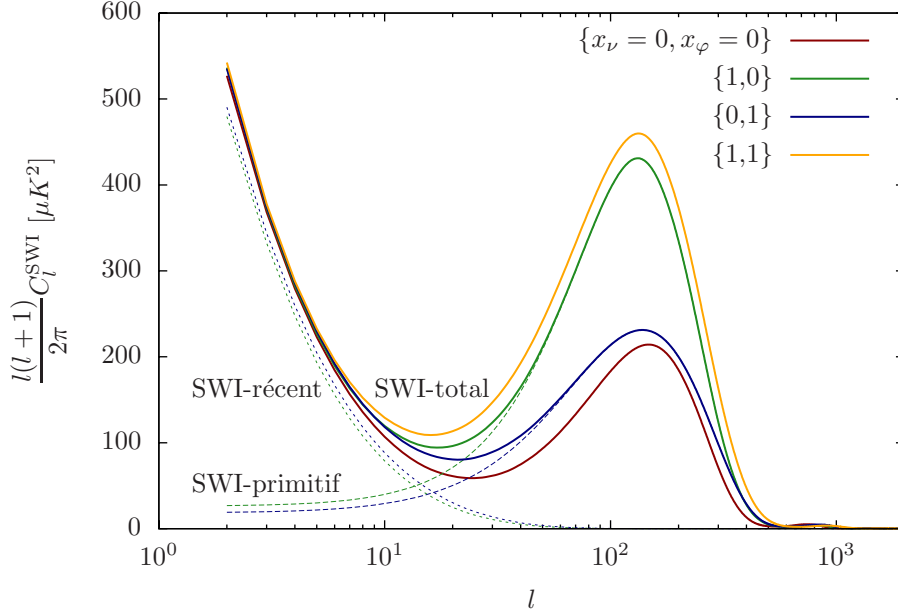


Fig. 2.11 – Spectre de puissance de l’effet Sachs-Wolfe intégré C_l^{SWI} , contribution (A.81c). Séparation des contributions provenant de la transition radiation-matière (SWI-primitif) et de la transition matière-constante cosmologique (SWI-récent).

pic acoustique. A partir de cette échelle, les deux modèles se différencient grâce au terme SW.

En ce qui concerne la position des pics, on identifie trois effets. Tout d’abord, au niveau homogène l’ajout de radiation diminue le diamètre angulaire acoustique et déplace donc les pics SW vers de plus grands multipôles, équation (1.67b) et table 2.1. Ensuite, la décroissance des potentiels provoque un retard des oscillations acoustiques. Celles-ci atteignent leurs extrema plus tard. Ce sont donc des échelles plus grandes qui atteignent un extremum à la recombinaison, déplaçant le spectre acoustique SW vers de plus petits multipôles. A cette contribution contraire, s’ajoute l’effet SWI dont la position du maximum est identique pour les différents modèles, réduisant aussi le déplacement vers les plus grands multipôles.

La combinaison de ces effets sur le positionnement des pics est représentée à la figure 2.5 où l’on peut apprécier l’effet des perturbations du champ scalaire. Bien que réduite, la distinction entre les décalages induits par le champ scalaire et les neutrinos persiste après l’ajout des perturbations de φ . Ce rapprochement

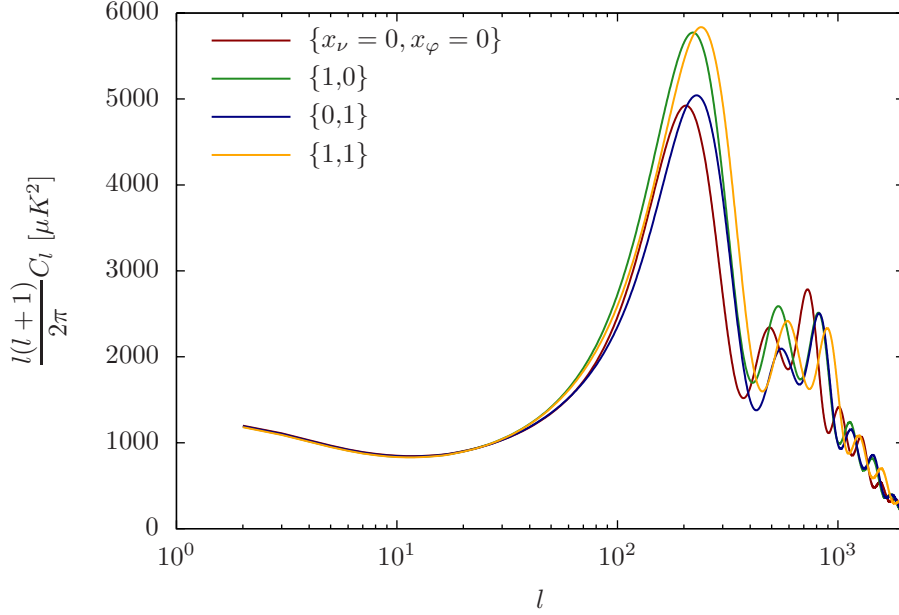


Fig. 2.12 – Spectres de puissance du CMB des quatre modèles de référence. Le plateau Sachs-Wolfe, $l \lesssim 20$, n'est pas affecté par les radiations. Les deux premiers pics acoustiques, $l_1 \sim 220$ et $l_2 \sim 530$, au contraire du troisième, distinguent clairement les deux modèles de radiations ($\{1,0\}$: neutrinos seuls ; $\{0,1\}$: champ scalaire seul) tant en amplitude qu'en localisation horizontale, figure 2.5. La comparaison de ces spectres avec les observations du satellite WMAP est donnée à la section 2.4.

se traduit par un accroissement général des décalages acoustiques ϕ_m . Pour les décalages ayant une corrélation négative avec Ω_ϕ , cet accroissement tend à diminuer leur dépendance en Ω_ϕ . Notons deux exceptions, ϕ_1 à densité de matière constante et ϕ_3 avec a_{eg} et N_ν constants, pour lesquelles la tendance est positive.

La variation de la hauteur des pics est aussi différente en présence des perturbations de ϕ . En particulier, le deuxième pic acoustique n'est plus absorbé par le troisième aux grandes valeurs de Ω_ϕ . Plutôt que de contraindre Ω_ϕ à l'aide d'une relation empirique du type $l_m = l_m(\Omega_\phi)$, nous utilisons dans la section suivante toute l'information contenue dans le spectre du CMB, y compris la hauteur des pics acoustiques.

2.4 Contraintes et dégénérescences

Dans cette section, nous dérivons une contrainte sur la densité du champ scalaire en exploitant les données du CMB. Nous déterminons ainsi le pouvoir discriminant du CMB entre le paramètre Ω_ϕ et ceux du modèle de concordance en cherchant l’existence d’éventuelles dégénérescences entre ces paramètres. La distinction entre neutrinos et champ scalaire est également prise en considération.

2.4.1 Données cosmologiques

Attachons-nous ici aux différents ensembles de données qui seront combinés et motivons leur utilisation.

HST

L’observation de céphéïdes permet l’étalonnage d’indicateurs de distances relatives. Grâce au télescope spatial Hubble, HST, le H_0 Key Project [90] a ainsi calibré la luminosité des supernovae de type Ia et II, les fluctuations de la brillance de surface de galaxies, la relation de Tully-Fisher de galaxies spirales et la relation dite d’*occupation du plan fondamentale* de galaxies elliptiques. La procédure fut la suivante. D’abord la relation entre la luminosité et la période de variabilité de la luminosité d’une céphéïde est calibrée pour les céphéïdes se trouvant dans un objet *ancree* situé à une distance connue, en l’occurrence le Grand Nuage de Magellan. Ensuite les indicateurs secondaires sont étalonnés à l’aide de céphéïdes se trouvant dans les galaxies *hôtes* utilisées pour ce dernier calibrage. Ces objets intermédiaires sont distants de 25 Mpc tout au plus. Enfin, un diagramme de Hubble est établi grâce à ces indicateurs appliqués à des objets situés jusqu’à 400 Mpc. Dans ces limites de distance et de précision, la loi d’expansion cosmologique d’abord prédite et calibrée par Georges Lemaître puis empiriquement redéveloppée par Edwin Hubble est d’application dans sa forme originale. Indépendamment des autres paramètres cosmologiques contrôlant le taux d’expansion, le taux d’expansion actuel est alors évalué, d’après [90], à

$$H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} . \quad (2.75)$$

Une mesure plus récente a été établie par [91]. L’objet ancre est cette fois plus lointain, il s’agit de la galaxie Maser NGC 4258. Tant au niveau de leur métallicité que de leur période de variabilité, les céphéïdes situées dans l’objet ancre

et dans les galaxies hôtes du calibrage forment un échantillon homogène. De plus, les observations réalisées dans l'infrarouge proche avec un seul et même instrument (NICMOS sur HST) profitent elles aussi d'une meilleure homogénéité. Les erreurs systématiques ont ainsi pu être réduites d'un facteur deux par rapport à [90]. Le calibrage est réalisé avec 97 céphéïdes dans l'objet ancre et avec 110 autres réparties dans 6 galaxies hôtes de supernovae de type Ia. La récession de 140 supernovae [92] permet aux auteurs de [91, 30] de proposer que $H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Ces valeurs de H_0 peuvent-elles être exploitées telles quelles pour des cosmologies et en gravitation modifiées par le champ scalaire φ ? En effet, tant les indicateurs primaire et secondaire sont de nature à être affectés par une variation de la constante de Newton. Pour un modèle du type $\{1, 1\}$, le taux variation \dot{G}/G vaut $-5.4 \times 10^{-14}/\text{an}$. Les objets les plus lointains exploités par [90, 91] étant situé à un redshift de l'ordre de $z \sim 0.1$, on supposera que ce taux de variation est constant. Pour ces objets, distants d'environ 400 Mpc, la variation relative de G s'élève à 7.4×10^{-5} . En supposant que la luminosité des supernovae de type Ia varie avec $G^{-3/2}$ [93, 85], l'augmentation du module de distance induite par le champ scalaire vaut 1.2×10^{-4} pour une supernova située à un redshift de 0.1. Le biais ainsi introduit est en deçà des erreurs systématiques qui s'élèvent à environ 0.1 en magnitude pour la mesure (2.75). On la considère dès lors comme indépendante de Ω_φ .

Union

En l'absence de calibrage, un indicateur de distance relative permet de sonder le taux d'expansion normalisé à sa valeur actuelle $\mathcal{H}(z)/H_0$. La compilation Union [94] associe les données de 8 nouvelles supernovae proches de type Ia à 299 autres supernovae du même type principalement issues des collaborations ESSENCE [95, 96], HST [97] et SNLS [98].

Ces dernières supernovae sondent des redshifts allant jusqu'à $z = 1.55$. Pour un tel redshift la constante de Newton s'accroît de 1.1×10^{-3} dans le modèle $\{1, 1\}$, augmentant le module de distance de 1.8×10^{-3} . A nouveau nous ne considérerons donc pas l'influence de la variation de G sur l'évolution des supernovae. En ce qui concerne la relation magnitude-redshift des supernovae, le paramètre Ω_φ n'intervient qu'au niveau du facteur d'expansion $\mathcal{H}(z)$. Aux redshifts relevant pour les supernovae, l'influence du champ scalaire sur $\mathcal{H}(z)$ a une amplitude de l'ordre de $(1+z)\Omega_\varphi/\Omega_m$.

Un modèle viable de l'Univers requiert que la transition radiation-matière se produise à très haut redshift, $z_{\text{eg}} \sim 10^3$, imposant $\Omega_\varphi/\Omega_m \lesssim 10^{-3}$. En l'état

actuel des mesures de luminosité des supernovae et de leur dispersion dans l’espace des redshifts, la relation luminosité-redshift seule ne permet donc pas de contraindre Ω_φ . Cependant, cet indicateur de distance contraint d’autres paramètres cosmologiques et pourrait réduire d’éventuelles dégénérescences de paramètres présentes dans d’autres observables cosmologiques.

WMAP

Le spectre du CMB dérivé à la section précédente est comparé aux données du satellite WMAP recueillies pendant les cinq premières années de fonctionnement (WMAP5) [99, 100, 101]. La collaboration WMAP fournit l’algorithme nécessaire au calcul de la fonction de vraisemblance [102, 103]. Cette fonction se base sur les données nettoyées des contaminants d’origine astrophysique. Ces avant-plans sont soit masqués (plan galactique et sources ponctuelles galactiques et extragalactiques) soit soustraits (émission galactique diffuse). Pour cette composante diffuse, la procédure de soustraction est interne aux données multi-fréquences de WMAP. Nous supposons donc que les cartes nettoyées des avant-plans restent inchangées en présence du champ scalaire et indépendantes des modifications que ce champ apporte au niveau des paramètres cosmologiques, en particulier l’amplitude des perturbations de matière à petite échelle.

Le spectre théorique, issu de CAMB, représente le signal cosmologique. Au travers de l’équation (A.81), ce signal inclut déjà deux sources d’anisotropies secondaires. La première source consiste en l’effet Sachs-Wolfe intégré, obtenu grâce à l’intégration des potentiels gravitationnels tout au long de l’expansion. La seconde provient de la ré-ionisation dont l’effet sur la propagation des anisotropies du fluide de photons se révèle via la fonction de visibilité $g(\tau)$.

Une source supplémentaire d’avant-plan diffus mais d’origine extragalactique est l’effet Sunyaev-Zel’dovich (SZ). L’interaction des photons du CMB avec le gaz chaud d’électrons des clusters les plus massifs augmente l’amplitude du spectre du CMB sur les échelles angulaires sondées par WMAP [104]. Cette amplitude varie notamment avec le profil de densité de ces halos de matière et avec leur distribution en masse, par conséquent l’effet dépend principalement de la valeur de σ_8 . La présence du champ scalaire accroît σ_8 et amplifie donc indirectement l’effet SZ sur le spectre du CMB. Actuellement l’effet SZ est pris en compte dans les simulations du CMB via une contribution effective $C_l^{SZ} = A_{SZ} \times C_{lcal}^{SZ}$. A_{SZ} est un paramètre indépendant des autres paramètres cosmologiques et C_{lcal}^{SZ} est le spectre angulaire SZ d’un modèle cosmologique Λ CDM réaliste [104]. Dans l’intervalle $[0; 2]$ aucune valeur de A_{SZ} n’est actuellement préférée par les données WMAP5 pour un modèle Λ CDM. Les données

WMAP étant pour l'instant insensibles à un tel signal SZ, nous supposons A_{SZ} indépendant de Ω_φ , A_{SZ} servant de paramètre de contrôle. Dans l'éventualité où un signal SZ est détecté dans les futures données WMAP, il sera nécessaire de corrélérer A_{SZ} à σ_8 ce qui modifiera les contraintes CMB sur Ω_φ .

2.4.2 Résultats

Une série de simulations MCMC, Annexe B.1, ont été réalisées où à la fois les paramètres du modèle Λ CDM ainsi que les paramètres $\Omega_\varphi h^2$ et/ou N_ν varient. Les différents jeux de paramètres confrontés aux observations sont alors

$$\{1, \cdot\} \equiv \{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \theta_*, \mathcal{T}_c, \log A_s, n_s, A_{SZ}, \mathbf{\Omega}_\varphi \mathbf{h}^2\} \quad N_{\nu\text{eff}} = 3.04 \quad (2.76a)$$

$$\{0, \cdot\} \equiv \{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \theta_*, \mathcal{T}_c, \log A_s, n_s, A_{SZ}, \mathbf{\Omega}_\varphi \mathbf{h}^2\} \quad N_{\nu\text{eff}} = 0 \quad (2.76b)$$

$$\{\cdot, 0\} \equiv \{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \theta_*, \mathcal{T}_c, \log A_s, n_s, A_{SZ}, \mathbf{N}_{\nu\text{eff}}\} \quad \Omega_\varphi h^2 = 0 \quad (2.76c)$$

$$\{\cdot, \cdot\} \equiv \{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \theta_*, \mathcal{T}_c, \log A_s, n_s, A_{SZ}, \mathbf{\Omega}_\varphi \mathbf{h}^2, \mathbf{N}_{\nu\text{eff}}\}. \quad (2.76d)$$

Un prior plat, équation (B.1), est choisi pour ces paramètres.

CMB seul

Considérons dans un premier temps les modèles $\{1, \cdot\}$. La table 2.2 donne les contraintes WMAP5 à 1σ . La valeur $\Omega_\varphi h^2 = 0$ est compatible avec ces données et correspond à la plus haute valeur de la distribution a posteriori marginalisée.

A un niveau de confiance de 2σ , la contrainte WMAP5 s'écrit

$$\boxed{\text{WMAP5 : } \quad \Omega_\varphi h^2 < 2.3 \times 10^{-5} \quad (2\sigma),} \quad (2.77)$$

ou encore $N_\nu < 4.0$. Alors que pour le paramètre isolé Ω_φ on obtient $\Omega_\varphi < 1.5 \times 10^{-5}$. La contrainte semble peu performante comparée à celle de la nucléosynthèse primordiale, équation (2.39). Les dégénérescences entre les paramètres en sont la raison. En effet, en comparant les contraintes WMAP5 entre les modèles Λ CDM et $\{1, \cdot\}$, tables B.2 et 2.2, on remarque au niveau des paramètres primaires que la présence du champ scalaire dégrade principalement la contrainte sur n_s et dans une moindre mesure celles sur A_s et $\Omega_b h^2$. Cette dégénérescence de $\Omega_\varphi h^2$ est corrélée à H_0 , figure 2.13 : les grandes valeurs de $\Omega_\varphi h^2$ sont permises pour autant qu'à la fois n_s et H_0 soient élevés. A l'opposé, la dégénérescence entre $\Omega_\varphi h^2$ et H_0 ne modifie pas la distribution de $\Omega_c h^2$,

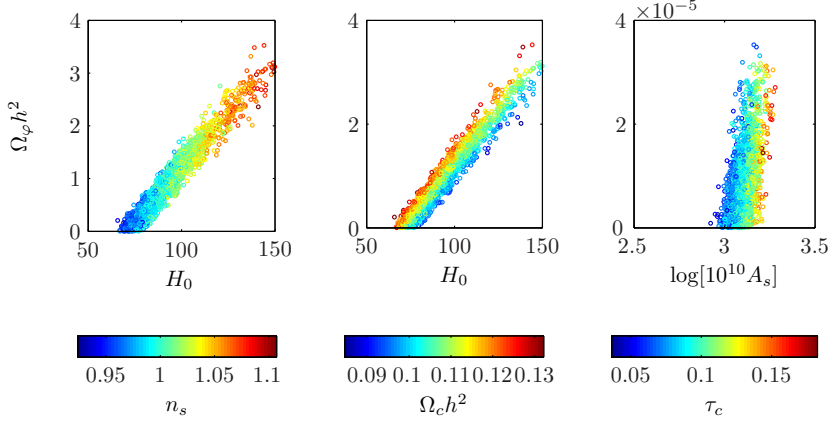


Fig. 2.13 – Dégénérescence des données WMAP5 dans le modèle $\{1, \cdot\}$ entre les paramètres $\Omega_\phi h^2$, H_0 , n_s , $\Omega_c h^2$, A_s et τ_c . Echantillon de la distribution a posteriori aminci d’un facteur 300.

panneau central de la figure 2.13. Le panneau de droite montre un cas intermédiaire aux deux précédents où la dégénérescence entre A_s et τ_c présente dans le modèle Λ CDM domine par rapport à la dégénérescence introduite par $\Omega_\phi h^2$.

Le prior théorique sur la densité d’énergie du champ scalaire, $\Omega_\phi h^2 \geq 0$, rend asymétrique les distributions marginalisées des paramètres avec lesquels $\Omega_\phi h^2$ est dégénéré. Par conséquent les valeurs moyennes de ces paramètres sont déplacées dans le sens de la corrélation, par exemple h passe de 0.72 pour le Λ CDM à 0.91 en présence du champ scalaire.

La dégénérescence de H_0 affecte les quantités qui en sont dérivées. Par exemple, l’Univers est en moyenne plus jeune (t_0). Autre conséquence, la densité de matière Ω_m qui se déduit de $\Omega_m h^2$ est déplacée vers de plus basses valeurs, les grandes valeurs de H_0 étant favorisées, les barres d’erreurs sur Ω_m sont aussi dégradées. La relation de fermeture pour les espaces plats $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ enjoint à son tour que de plus grandes valeurs de la constante cosmologique sont préférées. Quant à σ_8 , l’augmentation de sa valeur moyenne résulte de l’accroissement conjoint de A_s , n_s et $\Omega_\phi h^2$.

En accord avec la contrainte (2.77), les paramètres post-Newtoniens ne révèlent pas de déviation à la relativité générale. Dans le cadre de ce modèle de gravitation particulier, les variations de la constante de Newton permises par les données WMAP5 sont deux ordres de grandeur inférieures aux contraintes dérivées de la télémétrie Terre-Lune, équation (1.33). La contrainte sur η , dominée

Paramètres primaires	Modèles	
	{1, ·}	{0, ·}
$100 \Omega_b h^2$	2.240 ± 0.066	$2.200^{+0.067}_{-0.068}$
$\Omega_c h^2$	$0.1094^{+0.0066}_{-0.0065}$	0.0633 ± 0.0040
$100 \theta_*$	1.0419 ± 0.0032	1.0667 ± 0.0034
\mathcal{T}_c	0.094 ± 0.019	0.092 ± 0.018
$\ln[10^{10} A_s]$	3.102 ± 0.050	2.935 ± 0.062
n_s	$0.998^{+0.029}_{-0.028}$	$0.948^{+0.035}_{-0.034}$
$\Omega_\varphi h^2$	$< 1.0 \times 10^{-5}$	$< 1.1 \times 10^{-5}$
Paramètres dérivés		
N_φ	< 1.9	< 1.9
H_0 (km/s/Mpc)	91^{+16}_{-15}	83^{+18}_{-17}
t_0 (Ga)	$12.33^{+0.97}_{-1.02}$	14.5 ± 1.6
Ω_φ	$< 1.1 \times 10^{-5}$	$(1.116^{+0.237}_{-0.098}) \times 10^{-5}$
Ω_Λ	$0.829^{+0.058}_{-0.056}$	$0.861^{+0.056}_{-0.059}$
Ω_m	$0.171^{+0.056}_{-0.058}$	$0.139^{+0.059}_{-0.056}$
z_{eg}	2660^{+360}_{-380}	2600^{+480}_{-470}
z_{re}	11.1 ± 1.5	9.6 ± 1.3
τ_{eg} (Mpc)	134 ± 11	169 ± 17
τ_* (Mpc)	$272.8^{+9.7}_{-10.3}$	337 ± 16
τ_0 (Gpc)	$13.75^{+0.50}_{-0.53}$	$16.64^{+0.81}_{-0.82}$
$r_s(z_*)$ (Mpc)	$140.4^{+5.0}_{-5.3}$	$173.9^{+8.2}_{-8.3}$
σ_8	$0.95^{+0.13}_{-0.12}$	$0.82^{+0.14}_{-0.13}$
$\beta_* - 1$	$< 4.7 \times 10^{-3}$	$< 6.7 \times 10^{-3}$
$1 - \gamma_*$	< 0.065	< 0.10
η_*	< 0.084	—
ω_*^{-1}	< 0.075	< 0.12
$-(\dot{G}/G)_*$ (a^{-1})	$< 1.0 \times 10^{-7}$	$< 1.3 \times 10^{-7}$
$\beta_0 - 1$	$< 1.2 \times 10^{-5}$	$< 1.8 \times 10^{-5}$
$1 - \gamma_0$	$< 1.4 \times 10^{-4}$	$< 2.2 \times 10^{-4}$
η_0	$< 1.9 \times 10^{-4}$	—
ω_0^{-1}	$< 1.4 \times 10^{-4}$	$< 2.2 \times 10^{-4}$
$-(\dot{G}/G)_0$ (a^{-1})	$< 4.3 \times 10^{-14}$	$< 6.2 \times 10^{-14}$

Tab. 2.2 – Contraintes à partir des seules données du CMB (WMAP5) pour la théorie “zéro- R ”, le jeu des paramètres cosmologiques est celui du modèle Λ CDM augmenté de la densité physique du champ scalaire $\Omega_\varphi h^2$. A gauche, le modèle est doté d’un nombre standard de neutrinos effectifs, $N_{\nu\text{eff}} = 3.04$, modèle (2.76a). A droite, modèle (2.76b), sans neutrinos : on constate qu’au niveau cosmologique la radiation scalaire sombre ne peut pas se substituer aux neutrinos.

par γ d’après (2.25) pour ce modèle, est du même ordre de grandeur que la contrainte générique (1.32). Toutefois, la contrainte Cassini (1.36b) sur γ est un ordre de grandeur plus forte que celle dérivée des données WMAP5.

Contraintes combinées

Une façon d’améliorer la contrainte CMB sur la densité du champ scalaire est de s’aider de contraintes extérieures sur les paramètres dégénérés avec $\Omega_\varphi h^2$. En raison de la dégénérescence entre ce dernier paramètre et H_0 , l’utilisation des données HST, équation (2.75), est particulièrement appropriée. L’étude combinée WMAP5 +HST est présentée table B.4. De même, l’association WMAP5 +Union réduit l’intervalle des valeurs possibles pour Ω_m , contraignant d’autant H_0 puisque les données WMAP5 sont sensibles au produit $\Omega_m h^2$. L’effet des mesures Union et HST est résumée figure 2.14. Comparée aux données WMAP5 seules, la combinaison de ces trois jeux de données permet d’améliorer d’un facteur 5 la contrainte sur $\Omega_\varphi h^2$, table 2.3. A un niveau de confiance de 2σ on a

$$\boxed{\text{WMAP5 +Union +HST : } \quad \Omega_\varphi h^2 < 4.3 \times 10^{-6} \quad (2\sigma),} \quad (2.78)$$

ou encore $N_\varphi < 0.76$, $\Omega_\varphi < 7.3 \times 10^{-6}$. Cette contrainte combinée devient comparable à celle de la nucléosynthèse primordiale, équation (2.39). Les PPN dérivés sont tous, quant à eux, aussi performants que les mesures dans le système solaire.

La distinction au niveau du CMB entre le champ scalaire et les neutrinos est maintenant adressée. Le maintien de l’amplitude de l’effet SWI primitif requiert que le rapport $(\Omega_\gamma h^2 + \Omega_\nu h^2)/\Omega_m h^2$ soit conservé. La densité $\Omega_\nu h^2$, est donc dégénérée avec la densité physique de matière $\Omega_m h^2$. La position horizontale des pics acoustiques doit cependant être maintenue, amenant une dégénérescence supplémentaire sur H_0 indépendante de Ω_m , table B.3. Les deux modèles de radiation à l’étude présentent ainsi une dégénérescence commune sur H_0 vis-à-vis de leurs densités d’énergie respectives. Pour l’un, les grandes valeurs de $\Omega_\varphi h^2$ sont permises pour autant que la densité de matière Ω_m soit réduite, la densité physique $\Omega_m h^2$ étant constante. Alors que pour l’autre, les grandes valeurs de $\Omega_\nu h^2$ sont associées aux grandes valeurs de $\Omega_m h^2$, la densité Ω_m étant figée. Les dégénérescences introduites par $\Omega_\nu h^2$ et $\Omega_\varphi h^2$ dans le plan $(\Omega_m h^2, \Omega_m)$ sont ainsi orthogonales. Par conséquent, contrairement au cas de la production primordiale des éléments légers, l’effet du champ scalaire sur le CMB ne peut pas être reproduit ou compensé par un quelconque ajustement du nombre de neutrinos. L’une de ces radiations ne peut se substituer à l’autre, table 2.2

Paramètres primaires	$\{1, \cdot\}$	$\{\cdot, \cdot\}$
$100 \Omega_b h^2$	2.257 ± 0.061	2.253 ± 0.059
$\Omega_c h^2$	0.1157 ± 0.0056	0.141 ± 0.029
$100 \theta_*$	1.0404 ± 0.0030	1.0360 ± 0.0061
\mathcal{T}_c	0.085 ± 0.016	0.085 ± 0.016
$\ln[10^{10} A_s]$	3.085 ± 0.041	$3.122^{+0.061}_{-0.060}$
n_s	0.966 ± 0.014	0.978 ± 0.020
$N_{\nu\text{eff}}$	–	4.4 ± 1.6
$\Omega_\varphi h^2$	$< 1.9 \times 10^{-6}$	$< 1.9 \times 10^{-6}$
Paramètres dérivés		
N_φ	< 0.34	< 0.33
H_0 (km/s/Mpc)	72.8 ± 2.9	$77.4^{+6.1}_{-6.2}$
t_0 (Ga)	$13.46^{+0.23}_{-0.24}$	$12.61^{+1.03}_{-1.0}$
Ω_φ	$< 3.6 \times 10^{-6}$	$< 3.1 \times 10^{-6}$
Ω_Λ	0.738 ± 0.026	0.729 ± 0.028
Ω_m	0.262 ± 0.026	0.271 ± 0.028
z_{eg}	3190 ± 140	3190 ± 130
z_{re}	10.4 ± 1.4	10.9 ± 1.6
τ_{eg} (Mpc)	118.5 ± 4.7	$110.4^{+10.5}_{-10}$
τ_* (Mpc)	279.8 ± 4.0	260^{+24}_{-23}
τ_0 (Gpc)	14.13 ± 0.22	13.2 ± 1.1
$r_s(z_*)$ (Mpc)	144.1 ± 2.1	134 ± 12
σ_8	0.854 ± 0.046	0.903 ± 0.073
$\beta_* - 1$	$< 1.1 \times 10^{-3}$	$< 9.0 \times 10^{-4}$
$1 - \gamma_*$	< 0.013	< 0.011
η_*	< 0.017	–
ω_*^{-1}	< 0.013	< 0.011
$-(\dot{G}/G)_*$ (a^{-1})	$< 2.1 \times 10^{-8}$	$< 1.9 \times 10^{-8}$
$\beta_0 - 1$	$< 2.3 \times 10^{-6}$	$< 2.0 \times 10^{-6}$
$1 - \gamma_0$	$< 2.8 \times 10^{-5}$	$< 2.4 \times 10^{-5}$
η_0	$< 5.5 \times 10^{-5}$	–
ω_0^{-1}	$< 2.8 \times 10^{-5}$	$< 2.4 \times 10^{-5}$
$-(\dot{G}/G)_0$ (a^{-1})	$< 6.0 \times 10^{-15}$	$< 5.3 \times 10^{-15}$
$\Omega_\nu h^2$	–	$(2.50^{+0.89}_{-0.90}) \times 10^{-5}$

Tab. 2.3 – Contraintes combinées WMAP5 + Union + HST pour les modèles $\{1, \cdot\}$ et $\{\cdot, \cdot\}$. Grâce aux données supplémentaires, la radiation scalaire sombre ($\Omega_\varphi h^2$) et les neutrinos ($N_{\nu\text{eff}}$) sont contraints simultanément.

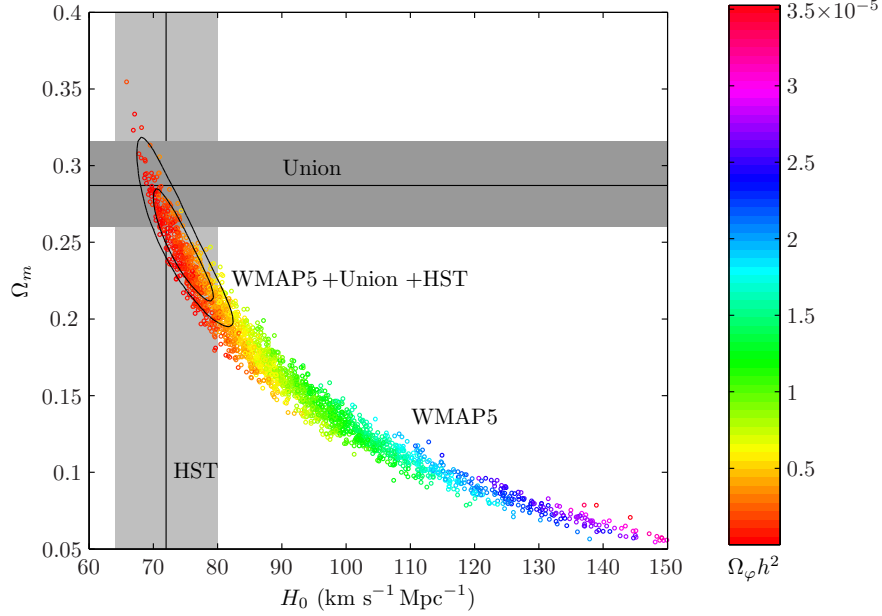


Fig. 2.14 – Modèle $\{1, \cdot\}$. Dégénérescence des données WMAP5 pour les paramètres Ω_m , H_0 et $\Omega_\phi h^2$ (points). Les régions en gris représentent les limites à 1σ issues séparément des données HST et Union, les lignes verticale et horizontale donnent les valeurs centrales respectives. Les contraintes (contours) à 1σ et 2σ sont obtenues en combinant les trois jeux de données WMAP5, Union et HST.

colonne $\{0, \cdot\}$. Les données CMB contraignent ainsi simultanément les deux types de radiations, modèle $\{\cdot, \cdot\}$, sans affecter les contraintes individuelles, modèles $\{\cdot, 0\}$ et $\{1, \cdot\}$, sur les densités physiques des radiations. A nouveau, les contraintes extérieures limitent les dégénérescences : les mesures de Ω_m profitent à $\Omega_\phi h^2$ alors que la barre d’erreur sur $\Omega_\nu h^2$ est réduite par les données HST, table 2.3 colonne $\{\cdot, \cdot\}$.

2.4.3 Contraintes futures : Planck

L’existence et l’amplitude des dégénérescences entre $\Omega_\phi h^2$ et les paramètres cosmologiques standards dépendent des caractéristiques des données CMB. Les futures données du satellite Planck bénéficiant d’une sensibilité accrue en température et d’une meilleure résolution angulaire peuvent à elles seules briser ces dégénérescences. Nous avons simulé un jeu de données fictives à partir du

modèle Λ CDM de référence $\{1, 0\}$. Ce jeu de données est une réalisation d'un spectre fictif intégrant à la fois la variance cosmique et les erreurs d'origine instrumentale. Les caractéristiques instrumentales choisies résument les spécifications de Planck reprises dans [105] correspondant à deux relevés complets du ciel (14 mois de fonctionnement)³ : la résolution angulaire θ_{FWHM} est fixée à 7.0 arcmin et la sensibilité relative en température à $2.5 \mu\text{K}/K$. La sensibilité aux fluctuations du signal polarisé est quant à elle deux fois plus faible que pour le signal non-polarisé. La fraction exploitable de la surface du ciel s'élève à 0.65.

Bien que les données fictives aient été calculées sans effet de lentille gravitationnelle et sans signal SZ, l'analyse MCMC inclut dans les spectres théoriques une contribution SZ, d'amplitude à nouveau paramétrée par A_{SZ} . Les contraintes potentielles sont présentées table B.5. Les contraintes à 2σ sont $\Omega_\varphi h^2 < 1.7 \times 10^{-6}$ ou encore $N_\varphi < 0.30$. Les contraintes Planck, à elles seules, seront donc plus performantes que les contraintes combinées WMAP5 +HST +Union, équation (2.78), et identiques à celles de la nucléosynthèse, équation (2.39).

La comparaison des valeurs moyennes des paramètres obtenues pour le Λ CDM et son extension à $\Omega_\varphi h^2$ met en exergue les dégénérescences. L'indice spectral et le taux d'expansion actuel restent fort dégénérés à $\Omega_\varphi h^2$, la densité physique de matière sombre demeurant, quant à elle, insensible au champ scalaire. La dégénérescence de H_0 se reportant dès lors sur Ω_m , les contraintes CMB pourront à nouveau s'aider efficacement de mesures de distances relatives dans l'ère dominée par la matière ou par la constante cosmologique.

2.5 Perspectives

On peut penser aux améliorations suivantes quant aux contraintes sur la densité du champ scalaire. Le but est d'identifier des observables explicitement sensibles à Ω_φ ou aux paramètres avec lesquels Ω_φ est déjà dégénéré dans les observables existantes. Au niveau des perturbations de matière, la présence

³Au cours de la première année d'opération du satellite, la durée prévue de fonctionnement a été doublée pour un total de quatre recensements complets du ciel. Au moment d'écrire ces lignes, l'instrument HFI a complété un cinquième et dernier recensement début 2012. Les contraintes prévisionnelles calculées ici ne tiennent pas compte de ces extensions, les contraintes sont donc à considérer comme des mesures conservatives des performances de Planck. Pour autant que les erreurs systématiques restent sous-dominantes aux erreurs statistiques, que la qualité des mesures perdure tout au long de la durée des observations et que de nouvelles dégénérescences n'apparaissent pas, nous estimons que les contraintes, Table B.5, peuvent être améliorées d'environ un facteur $\sqrt{2/5} \simeq 0.63$.

du champ scalaire et la dégénérescence entre sa densité et celle de la matière tendent toutes deux à augmenter l’amplitude σ_8 des fluctuations de la matière aux petites échelles. L’étude de la formation des grandes structures de matière se présente donc comme un outil de contraintes directes de la densité d’énergie du champ scalaire à la fois complémentaire et indépendant aux anisotropies du CMB. Par ailleurs, comme pour les anisotropies du CMB, les oscillations acoustiques des baryons (BAO) tracent à la fois l’origine gravitationnelle et le caractère radiatif, respectivement, du champ scalaire au travers de la hauteur et de la position horizontale des pics du spectre de ces oscillations. Remarquons aussi les mesures des valeurs récentes et instantanées de $H(z)$ [106, 107] jusqu’en $z \sim 2$. Elles contraignent le taux d’expansion actuel ainsi que les paramètres de la matière et de l’énergie sombre au niveau homogène et, bien qu’insensibles à Ω_φ , améliorent les contraintes sur le champ scalaire en brisant les dégénérescences.

Comme évoqué plus tôt à la section 2.2.4, l’ajout d’un couplage entre le champ scalaire et le plasma permet de partager l’entropie entre ces deux secteurs. Il serait intéressant d’identifier et de détailler d’autres mécanismes, notamment gravitationnels, qui dotent le champ scalaire d’une densité d’énergie non-négligeable. En particulier, des phénomènes violents tels que le reheating [108] et des transitions de phase dans le secteur de la matière pourraient alimenter le secteur gravitationnel scalaire par l’intermédiaire de la métrique.

Dans l’étude des perturbations, la constante d’intégration μ a été mise à zéro. Lorsque l’on considère ce mode d’énergie nulle ($\mu \neq 0$), le couplage gravitationnel G , équation (2.6), devient arbitrairement intense lorsque le champ scalaire approche la valeur $|\varphi| = \sqrt{\frac{\kappa}{6}}$

$$G \xrightarrow{\varphi^2 \rightarrow (\kappa/6)^\pm} \mp\infty. \quad (2.79)$$

A très haut redshift, le terme en μ régit la dynamique du champ scalaire, solution (2.21), et le couplage gravitationnel est négatif. Dans le cas limite $a \rightarrow 0$, les valeurs des paramètres post-newtoniens rejoignent celles de la théorie de Nördstrom, équation (1.37a),⁴

$$\begin{aligned} &\text{Limite : } a \rightarrow 0, z \rightarrow +\infty \text{ ou encore } \varphi \rightarrow \pm\infty \text{ (} \mu \neq 0 \text{)} \\ &G = -\frac{GN}{3} \quad \gamma = -1 \quad \beta - 1 = -\frac{1}{2} \quad \delta = \frac{2}{3} \\ &\omega = -\frac{3}{2} \quad \Phi^{\text{BD}} \rightarrow -\infty \quad 2\eta - \eta' = 0 \quad \eta + \eta' = 0. \end{aligned}$$

⁴Pour autant que le développement d’Eddington-Robertson fasse sens quand la courbure devient infinie.

Par la suite, au cours de l'expansion, la valeur de G devient de plus en plus négative à l'approche de la valeur critique $|\varphi| = \sqrt{\frac{\kappa}{6}}$,

$$\begin{aligned} \text{Limite : } \varphi^2 &\rightarrow \left(\frac{\kappa}{6}\right)^\pm \\ G \rightarrow \mp\infty \quad \gamma &= \frac{1}{2} \quad \beta - 1 = 0 \quad \delta = \frac{1}{12} \\ \omega = 0 \quad \Phi^{\text{BD}} &= 0 \quad 2\eta - \eta' = \frac{3}{2} \quad \eta + \eta' = 0. \end{aligned}$$

Parallèlement, la pression anisotrope du fluide φ se développe, équation (2.49), jusqu'à briser l'analyse à l'ordre linéaire de ce chapitre. C'est donc au travers de contre-réactions que le terme en μ influe la dynamique homogène. La question est de déterminer le moment auquel les phénomènes non-perturbatifs ne sont plus négligeables et ce en absence ou en présence de champs de matière. Il serait aussi intéressant de savoir si, en démarrant d'une valeur supérieure à la valeur critique, la dynamique conduit inévitablement le champ vers la valeur critique, dans ce cadre non-perturbatif. En effet, à l'approche de la valeur critique, non seulement le dénominateur $1 - \kappa\varphi^2/6$ se développe, équation (2.49), mais aussi le dénominateur au travers des potentiels gravitationnels sourcés par les perturbations du champ scalaire. Dans le cadre de cosmologies homogènes mais anisotropes, le comportement singulier a déjà été étudié [109, 110] lorsque le coefficient du scalaire de courbure s'annule. L'étude de la dynamique des perturbations à l'ordre linéaire a ici mis en évidence un comportement a priori singulier pour la théorie "zéro- R ", $\xi = \frac{1}{6}$ pour la paramétrisation $f(\varphi) = 1 - \xi\kappa\varphi^2$. La question est de savoir si ces conclusions restent valides pour des univers largement inhomogènes.

Renverser le signe de la constante de Newton, c'est en fait changer le signe des masses gravitationnelles actives exclusivement (ou passives exclusivement). Un raisonnement analogue à [111] peut-il être mené au regard de l'accélération entre masses de signes différents.

Dans l'hypothèse où la théorie "zéro- R " est valide en deçà d'un redshift z_{eff} , lorsque la valeur du champ est inférieure à la masse de Planck, existe-t-il des mécanismes qui exciteraient le mode en μ , comme envisagé pour le mode en Ω_φ ? Les valeurs du champ ainsi générées sont-elles en dessous de la valeur critique ($z_{\text{eff}} \ll \mu^{-1}$)?

La théorie "zéro- R " est un cas particulier de la paramétrisation $f(\varphi) = 1 - \xi\kappa\varphi^2$ du couplage non-minimal, équation (2.11). La théorie "zéro- R " violant minimalement le principe d'équivalence fort ($\eta + \eta' = 0$), on pourrait identifier la manière dont ces théories incorporent "zéro- R " et en quoi elle se distinguent de "zéro- R " à différents niveaux (paramètres post-newtoniens, relaxation, évolution cosmologique tant homogène que perturbée), et partant comment classer ces théories en fonction de leur déviation par rapport à la théorie "zéro- R ".

Enfin, on pourrait identifier la ou les théories, autres que les limites d’Einstein et de Nördstrom, pour lesquelles la condition (2.4a) est vérifiée, soit $2\eta - \eta' = 0$ ($W^\mu{}_{\nu\rho\sigma|\mu} = 0$). Elle n’est pas satisfaite pour les théories tenseur-scalaire de Brans-Dicke, équation (2.7a) ($|\gamma| \neq 1$). Et partant de ces deux modes normaux de déviation à la relativité générale, construire, classer et analyser d’autres théories de gravitation.

2.6 En résumé

L’influence d’une théorie étendue de Brans-Dicke sur les observables cosmologiques a été mise à l’étude. L’empreinte cosmologique de cette théorie particulière de gravitation s’exprime en termes d’un fluide sombre dont la pression anisotrope atypique révèle la violation du principe d’équivalence fort. Cependant, les symétries de l’espace-temps d’un univers satisfaisant le principe cosmologique exact imposent que ce fluide se comporte comme un fluide parfait, sans pression anisotrope, supprimant toute violation du principe d’équivalence fort. La nucléosynthèse primordiale fournit la meilleure contrainte sur la densité du champ scalaire dans le modèle le plus simple (Λ CDM + Ω_φ), équation (2.39). Cependant, de par la nature du couplage conforme du champ scalaire à la métrique, les contraintes de la nucléosynthèse primordiale pour Ω_φ sont totalement dégénérées à celles obtenues pour tout autre type de radiation stérile.

Lorsque le principe cosmologique est d’application dans son sens statistique, ce fluide effectif de radiation induit une violation du principe d’équivalence fort au travers d’une pression anisotrope qui se distingue de celles des autres fluides de radiation minimalement couplés à la métrique. L’étude des perturbations démontre qu’aux grandes échelles profondément dans l’ère de radiation le fluide effectif imite les autres fluides de radiation, pour des conditions initiales adiabatiques. De telle sorte qu’il passe inaperçu et ce indépendamment de sa contribution à la densité d’énergie totale de l’Univers. A petite échelle dans l’ère de matière, la célérité anisotrope du champ scalaire compense la célérité adiabatique. En termes de fluctuations relatives de densité d’énergie, le champ scalaire et la matière chutent alors avec la même accélération dans les puits de potentiels gravitationnels. Dans un cas intermédiaire, à proximité de la transition radiation-matière et pour des échelles acoustiques, l’effet du champ scalaire, comparé aux autres types de radiation, est de maintenir plus longtemps les potentiels gravitationnels à leur valeurs initiales. L’amplitude de l’effet Sachs-Wolfe intégré primitif s’en trouve diminuée et la croissance des perturbations de matière est quant à elle amplifiée.

A l'aide des mesures des anisotropies du CMB relevées par le satellite WMAP, nous avons placé des contraintes directes sur la densité d'énergie du champ scalaire, relation (2.77). En raison des nouvelles dégénérescences introduites entre les paramètres, ces contraintes sont améliorées d'un facteur 5 par des mesures de H_0 (HST) et de Ω_m (Union) indépendantes, relation (2.78).

Contrairement à la nucléosynthèse primordiale, les empreintes distinctes laissées dans le CMB par le champ scalaire φ et une radiation minimalement couplée à la métrique permettent de contraindre simultanément ces deux possibilités. Ces deux radiations ne pèsent respectivement pas plus de 5% et de 22% (1σ) du contenu radiatif standard de l'Univers, Table 2.3.

Chapitre 3

Modèles réalistes de quintessence et grandes structures de matière

Invoquer la constante cosmologique pour rendre compte de l'accélération tardive de l'expansion de l'Univers introduit deux problèmes. Le premier est celui de l'*ajustement fin* de la valeur de la constante cosmologique : pourquoi la valeur déduite des observations est-elle non-nulle et si petite comparée aux autres échelles d'énergie rencontrées en physique ? Le second problème, celui de la *coïncidence*, soulève la question quant à la proximité des valeurs des densités d'énergie de la constante cosmologique et de la matière. Malgré la nature différente des contributions à ces densités d'énergie et bien que la première de ces densités est constante et la seconde évolue, pourquoi mesure-t-on qu'aujourd'hui $\Omega_\Lambda \simeq \Omega_m$?

Les problèmes de l'ajustement fin et de la coïncidence proviennent de l'absence d'évolution de la densité d'énergie de la constante cosmologique. Les modèles de quintessence proposent d'éviter ces deux problèmes grâce à un mécanisme dynamique.

Cependant, remplacer la constante cosmologique par un champ dynamique modifie non-seulement l'expansion de l'Univers mais altère aussi l'évolution tardive des potentiels gravitationnels dans lesquels les grandes structures de matière naissent et évoluent.

Dans ce chapitre, après avoir calibré deux modèles de quintessence avec les observations du CMB et des supernovae, nous caractériserons les empreintes laissées par ces modèles réalistes dans les structures de matière, en particulier dans le spectre de puissance non-linéaire de la matière sombre [4]. Nous chercherons aussi à savoir si les processus non-linéaires de structuration de la matière encodent la nature de l'énergie sombre.

3.1 Introduction

La quintessence consiste en un fluide minimalement couplé à la métrique. Au niveau homogène, l'évolution de sa pression p_Q , vis-à-vis de la densité d'énergie ρ_Q , détermine la puissance du mécanisme à résoudre ces deux problèmes. Tout en restant une composante sous-dominante la quintessence doit suivre, tracer, l'évolution de la composante dominante. Par conséquent, dans l'ère de radiation, la quintessence doit avoir une équation d'état $w_Q \equiv \frac{p_Q}{\rho_Q}$ proche de la valeur $\frac{1}{3}$. Dans l'ère de matière, son équation d'état doit être négative, inférieure donc à celle de la matière, pour lui permettre à terme de dominer. Ensuite, les valeurs récentes de w_Q doivent être suffisamment négatives pour provoquer une accélération de l'expansion.

Le problème de l'ajustement fin est ainsi résolu puisque dans l'univers primitif, contrairement au cas de la constante cosmologique, les densités de la quintessence et des radiations sont proches. Un tel rapprochement entre ces densités trouverait naturellement son origine dans un scénario d'équipartition de l'énergie à la sortie de l'inflation. La densité d'énergie de la quintessence évoluant au cours de l'expansion, la valeur à laquelle cette densité s'évalue aujourd'hui n'est pas à confronter à une échelle d'énergie fondamentale.

Quant à la résolution du problème de la coïncidence, il est nécessaire d'ajouter un ingrédient au scénario expliqué ci-dessus : l'insensibilité de l'évolution récente de la densité d'énergie et de la pression de la quintessence par rapport à leurs valeurs initiales. Le moment à partir duquel la quintessence domine ou que l'Univers entame une phase d'expansion accélérée ne dépend que de la dynamique de la densité d'énergie et de la pression de la quintessence et non de leurs valeurs initiales.

D'une manière effective, un champ scalaire en interaction avec lui-même permet d'implémenter un tel scénario. La nécessité d'une phase tardive d'expansion accélérée dominée par ce champ scalaire guide le choix du potentiel d'auto-interaction. De ce choix dépend aussi l'existence d'une solution de type attracteur qui amène la quintessence à dominer indépendamment des conditions initiales.

Il s'agit donc de remplacer la constante cosmologique Λ par un champ scalaire réel ϕ ne subissant que l'influence de la gravité

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right] + S_\psi[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (3.1)$$

où $V(\phi)$ est le potentiel d'interaction. Action dont on dérive l'équation du mouvement du champ scalaire

$$\square\phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (3.2)$$

Le champ scalaire influence la dynamique de la métrique à la manière d'un fluide de densité d'énergie $\rho_Q = T + V$ et de pression $p_Q = T - V$, avec T l'énergie cinétique du champ scalaire. L'équation d'état du fluide de quintessence $w_Q \equiv \frac{p_Q}{\rho_Q}$ est dès lors bornée : $-1 \leq w_Q \leq 1$.

Dans un univers de Friedmann-Lemaître, au niveau homogène, l'équation du mouvement (3.2) devient

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2 \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.3)$$

Quant à l'équation d'état du fluide de quintessence, elle se réduit à

$$w_Q = \frac{\phi'^2 - a^2 V(\phi)}{\phi'^2 + a^2 V(\phi)}. \quad (3.4)$$

L'équation d'état de la quintessence devient négative si $\phi'^2 < V(\phi)$. Dans un régime d'évolution lente du champ, $\phi'^2 \ll V(\phi)$, l'expansion peut entrer en accélération pour autant que l'équation d'état satisfasse aujourd'hui $w_Q < -\frac{1}{3\Omega_Q}$ dans un univers plat, Ω_Q est la densité d'énergie actuelle de la quintessence mesurée relativement à la densité critique.

Le potentiel $V(\phi)$ doit donc présenter un partie plate pour permettre à la quintessence de dominer l'expansion cosmologique ($w_Q < 0$) et de provoquer une accélération de l'expansion ($w_Q < -\frac{1}{3\Omega_Q}$).

Avant cela la pente du potentiel doit être suffisante pour que la quintessence puisse tracer l'évolution de la radiation ou de la matière.

Le potentiel de Ratra-Peebles, en loi de puissance inverse, offre une telle possibilité [112, 113, 114]

$$V_{\text{RP}}(\phi) = \frac{\lambda^{4+\alpha}}{\phi^\alpha}, \quad \alpha \geq 0. \quad (3.5)$$

Le paramètre α caractérise la pente du potentiel et λ sera appelé l'échelle d'énergie du potentiel, sans pour autant donner une interprétation microscopique au

modèle de quintessence. A ces deux paramètres s'ajoutent les conditions initiales sur les deux degrés de liberté ϕ et ϕ' .

Cependant, pour ce potentiel, il existe une solution de type attracteur pour une large gamme de conditions initiales [114]. Le modèle cosmologique est alors indépendant des conditions initiales pour autant que le champ scalaire rejoigne la solution de type attracteur suffisamment tôt, avant que l'expansion ne soit dominée par la quintessence. Par ailleurs, pour cette solution, la densité d'énergie de la quintessence suit l'évolution de la densité des champs de matière avec une équation d'état inférieure. La densité de quintessence décroît ainsi moins rapidement que celle des autres champs de matière.

Dans l'hypothèse du roulement lent, $\phi'' \simeq 0$, une solution pour ϕ peut être approchée en fonction des paramètres α , Ω_Q et w_Q et s'évalue aujourd'hui à

$$\phi_0 \simeq \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{3\Omega_Q}{\kappa}} \frac{1 - w_{Q_0}}{\sqrt{1 + w_{Q_0}}}. \quad (3.6)$$

Demander que la quintessence domine aujourd'hui, $\Omega_Q \sim 1$, conduit ainsi la valeur du champ à la masse de Planck, $\phi_0 \sim \kappa^{-\frac{1}{2}}$.

Avec une telle solution, équation (3.6), on extrait une relation entre l'échelle du potentiel et la densité d'énergie actuelle de la quintessence

$$\lambda^{4+\alpha} \simeq \frac{\alpha^\alpha H_0^2}{2^{1+\alpha}} \frac{(1 - w_{Q_0})^{1+\alpha}}{(1 + w_{Q_0})^{\alpha/2}} \left(\frac{3\Omega_Q}{\kappa} \right)^{(2+\alpha)/2}. \quad (3.7)$$

Notons que ces deux expressions sont implicites puisque w_{Q_0} dépend de la valeur du champ et de sa vitesse aujourd'hui et donc de α et λ .

Pour les modèles avec une valeur élevée de α , demander que la quintessence domine revient à choisir une valeur élevée de l'échelle d'énergie λ comparativement à l'échelle d'énergie $(\Lambda/\kappa)^{1/4}$ associée à la constante cosmologique

$$\lambda \kappa^{\frac{1}{2}} \sim 10^{-122/(4+\alpha)}. \quad (3.8)$$

A l'opposé, pour les modèles avec une petite valeur de α , le champ est rapidement amorti par l'expansion cosmique, terme en $\mathcal{H}\phi'$, équation (3.3). Dès lors, très tôt au cours de l'expansion cosmique, le champ se trouve dans une situation de roulement lent. Par conséquent, la densité d'énergie de la quintessence évolue peu, nécessitant d'ajuster initialement le potentiel à une valeur proche de la valeur finale. Le cas limite $\alpha = 0$ correspond au modèle Λ CDM. Les caractères traceur et attracteur du modèle sont perdus dans ce cas. De manière

Paramètres dérivés			Potentiel de Ratra-Peebles				
α	λ (TeV)	t_0 (Ga)	$100 \theta_*$	z_d	z_a	q_0	$w_Q^{(0)}$
0	2.4×10^{-15}	13.68	1.0411	0.43	0.80	0.62	-1
$\frac{1}{2}$	4.9×10^{-12}	13.26	1.0613	0.52	0.78	0.47	-0.87
1	2.4×10^{-9}	12.94	1.0796	0.61	0.72	0.36	-0.77
2	2.8×10^{-5}	12.45	1.1118	0.79	0.56	0.22	-0.65
4	4.0	11.82	1.1646	1.16	0.20	0.063	-0.50
8	7.0×10^5	11.14	1.2383	2.03	-0.048	-0.093	-0.36

Tab. 3.1 – Modèles cosmologiques d’après le potentiel de Ratra-Peebles, équation (3.5). Les paramètres cosmologiques primaires sont ceux du modèle de référence, Table B.1, pour lequel Ω_Λ est remplacé par Ω_Q , soit $\Omega_Q = 0.744$. Notons que dans ce chapitre H_0 est considéré comme paramètre primaire et que θ_* en est dérivé.

générale la densité actuelle Ω_Q dépend de la hauteur du potentiel, mais dans le cas $\alpha = 0$ l’ajustement est renforcé : la relation entre λ et Ω_Q est linéaire.

Numériquement, pour un modèle cosmologique donné (H_0 , α , Ω_Q fixés), les équations de Friedmann-Lemaître et l’équation (3.3) sont résolues pour $a(\tau)$ et $\phi(\tau)$ de la manière suivante [115]. On se donne donc une densité d’énergie de quintessence Ω_Q aujourd’hui. Une première valeur de l’échelle d’énergie λ est approchée grâce à l’équation (3.7), avec une équation d’état w_{Q_0} test inférieure à -1 . Le potentiel est donc entièrement déterminé, une première solution est obtenue. On en déduit la densité d’énergie actuelle de la quintessence que l’on compare à la valeur désirée. Par la méthode de Newton-Raphson, la valeur de λ est ajustée de manière à dériver la valeur désirée de Ω_Q .

Au sein même des itérations de cette méthode, les équations sont intégrées avec la routine STIFF [116]. L’existence d’une solution de type attracteur nous affranchit d’optimiser les conditions initiales sur le champ ϕ . Toutefois on s’assurera que la solution de type attracteur est retrouvée avant que la quintessence ne contrôle l’expansion cosmique. Une des deux équations de Friedmann-Lemaître est redondante, ainsi, tout au long de l’intégration, une relation de consistance est établie entre les solutions de $a(\tau)$ et $\phi(\tau)$ et nous permet de surveiller la validité des solutions obtenues.

La table 3.1 montre le résultat de l’intégration pour différentes valeurs de α , les paramètres cosmologiques sont ceux du modèle de référence Table B.1, soit $h = 0.72$ et $\Omega_Q = 0.744$ pour chacun des modèles. Comme mentionné plus haut, le cas $\alpha = 0$ correspond au modèle Λ CDM. Pour de plus grandes valeurs de α ,

à densité d'énergie actuelle Ω_Q égale, la composante cinétique de la pression de la quintessence est accrue, diminuant d'autant la faculté accélératrice de la quintessence. L'expansion cosmique est moindre, diminuant l'âge de l'Univers t_0 et augmentant l'angle θ_* sous-tendu par l'horizon acoustique au moment de la recombinaison. Le moment z_d à partir duquel la quintessence domine se produit plus tôt puisqu'il est demandé que Ω_Q soit identique pour chacun des modèles et que l'équation d'état soit moins négative. Le pouvoir accélérant étant moindre, le moment z_a à partir duquel l'Univers entre en expansion accélérée est retardé. Pour les très hautes valeurs de α , l'Univers n'a pas encore entamé la phase d'expansion accélérée, le facteur d'accélération q_0 est alors négatif pour ces modèles, le paramètre d'état ne satisfaisant pas la condition $w_{Q0} < -\frac{1}{3\Omega_Q}$.

Dans ce chapitre, une deuxième famille de potentiels est mise à l'étude. Pour ces modèles, lorsque le champ approche la valeur de la masse de Planck, $\phi \sim \kappa^{-\frac{1}{2}}$, une correction est apportée au potentiel de Ratra-Peebles, il s'agit du modèle SUGRA [117, 118]

$$V_{\text{SG}}(\phi) = \frac{\lambda^{4+\alpha}}{\phi^\alpha} e^{\kappa\phi^2/2}, \quad \alpha \geq 0. \quad (3.9)$$

A haut redshift, loin de l'effet de la correction, le comportement du champ scalaire est identique au cas du potentiel de Ratra-Peebles. La solution de type attracteur, dont l'existence n'est donc pas remise en cause, permet au champ d'approcher la partie corrigée du potentiel avec la même vitesse quelles que soient les conditions initiales. Par conséquent, les caractères attracteur et traceur sont conservés dans la partie corrigée. L'effet de cette correction est de ralentir l'avancement du champ dans le potentiel. Comparée au cas du potentiel de Ratra-Peebles, la composante cinétique de la pression est alors réduite, renforçant d'autant le pouvoir accélérant de la quintessence.

En comparant les Tables 3.1 et 3.2, on remarque qu'un modèle SUGRA avec $\alpha = 8$ a la même faculté d'accélération instantanée aujourd'hui qu'un modèle Ratra-Peebles avec $\alpha = 0.5$: w_{Q0} identiques et donc facteurs d'accélération q_0 identiques. Cependant, les autres paramètres tels que z_d et z_a diffèrent, signe d'une évolution différente de l'équation d'état.

3.2 Modèles réalistes de quintessence

L'objectif est d'améliorer les contraintes sur ces modèles d'énergie sombre et de rechercher des observables sensibles à la nature de l'énergie sombre. Dans les limites imposées par les observations actuelles des supernovae de type Ia et du

Paramètres dérivés				Potentiel SUGRA			
α	λ (TeV)	t_0 (Ga)	$100 \theta_*$	z_d	z_a	q_0	$w_Q^{(0)}$
0	2.4×10^{-15}	13.68	1.0411	0.43	0.80	0.62	-1
$\frac{1}{2}$	4.6×10^{-12}	13.46	1.0524	0.47	0.76	0.57	-0.96
1	2.1×10^{-9}	13.32	1.0606	0.49	0.73	0.55	-0.94
2	2.2×10^{-5}	13.16	1.0718	0.52	0.68	0.52	-0.91
4	2.6	12.99	1.0847	0.55	0.64	0.49	-0.89
8	3.4×10^5	12.85	1.0965	0.59	0.60	0.47	-0.87

Tab. 3.2 – Modèles cosmologiques d’après le potentiel SUGRA, équation (3.9). Les paramètres primaires sont identiques à ceux de la Table 3.1.

CMB, quelles sont les déviations prédites par ces modèles de quintessence, par rapport au modèle Λ CDM, pour les structures cosmiques de la matière et leur évolution non-linéaire? La complexité de l’évaluation de l’évolution des structures cosmiques de la matière empêche de sonder systématiquement l’ensemble de l’espace des paramètres. Pour répondre à cette question, il est donc nécessaire de sélectionner des modèles de référence, réalistes d’après les observations aux niveaux homogène et linéaire. Ce sera l’objet de cette section. La section suivante exploitera ces modèles de référence pour préparer la simulation de ces structures de matière.

3.2.1 Perturbations du champ

Jusqu’ici nous avons étudié la dynamique temporelle de l’énergie sombre par un traitement au niveau homogène. Par covariance, le champ de quintessence, en présence des perturbations des autres composantes de l’Univers, développera lui aussi d’autres perturbations. Afin de calculer correctement à la fois le spectre du CMB et le spectre de puissance de la matière, il est nécessaire d’ajouter les équations d’évolution des perturbations de quintessence aux équations de conservation des autres composantes [119, 120, 121, 122].

L’équation de Klein-Gordon (3.2) pour les perturbations du champ de quintessence s’écrit, dans la jauge de Newton,

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' + \left(k^2 + a^2 \frac{d^2V}{d\phi^2}\right) \delta\phi = \phi'(3\Psi' + \Phi') - 2a^2 \frac{dV}{d\phi} \Phi. \quad (3.10)$$

A partir de conditions initiales nulles pour les perturbations du champ, les potentiels gravitationnels, par le biais des termes inhomogènes (membre de droite de l'équation (3.10)), les fluctuations de quintessence peuvent croître.

Les perturbations du champ influencent l'évolution des potentiels gravitationnels, équations (A.34), à la manière d'un fluide effectif sombre en auto-interaction. Il est donc plus commode de réécrire l'équation du mouvement du champ perturbé en fonction des variables de ce fluide effectif. Comme au chapitre précédent, comparons l'expression du tenseur énergie-impulsion fondamental au tenseur-énergie d'un fluide générique. La perturbation relative de la densité d'énergie de la quintessence δ_Q et la vitesse du fluide effectif de quintessence v_Q s'écrivent

$$a^2 \rho_Q \delta_Q = \phi' \delta \phi' + a^2 \frac{dV}{d\phi} \delta \phi - \phi'^2 \Phi, \quad (3.11a)$$

$$v_Q = -\frac{\delta \phi}{\phi'}. \quad (3.11b)$$

La quintessence est une espèce supplémentaire à intégrer dans la somme sur les composantes de l'Univers des équations d'Einstein (A.34).

Caractérisons déjà ce fluide : il est doté d'une célérité acoustique adiabatique $c_{AQ}^2 \equiv p'_Q / \rho'_Q$ non constante et les perturbations de pression transportent une composante intrinsèque de perturbation d'entropie,

$$c_{AQ}^2 = 1 + \frac{2}{3} \frac{a^2}{\phi' \mathcal{H}} \frac{dV}{d\phi}, \quad (3.12a)$$

$$\Gamma_Q = \frac{1 - c_{AQ}^2}{w_Q} [\delta_Q - 3\mathcal{H}(1 + w_Q)v_Q], \quad (3.12b)$$

où $\Gamma_Q \equiv \frac{\delta p_Q}{p_Q} - \frac{c_{AQ}^2}{w_Q} \delta_Q$ est la perturbation relative d'entropie intrinsèque, différence entre la perturbation de pression totale et la perturbation adiabatique de pression.

Rappelons que la célérité adiabatique est une quantité d'ordre zéro en terme de quantités perturbées mais que contrairement à la célérité acoustique totale, $c_{sQ}^2 \equiv \delta p_Q / \delta \rho_Q$, elle est bien homogène. La célérité adiabatique diffère du paramètre d'état w_Q , ce qui est en conformité avec les variations temporelles de w_Q .

Le champ scalaire de quintessence étant minimalement couplé à la métrique, le fluide de quintessence associé ne développe pas de pression anisotrope.

Reprenons les équations générales de conservation d'un fluide d'équation d'état non constante avec des perturbations d'entropie

$$\delta'_Q = -3\mathcal{H}(c_{AQ}^2 - w_Q)\delta_Q - (1 + w_Q)(-k^2 v_Q - 3\Psi') - 3\mathcal{H}w_Q\Gamma_Q, \quad (3.13a)$$

$$v'_Q = -\frac{c_{AQ}^2}{1 + w_Q}\delta_Q - \mathcal{H}(1 - 3c_{AQ}^2)v_Q - \Phi - \frac{w_Q}{1 + w_Q}\Gamma_Q. \quad (3.13b)$$

En explicitant les expressions de la célérité acoustique et des perturbations d'entropie, équation (3.12), ces équations se simplifient en

$$\delta'_Q = -3\mathcal{H}(1 - w_Q)\delta_Q + (1 + w_Q)\left\{\left[9\mathcal{H}^2(1 - c_{AQ}^2) + k^2\right]v_Q + 3\Psi'\right\}, \quad (3.14a)$$

$$v'_Q = -\frac{\delta_Q}{1 + w_Q} + 2\mathcal{H}v_Q - \Phi. \quad (3.14b)$$

Fortuitement, l'équation d'Euler se ramène à celle d'un fluide parfait –sans perturbations d'entropie– dont la célérité serait égale à l'unité. Il n'y a pas de telle simplification pour l'équation de continuité, en raison du terme en $9\mathcal{H}^2(1 - c_{AQ}^2)v_Q$. Les perturbations du fluide associé à un champ scalaire en auto-interaction ne se propagent donc pas à la vitesse de la lumière.

Lorsque le paramètre d'état se rapproche de -1, le terme en δ_Q de l'équation d'Euler devient numériquement instable. Afin de faciliter l'intégration numérique de ces équations, la vitesse v_Q est alors avantageusement remplacée par la quantité

$$Q_Q \equiv (1 + w_Q)v_Q. \quad (3.15)$$

La singularité non physique, en $w_Q = -1$, disparaît ainsi de l'équation d'Euler (3.14b)

$$Q'_Q = -\delta_Q + \mathcal{H}\left[2 + 3(w_Q - c_{AQ}^2)\right]Q_Q - (1 + w_Q)\Phi. \quad (3.16)$$

La variation de l'équation de Klein-Gordon (3.3) correspond à la partie homogène en $\delta\phi$ de l'équation de conservation des perturbations (3.10) dans l'approximation des grandes échelles [122, 80]

$$X'' + 2\mathcal{H}X' + \frac{d^2V}{d\phi}X = 0. \quad (3.17)$$

Dans le premier cas, X est la déviation par rapport à une solution de l'équation (3.3), la solution de type attracteur par exemple. En raison de l'existence d'une solution de type attracteur, X tend vers 0. Dans le second cas, $X = \delta\phi$, les solutions de la partie homogène de l'équation des perturbations seront donc aussi attirées vers 0. La solution particulière à l'équation non-homogène constitue donc une solution type attracteur pour les perturbations $\delta\phi$.

Le problème de la détermination des conditions initiales est dès lors évité si la solution de type attracteur est rejointe avant que le terme en k^2 ne devienne comparable aux autres termes de l'équation (3.10).

Le code CAMB a été modifié pour tenir compte de la présence de la quintessence en remplacement de la constante cosmologique, tant au niveau de l'évolution des quantités homogènes que perturbées. L'empreinte laissée par la quintessence sur le CMB est la suivante.

La quintessence domine tardivement, les fluctuations absolues du fluide de quintessence n'influencent pas la dynamique des potentiels gravitationnels au moment de la recombinaison. La structure acoustique du spectre du CMB (hauteurs et distances relatives des pics acoustiques par exemple) reste inchangée comparée au modèle Λ CDM. Cependant, une modification de l'histoire récente de l'expansion cosmique entraîne un décalage des pics acoustiques, en relation avec le paramètre θ_* , Tables 3.1 et 3.2, au travers de la distance comobile qui nous sépare de la surface de dernière diffusion. Par ailleurs, à l'approche de l'ère dominée par la quintessence, l'équation d'état totale varie différemment par rapport à un modèle Λ CDM. Les variations temporelles des potentiels gravitationnels, auxquels contribuent cette fois-ci les perturbations spatiales de la quintessence, sont donc modifiées. L'amplitude de l'effet Sachs-Wolfe intégré récent en est altérée.

3.2.2 Contraintes

Bien qu'efficaces pour détecter l'accélération récente de l'expansion cosmique dans un univers de courbure spatiale nulle, les supernovae de type Ia ne peuvent à elles seules contraindre les modèles de quintessence. En comparaison à un modèle Λ CDM, une supernovae sera détectée avec une luminosité identique, pour un décalage spectral donné, dans un modèle de quintessence mais doté d'une densité de matière Ω_m inférieure. Les modèles à grande valeur de α nécessitent une plus grande densité de quintessence Ω_Q pour provoquer la même accélération. L'information extraite de la relation entre la distance luminosité et le redshift des supernovae présente donc une dégénérescence entre Ω_m et α .

N'ayant pas calibré la magnitude absolue des supernovae, le taux d'expansion actuel reste non-contraint à ce niveau.

De même, le paramètre α des modèles de quintessence introduit une dégénérescence supplémentaire dans le spectre du CMB. Augmenter α revient à augmenter la distance angulaire acoustique θ_* par une réduction de la distance comobile $D_A(a_*)$ qui nous sépare de la surface de dernière diffusion. Ce décalage du spectre acoustique vers les grands angles peut être compensé par une augmentation de cette distance comobile au travers d'une réduction du taux d'expansion actuel, $D_A \propto H_0^{-1}$. Cependant, il est nécessaire de maintenir la structure acoustique du spectre inchangée, les densités physiques $\Omega_b h^2$ et $\Omega_c h^2$ doivent être conservées. La réduction du taux d'expansion actuel s'accompagne donc d'une augmentation de la densité Ω_m .

Au niveau du CMB, la dégénérescence introduite par la quintessence entre Ω_m et α est dès lors orthogonale, au sens figuré, à celle présente dans les données des supernovae. Une analyse délimitera efficacement l'espace des paramètres.

Pour cette analyse, nous faisons à nouveau appel aux jeux de données Union et WMAP5. L'exploration du domaine de l'espace des paramètres favorisés par ces observations est confiée à CosmoMC. Les paramètres de base sont $\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$, H_0 , z_{re} , A_s , n_s , α et A_{SZ} , le prior est supposé uniforme pour chacun d'eux. La Table 3.3 donne l'estimation à 2σ des paramètres cosmologiques pour les modèles RP et SG. Pour comparaison, les contraintes pour le modèle Λ CDM (1σ) sont rapportées à la Table B.2. La figure 3.1 montre les contours dans le plan $\Omega_m h^2 - \alpha$. Le modèle Λ CDM, analogue à $\alpha = 0$ ou encore $w_Q^{(0)} = -1$ et $w_Q^{(1)} = 0$, est inclus dans les barres d'erreur à 1σ . Le modèle SG étant plus naturellement accélérant que RP, le paramètre α y est moins contraint.

3.2.3 Sélection des modèles réalistes

Différents travaux ont déjà étudié l'effet de la quintessence sur la formation des structures cosmiques de matière à l'aide de simulations à N-corps. Les valeurs des paramètres standards utilisées correspondent aux valeurs optimales du modèle Λ CDM pour les données WMAP : $\Omega_m = 0.3$ et $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Dans la première étude [123, 124], le choix du paramètre de quintessence α est motivé par la volonté de rendre naturelle l'échelle d'énergie du potentiel, $\lambda \sim 1 \text{ TeV}$, soit $\alpha \sim 4$ tant pour le potentiel RP que SG (marqueurs \diamond , Figure 3.1). La seconde [125], le choix s'est porté sur $\alpha = 0.6$ pour RP et $\alpha = 6.7$ pour SG, de sorte qu'aujourd'hui $w_Q = -0.83$ pour les deux potentiels (\times). La troisième [126] a opté pour $\alpha = 6.5$ avec le potentiel SG (\star). Ces modèles se

Paramètres primaires	RP	SG
$\Omega_b h^2$	0.0226 ± 0.0012	0.0227 ± 0.0013
$\Omega_c h^2$	$0.107^{+0.012}_{-0.011}$	$0.105^{+0.012}_{-0.013}$
H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	$67.4^{+4.7}_{-4.8}$	$66.1^{+5.5}_{-5.8}$
z_{re}	10.4 ± 2.7	10.6 ± 2.8
$10^9 A_s$	$2.12^{+0.18}_{-0.17}$	$2.11^{+0.19}_{-0.17}$
n_s	$0.964^{+0.028}_{-0.029}$	$0.968^{+0.034}_{-0.030}$
α	< 0.89	< 6.2
Paramètres dérivés		
t_0 (Ga)	$13.84^{+0.28}_{-0.27}$	$13.95^{+0.38}_{-0.32}$
$\Omega_m h^2$	0.130 ± 0.012	0.128 ± 0.013
Ω_m	$0.287^{+0.056}_{-0.050}$	$0.293^{+0.060}_{-0.053}$
σ_8^{lin}	$0.737^{+0.083}_{-0.097}$	$0.70^{+0.11}_{-0.15}$
$\log_{10} \lambda$ (TeV)	$-11.9^{+3.3}_{-2.0}$	$-6.7^{+12.5}_{-6.8}$
$w_Q^{(0)}$	< -0.78	< -0.83
$w_Q^{(1)}$	< 0.11	< 0.39
q_0	$0.44^{+0.13}_{-0.17}$	$0.47^{+0.13}_{-0.16}$
z_a	$0.67^{+0.15}_{-0.16}$	$0.58^{+0.18}_{-0.19}$
z_d	$0.42^{+0.12}_{-0.11}$	$0.40^{+0.12}_{-0.11}$

Tab. 3.3 – Contraintes à 2σ combinées WMAP5+Union pour les modèles de quintessence RP et SG.

situent en dehors des contours à 2σ WMAP5+Union. Par ailleurs, ils n'ont pas été choisis dans la direction de la dégénérescence résiduelle $\Omega_m h^2 - \alpha$. Dès lors au niveau de la formation non-linéaire des structures de matière, avec une densité de matière identique, ces modèles ne présentent que de faibles déviations par rapport au modèle de référence Λ CDM.

Toutefois, une récente étude [127] guidée par [128] a choisi pour le potentiel SG (\bullet) des valeurs en meilleure adéquation avec les données actuelles : $\Omega_m = 0.255$ et $\alpha = 2.2$, avec la même valeur de H_0 que dans les références précédentes.

Notre choix de modèles de quintessence s'oriente vers des paramètres en accord à 2σ avec les contraintes de la Table 3.3. Vis-à-vis des données, de tels modèles sont donc statistiquement équivalents à moins de 2σ au modèle Λ CDM de référence de la Table B.1. Les modèles sélectionnés seront ainsi qualifiés de *réalistes* : tout en présentant un écart au modèle Λ CDM, ils restent en accord avec les données du CMB et des supernovae. Un jeu de paramètres est sélectionné par potentiel de quintessence, Table 3.4 (marqueurs \oplus , Figure 3.1). Hormis la densité de matière totale, l'amplitude primordiale des perturbations scalaires, les paramètres de ces modèles sont identiques au modèle de référence Λ CDM. La densité de baryons est identique dans les 3 modèles, c'est la densité de matière sombre qui change. Dans les trois modèles réalistes, le taux d'expansion actuel est pris égal à la valeur préférée par WMAP5+Union pour le scénario

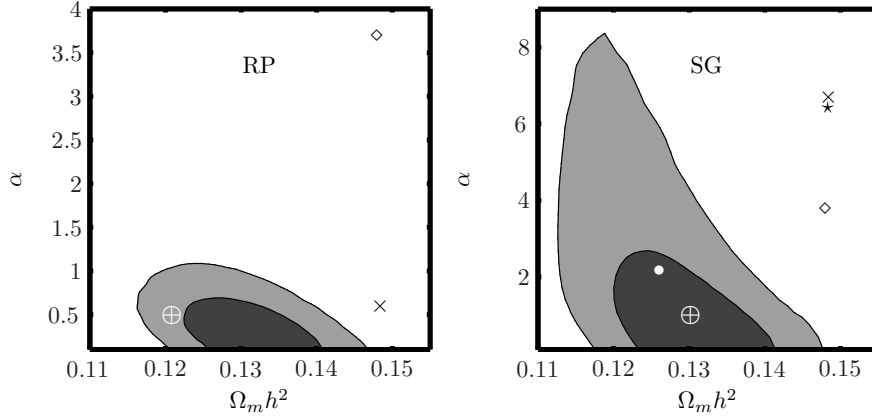


Fig. 3.1 – Contours à 1σ et 2σ obtenus de l’analyse combinée du diagramme de Hubble des supernovae Union et des données CMB WMAP5 pour les potentiels de quintessence SG et RP. Le marqueur \oplus indique notre choix de modèle réaliste pour chaque potentiel de quintessence, les autres représentent les modèles déjà étudiés dans la littérature, cf. texte.

Λ CDM, $H_0 = 72.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Une valeur identique de H_0 permettra de comparer directement les échelles physiques entre les différentes simulation à N-corps. Une telle valeur pousse les deux modèles de quintessence aux limites des contraintes à 2σ pour H_0 et Ω_m .

3.3 Prédiction pour les structures cosmiques de la matière

Malgré l’adéquation de ces trois modèles aux mêmes données expérimentales, des différences peuvent se développer pour d’autres observables. Nous cherchons donc ici à quantifier l’empreinte de ces modèles au niveau de la formation des structures de la matière sombre. Tout d’abord, nous étudions l’effet de ces modèles sur la fonction de croissance linéaire et le spectre de puissance linéaire de la matière. Ensuite, nous préparons les ingrédients nécessaires à la simulation de l’évolution non-linéaire de ces structures cosmiques en cosmologie de quintessence.

	Λ CDM	RPCDM	SGCDM
Ω_m	0.26	0.23	0.25
α	–	0.5	1
$10^9 A_s$	2.1	2.0	2.1
$\Omega_m h^2$	0.135	0.120	0.130
λ (TeV)	2.4×10^{-15}	4.9×10^{-12}	2.1×10^{-9}
$w_Q^{(0)}$	-1	-0.87	-0.94
$w_Q^{(1)}$	0	0.08	0.19
q_0	0.62	0.51	0.56
z_a	0.80	0.87	0.72
z_d	0.43	0.61	0.50
σ_8^{lin}	0.80	0.66	0.73

Tab. 3.4 – Modèles réalistes. Les autres paramètres cosmologiques primaires correspondent à ceux du modèle de référence, Table B.1. Le taux d’expansion actuel est considéré dans ce chapitre comme étant un paramètre primaire, $H_0 = 72.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

3.3.1 Fonctions de transfert et de croissance dans le régime linéaire

A la fin de l’ère de matière et dans l’ère dominée par la quintessence, la croissance des perturbations de matière est modifiée par une expansion différente, mais aussi par l’existence des fluctuations spatiales du champ de quintessence.

Bien que le moment de la transition vers un univers en expansion accélérée z_a soit proche dans les trois modèles réalistes, le profil du paramètre d’accélération, équation (1.56), est adouci dans les modèles de quintessence : avant la transition, la décélération est moins forte pour les modèles de quintessence (avec aussi $|q_{\text{RP}}| < |q_{\text{SG}}|$) alors qu’après, l’accélération y est moins forte (avec aussi $q_{\text{RP}} < q_{\text{SG}}$), Figure 3.2. En effet, premièrement l’équation d’état des deux modèles de quintessence est toujours inférieure en valeur absolue à celle du modèle Λ CDM. Deuxièmement, ces modèles sont dotés d’une plus grande densité de quintessence que pour Λ CDM. Dans l’ère de matière, le potentiel SG choisi présente une pente plus importante que pour RP, l’équation d’état est alors moins négative, provoquant une décélération moins forte. Plus tard, lorsque le terme en $e^{\kappa\phi^2/2}$ affecte le potentiel SG, la hiérarchie des équations d’état des deux modèles s’inverse.

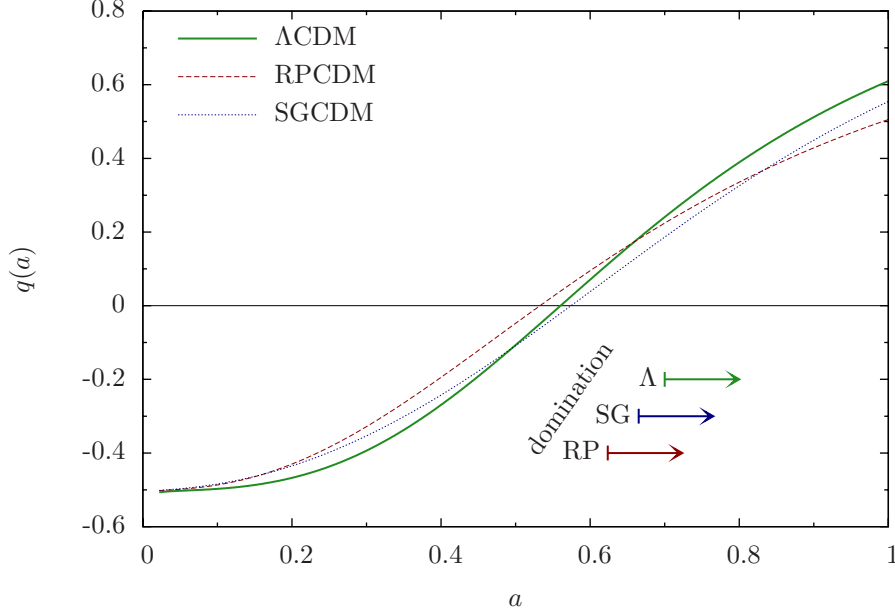


Fig. 3.2 – Evolution du paramètre d'accélération $q \equiv \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2$ pour les trois modèles réalistes d'énergie sombre de la Table 3.4 sélectionnés sur base des données du CMB et des supernovae. Pour chacun des modèles un repère indique le début de l'ère qui sera éternellement dominée par l'énergie sombre.

La fonction de croissance $D_+(a)$ est sensible à une modification de l'expansion sur la croissance des perturbations de matière

$$\frac{d^2 D_+}{da^2} + \frac{1}{a}[2 + q(a)]\frac{dD_+}{da} - \frac{3}{2}\frac{\Omega_m}{a^3}\frac{H_0^2}{\mathcal{H}^2}D_+ \stackrel{\circ}{=} 0. \quad (3.18)$$

C'est le jeu entre le terme de frottement, en $(2 + q)/a$, et le terme d'entraînement, proportionnel à ρ_m/\mathcal{H}^2 , qui détermine la valeur des fluctuations de matière aujourd'hui.

La croissance des perturbations étant sensible à l'histoire cosmique, il est nécessaire d'évaluer précisément cette dernière. De nombreux auteurs proposent de paramétriser l'équation d'état de l'Univers pour sonder l'effet de la quintessence sur l'expansion, par exemple [129]

$$w_Q(a) = w_Q^{(0)} + w_Q^{(1)}(1 - a). \quad (3.19)$$

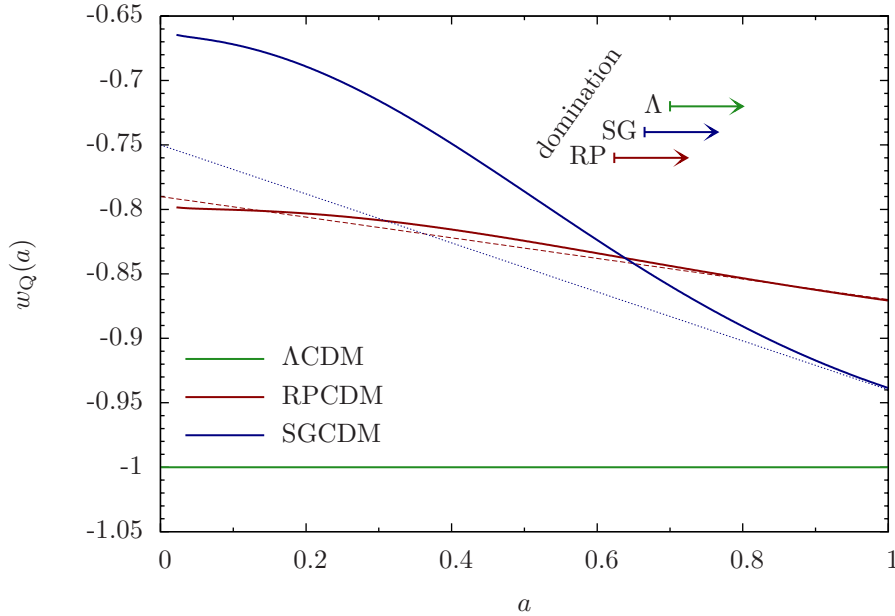


Fig. 3.3 – En traits pleins, évolution du paramètre d'état des modèles réalistes d'énergie sombre, la paramétrisation (3.19) est montrée en traits tirets.

L'accord entre l'équation d'état fondamentale et la version paramétrisée dépend du potentiel étudié. A la figure 3.3, la paramétrisation est comparée à l'équation d'état fondamentale pour les deux modèles réalistes de quintessence. Pour RP, la faible variation de l'équation d'état rend la paramétrisation (3.19) efficace. Alors que pour d'autres potentiels, tels ceux de la famille SG, cette paramétrisation ne reproduit pas l'importante variation de l'équation d'état qui leur est caractéristique.

Par ailleurs, avec de telles paramétrisations, l'imprécision sur la variation de l'équation d'état se répercute sur la valeur de la célérité acoustique adiabatique. L'évolution des perturbations de quintessence en est affectée. De plus, l'évolution de ces perturbations n'étant plus liée à une solution de type attracteur dérivée du niveau homogène, la valeur finale des perturbations de quintessence dépend alors des conditions initiales.

En présence des fluctuations de quintessence dans l'ère de matière et de quintessence, la factorisation des perturbations de matière en fonctions de croissance (indépendante de l'échelle) et de transfert n'est plus valide. En effet, dans le cas de la constante cosmologique, les équations d'Einstein et les équations de

		Λ CDM	RPCDM	SGCDM
Energie sombre inhomogène	σ_8^{lin}	0.80	0.66	0.73
Energie sombre homogène			0.68	0.76

Tab. 3.5 – Valeurs de σ_8^{lin} pour les trois modèles réalistes, avec (3.20) et sans (3.18) perturbations de quintessence.

conservation de la matière constituent un système d'équations fermé pour les perturbations cosmologiques. Réécrit en une équation du second ordre pour δ_m'' , l'absence de termes de pression implique que les coefficients de cette équation sont indépendants du mode de Fourier k considéré. Alors qu'en quintessence, les termes de pression ne permettent pas de réécrire cette dernière équation indépendamment de l'échelle. Un terme inhomogène et dépendant de k apparaît. En ne négligeant pas les fluctuations du champ de quintessence, l'équation (3.18) devient

$$\frac{d^2 D_+}{da^2} + \frac{1}{a}[2 + q(a)]\frac{dD_+}{da} - \frac{3}{2}\frac{\Omega_m}{a^3}\frac{H_0^2}{\mathcal{H}^2}D_+ = \frac{1}{a^2\mathcal{H}^2 T_m(k)} \left(a^2 \delta\phi \frac{dV}{d\phi} - 2a^2 \mathcal{H}^2 \frac{d\phi}{da} \frac{d\delta\phi}{da} \right). \quad (3.20)$$

Où cette fois-ci le mode de croissance dépend de l'échelle $D_+(a, k)$ et $T_m(k)$ est la fonction de transfert des perturbations de matière $\delta_m(a, k)$. La factorisation de δ_m en ces deux fonctions est ici définie de telle sorte que $\delta_m(a, k) = \delta_m(1, k) \times D_+(a, k)$.

Le spectre de puissance actuel des perturbations de matière ne résulte donc plus d'une simple amplification gravitationnelle de la distribution de matière établie au début de l'ère de matière. L'amplification est modulée, en fonction de l'échelle, par les perturbations de quintessence. Dans l'espace réel, c'est la convolution entre la fonction de croissance et la fonction transfert qui détermine dès lors la répartition de la matière.

Par conséquent, la valeur de σ_8^{lin} dépend de l'évolution des perturbations de quintessence. L'impact des perturbations sur σ_8^{lin} pour un modèle de quintessence donné est aussi important que la différence induite par l'effet de l'expansion par rapport à un modèle Λ CDM à densité de matière identique. En ce qui concerne les modèles réalistes, Table 3.5, les perturbations du champ scalaire réduisent la valeur de σ_8^{lin} de 3% (4% resp.) pour RPCDM (SGCDM resp.).

Les perturbations de quintessence sont donc un élément essentiel dans l'étude des structures de matière. Tout d'abord, sans perturbations, au travers du plateau Sachs-Wolfe du CMB, l'espace des paramètres de quintessence permis par les données est réduit. Les prédictions extraites de modèles réalistes en adéquation avec ces contraintes ne présenteraient qu'une faible déviation par rapport à ceux de ce chapitre. A quoi s'ajoute l'effet direct des perturbations de quintessence sur la prédiction des grandes structures de matière : effet amoindri dans ce type de modèles réalistes puisque la déviation à un modèle Λ CDM serait réduite (l'équation d'état étant plus proche de la valeur -1).

3.3.2 Croissance non-linéaire

Les codes de simulation N-corps utilisés par le consortium *Dark Energy Universe Simulations* (DEUS) calculent l'évolution des structures de matière sombre à l'aide d'une expansion, au niveau homogène, incluant la quintessence. Baryons et matière sombre sont considérés comme ne formant qu'une seule et unique composante de matière. Seules les perturbations de matière sont intégrées : la quintessence y est considérée homogène.

Cependant, il est possible d'inclure de manière implicite les perturbations de quintessence au niveau linéaire. En effet, l'intégration non-linéaire démarre dans l'ère de matière, typiquement $z_i \sim 30 - 140$. Pour établir les conditions initiales de cette intégration, le spectre de puissance linéaire de la matière est requis. Si l'intégration à N-corps incluait toutes les composantes (matière et quintessence), partant des spectres instantanés de ces composantes évalués en z_i , la simulation N-corps produirait à l'heure actuelle, en $z = 0$, pour les échelles linéaires, les spectres prédits par la théorie linéaire des perturbations cosmologiques. Or, la simulation N-corps n'incluant pas explicitement les perturbations de quintessence, démarrer avec ces mêmes spectres (évalués en z_i donc), conduirait à une évolution des modes linéaires incorrecte.

Pour y remédier, il est nécessaire de démarrer les simulations depuis un spectre linéaire fiduciel P_m^{fid} en z_i calculé à l'aide du spectre linéaire P_m de la matière en $z = 0$ qui, lui, inclut l'effet des perturbations de quintessence sur la matière. Ce spectre en $z = 0$, $P_m(k, z = 0)$, est remonté dans le temps grâce à la fonction de croissance $D_+^h(z)$ obtenue en quintessence homogène, solution de l'équation (3.18)

$$P_m^{\text{fid}}(k, z = z_i) = D_+^h(z_i) \times P_m(k, z = 0). \quad (3.21)$$

Il est à noter qu'utiliser l'équation avec perturbations de quintessence (3.20), ne donnerait rien d'autre que le spectre linéaire exact évalué en z_i évoqué plus haut, $P_m(k, z_i)$.

Pour les modes linéaires, il y aura donc adéquation entre les résultats obtenus par la théorie linéaire avec perturbations du fluide quintessence et les résultats des simulations N-corps sans perturbation explicite de la quintessence. Grâce à une telle technique, l'impact des fluctuations de quintessence sur l'évolution non-linéaire de la matière est en partie rendu compte. L'évolution non-linéaire des perturbations de quintessence est omise, ce qui aurait résulté en une modification des potentiels gravitationnels. Par ailleurs, l'évolution des perturbations de quintessence devraient elles aussi subir l'influence modifiée des perturbations de matière (toujours au travers des potentiels gravitationnels).

Simulations à N-corps

Les résultats des simulations N-corps présentés ci-après ont été obtenus par le consortium DEUS [6]. Deux jeux de simulations différants en nombre de particules ont été produits : 512^3 et 1024^3 particules. Pour chacun des jeux, les trois cosmologies réalistes Λ CDM, RPCDM, SGCDM ont été simulées chacune pour trois tailles de boîtes. Les simulations sur les volumes de petite extension, de plus grande résolution spatiale donc, permettent de sonder plus précisément la structure interne telle que le profil des halos de matière sombre. Alors que les plus grands volumes rendent plus robuste le comptage des halos les plus rares. Les caractéristiques de ces simulations sont données Tables 3.6 et 3.7.

Ces différentes simulations débutent à des moments z_i différents de telle sorte que l'amplitude des fluctuations de départ de la densité de matière, dans une cellule, soit égale à 5%. Pour dériver z_i et établir les conditions initiales, le spectre initial linéaire $P_m^{\text{fid}}(k, z = z_i)$ est calculé avec la méthode décrite ci-dessus, équation (3.21).

La distribution initiale des particules de matière dans l'espace réel est obtenu grâce au code MPGRAFIC [130]. Les phases des modes de Fourier, identiques à une échelle donnée pour les différents modèles, est fournie par le Projet Horizon [131]. Les différentes simulations correspondent ainsi à une réalisation statistique identique de l'Univers. Comparer visuellement les distributions de matière dans l'espace réel entre les différents modèles fait dès lors sens. Par ailleurs, aux grandes échelles, les spectres de puissance reconstruits des différents modèles présentent ainsi des fluctuations identiques inhérentes à la variance cosmique : le rapport des spectres n'est ainsi pas affecté par la variance cosmique.

Modèles	Paramètres	162 h ⁻¹ Mpc	648 h ⁻¹ Mpc	1296 h ⁻¹ Mpc
Tous	l_{\max} Δ_x (h ⁻¹ kpc)	7 2.47	6 19.8	6 39.6
Λ CDM	z_i m_p (h ⁻¹ M _⊙)	93 2.28×10^9	56 1.46×10^{11}	41 1.17×10^{12}
RPCDM	z_i m_p (h ⁻¹ M _⊙)	81 2.02×10^9	50 1.30×10^{11}	37 1.04×10^{12}
SGCDM	z_i m_p (h ⁻¹ M _⊙)	92 2.20×10^9	55 1.41×10^{11}	40 1.13×10^{12}

Tab. 3.6 – Paramètres des simulations N-corps des trois cosmologies réalistes d’énergie sombre pour trois cubes de longueurs différentes. Chaque simulation comprend 512^3 particules de masse m_p avec une grille initialement régulière en z_i de 512^3 cellules propagée jusqu’aujourd’hui avec une résolution Δ_x pour le niveau maximal de raffinement l_{\max} .

Modèles	Paramètres	162 h ⁻¹ Mpc	648 h ⁻¹ Mpc	2592 h ⁻¹ Mpc
Tous	l_{\max} Δ_x (h ⁻¹ kpc)	6 2.47	6 9.89	6 39.6
Λ CDM	z_i m_p (h ⁻¹ M _⊙)	137 2.86×10^8	93 1.83×10^{10}	56 1.17×10^{12}
RPCDM	z_i m_p (h ⁻¹ M _⊙)	118 2.53×10^8	81 1.62×10^{10}	50 1.04×10^{12}
SGCDM	z_i m_p (h ⁻¹ M _⊙)	134 2.75×10^8	92 1.76×10^{10}	56 1.13×10^{12}

Tab. 3.7 – Paramètres des simulations à 1024^3 particules, la grille de départ est de 1024^3 cellules.

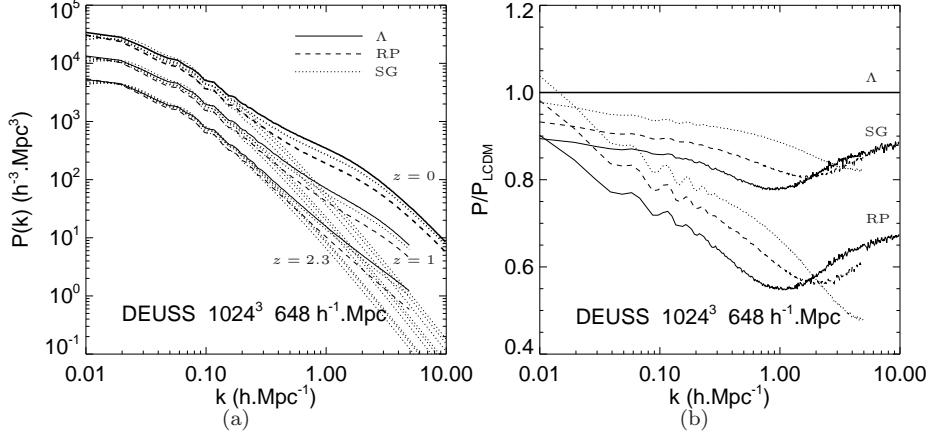


Fig. 3.4 – A gauche, spectres de puissance non-linéaires de la matière à différents redshifts pour les trois modèles réalistes d'énergie sombre simulés à partir d'une boîte de $648 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$ de longueur contenant 1024^3 particules. Les paramètres des simulations sont résumés à la Table 3.7. Pour comparaison, les spectres linéaires sont représentés en trait pointillés et fins. A droite, rapport entre les spectres des modèles de quintessence et du modèle ΛCDM .

Les résultats des simulations à N-corps sont les suivants, Figure 3.4 pour les spectres de puissance de la matière. Aux grandes échelles, $k \lesssim 0.1 \text{ h Mpc}^{-1}$, l'évolution suit la croissance linéaire détaillée plus haut. Aux plus petites échelles, la hiérarchie présente au niveau linéaire entre les modèles d'énergie sombre est conservée. Aujourd'hui, comparativement au modèle ΛCDM , la puissance des perturbations est diminuée d'environ 20% pour le modèle SGCDM et de 45% pour RPCDM. Cependant, l'amplification des spectres par les phénomènes non-linéaires diffère selon les modèles : autour de $k = 1 \text{ h Mpc}^{-1}$, le rapport des spectres non-linéaires n'est pas monotone à l'inverse du rapport des spectres linéaires.

On cherche à isoler la trace de la quintessence sur les processus non-linéaires en comparant les spectres de matière. La quantité $P(k)/P_{\Lambda \text{CDM}}(k)$ met en exergue l'effet de la quintessence sur les non-linéarités mais dépend explicitement du spectre linéaire. Quant au rapport des spectres non-linéaires et linéaires pour un modèle donné d'énergie sombre, $r_X \equiv P_X^{\text{non-lin}}(k)/P_X^{\text{lin}}(k)$ ($X = \Lambda \text{CDM}, \text{RPCDM}, \text{SGCDM}$), il ne différencie pas au niveau des non-linéarités les effets spécifiques au scénario d'énergie sombre. On combine dès lors ces deux types de rapport pour obtenir $R_X \equiv r_X/r_{\Lambda \text{CDM}}$, Figure 3.5(a), qui révèle, au niveau des non-linéarités, la contribution propre au modèle d'énergie sombre étudié :

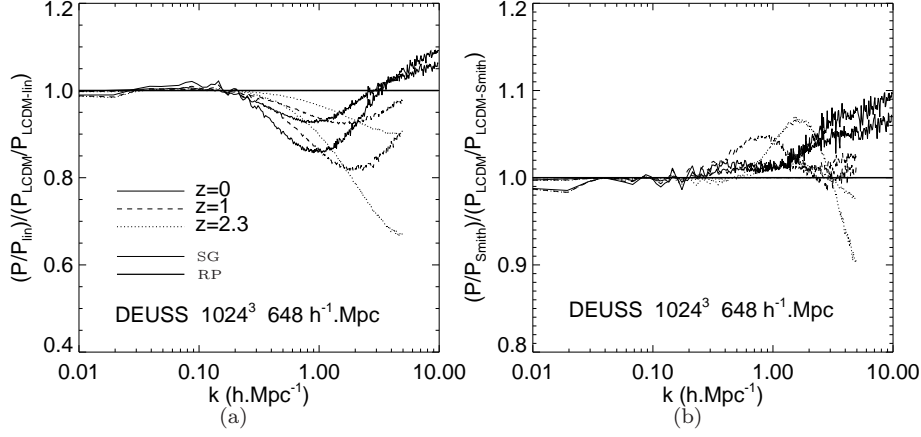


Fig. 3.5 – A gauche, rapports des spectres non-linéaires et linéaires. A droite, comparaison des simulations aux fits de la littérature.

relativement au modèle Λ CDM, ce rapport isole l'effet de la quintessence sur l'évolution non-linéaire de la matière. Au passage, notons que R_X fait intervenir un rapport de spectres non-linéaires, ce qui permet de supprimer de nombreuses erreurs systématiques [132].

Par construction, le rapport R_X égale l'unité pour les modes linéaires, soit aujourd'hui $k \lesssim 1 \text{ h Mpc}^{-1}$. On identifie un régime quasi-linéaire pour les échelles $0.1 \lesssim k \lesssim 1 \text{ h Mpc}^{-1}$ auxquelles la moindre amplitude du spectre de puissance linéaire est accentuée par les effets non-linéaires. C'est l'amplification non-linéaire qui accroît la différence entre les fonctions de croissance des différents modèles d'énergie sombre à ces échelles. Par contre, tardivement à plus petite échelle, $k \gtrsim 1 \text{ h Mpc}^{-1}$, en raison de la saturation des taux de croissance par les effets non-linéaires, le rapport des spectres est réduit. L'amplitude du spectre pour le modèle Λ CDM étant plus élevée initialement, c'est ce modèle qui est le premier affecté par les phénomènes de saturation. A cela s'ajoute positivement l'effet de l'expansion cosmique. Avec le modèle Λ CDM, l'Univers subit la plus forte décélération pour $a \lesssim 0.5$ favorisant l'amplification non-linéaire de la croissance des perturbations, $q_{\Lambda\text{CDM}} < q_{\text{SGCDM}} < q_{\text{RPCDM}} < 0$, alors que tardivement, pour $a \gtrsim 0.5$, l'accélération y est la plus élevée, $0 < q_{\text{RPCDM}} < q_{\text{SGCDM}} < q_{\Lambda\text{CDM}}$, accentuant dès lors la saturation.

Les spectres obtenus peuvent être comparés aux fits *universels*, soient les fits Smith [133] et McDonald [132]. Les fits Smith ont été calibrés à partir de simulations N-corps de modèles Λ CDM. Alors que les fits McDonald ont quant

à eux été développés à partir de simulations N-corps incluant une composante d'énergie sombre homogène d'équation d'état constante. La figure 3.5(b) représente le rapport des déviations des simulations de quintessence $P_X^{\text{non-lin}}(k)$ relativement aux fits Smith ou McDonald $P_X^f(k)$

$$S_X^f = \frac{P_X^{\text{non-lin}}}{P_X^f} \times \left(\frac{P_{\Lambda\text{CDM}}^{\text{non-lin}}}{P_{\Lambda\text{CDM}}^{\text{Smith}}} \right)^{-1}. \quad (3.22)$$

Les fits proposent une bonne estimation des spectres pour les modes dans les régimes linéaire et quasi-linéaire, $k \lesssim 1 \text{ h Mpc}^{-1}$. La précision de ces prédictions en quintessence y est comparable à celle de Smith pour le modèle ΛCDM . A plus petite échelle, $k \gtrsim 1 \text{ h Mpc}^{-1}$, tant les fits de Smith que de McDonald présentent une déviation plus élevée pour les modèles de quintessence que pour le ΛCDM . Malgré tout, en ce qui concerne le fit McDonald, l'adéquation avec le modèle RPCDM est meilleure que pour SGCDM, la hiérarchie des déviations est inversée. En cause, l'équation d'état du modèle SGCDM varie plus rapidement que celle du modèle RPCDM.

3.4 En résumé

Deux modèles de quintessence ont été comparés au modèle ΛCDM . Après avoir calibré les paramètres de ces modèles sur base d'observations cosmologiques (CMB et supernovae), les prédictions pour l'évolution linéaire des structures de la matière ont été calculées en incluant les fluctuations de l'énergie sombre. A l'instar du modèle ΛCDM , ces modèles réalistes sont, par construction, compatibles avec les données actuelles. Cependant, ces modèles de quintessence laissent une empreinte qui leur est propre dans la fonction de croissance et dans le spectre linéaire de la matière. En cause, des paramètres cosmologiques différents, nécessaires pour une adéquation correcte aux observations, associés à une modification tardive des potentiels gravitationnels propre à la quintessence génèrent des amplitudes différentes pour les spectres linéaires. En fonction du modèle étudié, une échelle donnée entre dès lors dans le régime quasi-linéaire ou non-linéaire à des moments différents. Par ailleurs, le rythme de l'expansion cosmique, caractérisé par le facteur d'accélération et donc par l'équation d'état de la quintessence modifie le jeu entre les processus d'effondrement gravitationnel et l'expansion. En conséquence, selon l'échelle considérée, ces traces sont soit amplifiées par la croissance non-linéaire des structures de matière, soit atténuées lorsque le régime de regroupement stable est approché. Aujourd'hui,

le spectre non-linéaire de puissance de la matière et les processus non-linéaires qui le construisent dépendent donc de l'histoire cosmique.

L'analyse développée ci-dessus met en défaut les fits à concurrence de 5% aux plus petites échelles. Bien que leurs prédictions soient simple à évaluer au niveau pratique, les fits de Smith et McDonald montrent leurs limites en cosmologie de précision en sous-entendant que le spectre de matière, évalué aujourd'hui, dépend de paramètres instantanés. Il faut donc choisir entre ces fits généralistes mais à la précision limitée et des études au cas par cas sur base de modèles plus réalistes et dont la connexion avec une théorie fondamentale est plus évidente.

Ces déviations dans les régimes quasi-linéaire et non-linéaire questionnent naturellement la formation et l'évolution des halos de matière sombre. Tant la croissance des perturbations que l'environnement dans lequel ils se développent étant modifiés, il est attendu que la population de halos et leurs propriétés soient altérées en quintessence. De telles modifications remettent en cause l'*universalité* de la distribution en masse des halos [5], universalité déduite de l'unique dépendance de la fonction de masse des halos vis-à-vis de la densité de matière sombre ainsi que de la valeur de fluctuations de matière à un instant donné et non pas de l'histoire de l'évolution cosmique.

Après-dire

Au cours des dernières décennies la cosmologie s'est révélée comme le seul laboratoire, obligé, des secteurs dits invisibles de la physique que sont la matière sombre et l'énergie sombre. Parallèlement, la description de l'historique des événements traversés par l'Univers au cours de son expansion s'est affinée, permettant ainsi une estimation précise des paramètres cosmologiques, tels que l'âge de l'Univers, son contenu en matière ordinaire ou encore sa courbure. Toutefois, la confiance accordée à ces valeurs et à cette description se reporte tant sur la théorie de gravitation que sur les hypothèses à la base des secteurs invisibles. Dans ce travail, nous nous sommes attachés à la recherche de déviations par rapport au scénario standard pour les secteurs gravitationnels et sombres.

Avant tout, la trace d'un éventuel effet Nordtvedt en gravitation a été recherchée dans le contexte cosmologique. Pour ce faire, une possible violation du principe d'équivalence fort est introduite de manière effective dans les équations du mouvement des baryons. La sensibilité des baryons aux variations de leur couplage gravitationnel atteint une valeur non-négligeable à l'approche de l'ère dominée par la matière. Le CMB apparaît dès lors comme un outil approprié pour tester le principe d'équivalence fort.

La violation du principe d'équivalence modifie le poids des baryons dans les oscillations acoustiques du fluide photons-baryons sans pour autant altérer les effets inertiels. La structure acoustique du spectre de puissance angulaire du CMB s'en trouve modifiée de manière unique, considérant tout le spectre il n'y a pas de dégénérescence entre la densité des baryons et l'amplitude de la violation du principe d'équivalence fort. Une contrainte sur le paramètre de violation a été obtenue grâce aux observations des anisotropies du CMB par le satellite WMAP et aux mesures des abondances des éléments légers prédites par la nucléosynthèse primordiale.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à une théorie de gravitation particulière présentant une violation minimale du principe d'équivalence fort au travers d'un champ scalaire non-minimalement couplé à la métrique. Son impact cosmologique est celui qu'aurait un fluide de radiation en relativité générale. En revanche, il ne s'agit pas de radiation ordinaire comme le seraient les photons, les neutrinos actifs ou stériles. La différence se marque au niveau des perturbations autour d'un univers de Friedmann-Lemaître : la pression anisotrope induite par le champ scalaire ne s'identifie pas à celle d'une radiation en chute libre dans les potentiels gravitationnels.

Cette nouvelle radiation sombre, modifie les potentiels pour les modes de type sub-expansion dans l'ère de radiation et peu après la transition vers l'ère dominée par la matière. Par conséquent, pour les modes déjà dans le régime sub-expansion avant la transition, le contraste de densité de matière attaque le mode de croissance avec une valeur initiale différente de celle en relativité générale. Le spectre de puissance des perturbations de matière est affecté aux échelles $k \gtrsim k_{\text{eg}}$. A son tour, le spectre du CMB est sensible aux effets gravitationnels du champ scalaire. L'effet Sachs-Wolfe intégré primitif ressent les perturbations du champ scalaire, l'amplitude du premier pic acoustique s'en trouve amplifiée et sa position décalée vers les plus petites échelles. Les pics acoustiques d'ordre suivants sont eux aussi décalés.

La signature du champ scalaire est alors unique, comparée à celle d'une radiation en chute libre. A l'aide de simulations MCMC les données WMAP permettent de contraindre simultanément la présence du champ scalaire et de neutrinos supplémentaires. Il n'y a pas de dégénérescence entre les signatures de ces deux types de radiation. Toutefois, le champ scalaire introduit une dégénérescence vis-à-vis de la densité de matière Ω_m et du taux d'expansion actuel H_0 . Fort heureusement, des observables extérieures au CMB et insensibles au champ scalaire contraignent déjà ces paramètres. Une analyse combinée de ces trois observables permet d'améliorer la contrainte sur la densité d'énergie du champ scalaire. Ces contraintes inédites sont aussi performantes que celles actuellement issues de la nucléosynthèse primordiale en présence d'une radiation homogène.

Les perspectives d'amélioration de ces contraintes passent donc soit par l'utilisation de nouvelles observables pour lesquelles le champ scalaire a une influence directe, comme par exemple le spectre de puissance de la matière dans le régime des oscillations baryoniques acoustiques, soit en cherchant de nouvelles mesures indépendantes de Ω_m et H_0 , par exemple avec l'aide de mesures de $\mathcal{H}(z)$ à bas redshift. Des mesures de σ_8 , grâce aux effets de lentilles gravitationnelles, ap-

porteraient elles aussi des contraintes, bien que dégénérées, sur les densités de matière et du champ scalaire.

La description théorique du fluide de radiation sombre pourrait être complétée en étudiant l'évolution des modes initiaux d'entropie dûs aux deux nouveaux degrés de liberté ainsi introduits.

Enfin, la troisième composante sombre, l'énergie sombre, décrite dans le modèle de concordance par la constante cosmologique, est étendue au cas de la quintessence. L'extension consiste ici en un champ scalaire minimalement couplé à la métrique, actuellement en régime de roulement lent dans un potentiel. Les potentiels de Ratra-Peebles et leur extension SUGRA ont été étudiés. La quintessence modifie la relation distance-luminosité des supernovae de type Ia, les perturbations dynamiques qu'elle développe altèrent également les spectres du CMB et de la matière.

A l'aide des données disponibles pour ces deux premières observables (supernovae et CMB), un jeu de paramètres cosmologiques a été dérivé pour les deux types de potentiels. En raison de leur adéquation avec les données disponibles, ces deux modèles sont dits réalistes. Sur base de ces deux modèles, le consortium DEUS a simulé l'évolution non-linéaire des perturbations de matière sombre. Bien que ces simulations ne font pas explicitement évoluer les perturbations de quintessence, leurs effets sont toutefois pris en compte partiellement en démarant les simulations à partir de conditions initiales particulières. Ces dernières sont obtenues à l'aide d'un spectre effectif à haut redshift qui est reconstruit à partir du spectre linéaire de la matière évalué aujourd'hui, ce spectre linéaire incluant l'effet des perturbations de quintessence. Une telle prédiction met en évidence l'importance d'un calcul complet tenant compte des perturbations de la quintessence mais aussi la nécessité de sélectionner correctement les paramètres cosmologiques en tenant compte des dégénérescences possibles des jeux de données. Ainsi, les fits empiriques du spectre de matière habituellement utilisés pour le modèle Λ CDM ne peuvent être transposés tels quels à la quintessence dans l'optique d'obtenir des prédictions précises.

La nature de l'énergie sombre modifie non seulement les conditions initiales à partir desquelles les structures croissent mais altère aussi l'évolution de l'environnement dans lequel les structures de matière se développent de manière non-linéaire. Les phénomènes gravitationnels de structuration non-linéaires des halos de matière sombre, pour lesquels il était admis jusqu'ici qu'ils étaient universels, dépendent donc du scénario d'énergie sombre et de l'histoire cosmique, passée et présente. Le report de l'influence de l'énergie sombre sur la formation de ces structures à petite échelle ouvre des perspectives quant à la possibilité de sonder la nature de l'énergie sombre aux échelles astrophysiques : la dyna-

mique du regroupement des galaxies dans les halos ainsi que les statistiques des populations galactiques sont fonction de la valeur instantanée et de l'évolution temporelle de la distribution en masse des halos de matière sombre ainsi que de leurs profils.

Nous avons donc cherché à contraindre la présence de secteurs sombres en cosmologie. Après avoir proposé un test générique de la relativité générale, nous nous sommes focalisés sur deux modèles particuliers du secteur sombre. Ces modèles étendent la relativité générale en remplaçant respectivement chacune des deux constantes de la relativité générale, à savoir la constante universelle de Newton et la constante cosmologique d'Einstein, par un champ dynamique. Malgré les problèmes conceptuels et la complexité que cache le modèle Λ CDM, en comparaison des modèles exposés ici, l'analyse des données cosmologiques disponibles aujourd'hui conforte le modèle de concordance Λ CDM basé sur la relativité générale.

Annexes

Annexe A

L'Univers perturbé

A.1 Fluctuations

La description des structures de matière passe par l'abandon de l'homogénéité et de l'isotropie strictes. Les observables cosmologiques fluctuent dans l'espace. Afin de préserver la description réussie de l'Univers au niveau homogène, on suppose que ces fluctuations restent petites devant la valeur moyenne de l'observable en question. Par exemple, la densité de matière $\rho_m(\tau, \vec{x})$ se sépare comme

$$\rho_m(\tau, \vec{x}) = \bar{\rho}_m(\tau) [1 + \delta_m(\tau, \vec{x})], \quad (\text{A.1})$$

où $\bar{\rho}_m(\tau)$ est la densité moyenne de matière décrite dans les sections précédentes et $\delta_m(\tau, \vec{x})$ les fluctuations relatives de la densité de matière. Ces fluctuations servent de critère de petitesse, nous nous limiterons à exprimer les observables au premier ordre des perturbations.

Les notions d'homogénéité et d'isotropie sont transposées en termes statistiques [134]. Au niveau théorique, les perturbations sont décrites par des champs aléatoires : une perturbation évaluée en \vec{x}_1 , $\delta(\tau, \vec{x}_1) = \delta_1$, est une variable aléatoire dont la probabilité de se trouver entre δ_1 et $\delta_1 + d\delta_1$ est donnée par $p(\delta_1)d\delta_1$. Considérons des variables aléatoires du type $F(\delta_1, \delta_2, \dots)$, construites sur ce champ aléatoire pris à des positions différentes et de fonction de distribution conjointe $p(\delta_1, \delta_2, \dots)$. L'homogénéité statistique implique que cette fonction de probabilité p et que les moyennes d'ensemble de la variable aléatoire F sont invariantes lors d'une translation spatiale. Du principe d'isotropie statistique dérive aussi l'invariance de ces quantités sous les rotations spatiales.

On supposera simultanément l'homogénéité et l'isotropie statistiques spatiales, les variables aléatoires telles que F ci-dessus ne dépendent alors que des distances séparant les différents vecteurs positions $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$

En transposant la notion d'ergodicité en thermodynamique à la cosmologie, un observateur identifie l'homogénéité et l'isotropie, non pas au travers de moyennes d'ensembles des différentes réalisations statistiques de l'Univers mais bien à l'aide de moyennes spatiales et angulaires. Par exemple, la fonction de corrélation des perturbations de densité s'écrit en fonction d'une moyenne d'ensemble pour le théoricien

$$\xi_\delta(\tau, r) = \langle \delta(\tau, \vec{x}) \delta(\tau, \vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (\text{A.2})$$

et comme une moyenne spatiale pour l'observateur

$$\xi_{\delta\text{Obs}}(\tau, r) = \frac{1}{V} \int_V d^3\vec{x} \delta(\tau, \vec{x}) \delta(\tau, \vec{x} + \vec{r}). \quad (\text{A.3})$$

L'homogénéité se traduit dans cette dernière relation au travers de l'indépendance de $\xi_{\delta\text{Obs}}$ vis-à-vis de la localisation du volume d'échantillonnage V .

Le volume d'observation V étant d'extension finie, le lien entre la valeur théorique d'une observable, par exemple $\xi_\delta(\tau, r)$ et son estimation observationnelle, soit $\xi_{\delta\text{Obs}}(\tau, r)$, quelle que soit sa qualité, est au moins limité par la variance cosmique.

La description des perturbations est plus commode dans l'espace des fréquences spatiales \vec{k} . La transformée de Fourier $\hat{\delta}(\tau, \vec{k})$ de la fonction $\delta(\tau, \vec{x})$ est donnée par¹

$$\hat{\delta}(\tau, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{x} \delta(\tau, \vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\delta(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\vec{k} \hat{\delta}(\tau, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (\text{A.4b})$$

Le spectre de puissance P_δ des perturbations δ est proportionnel à la transformée de la fonction de corrélation $\hat{\xi}_\delta$. En raison de l'isotropie statistique, le spectre est indépendant de l'orientation de \vec{k} ,

$$P_\delta(\tau, \vec{k}) \equiv (2\pi)^{\frac{3}{2}} \hat{\xi}_\delta(\tau, \vec{k}), \quad (\text{A.5a})$$

$$= |\hat{\delta}(\tau, k)|^2. \quad (\text{A.5b})$$

¹Dans la suite du texte, en fonction du contexte, δ désignera tant la fonction dans l'espace réel, $\delta(\tau, \vec{x})$, que sa transformée $\hat{\delta}(\tau, \vec{k})$.

On définit par σ_8^2 la variance des fluctuations moyennées sur une sphère de rayon comobile $R_8 = 8h^{-1}\text{Mpc}$,

$$\sigma_8^2(\tau) = \left\langle \left[\frac{3}{4\pi R_8^3} \int_{r \leq R_8} d^3\vec{r} \delta(\tau, \vec{x} + \vec{r}) \right]^2 \right\rangle, \quad (\text{A.6})$$

soit l'amplitude caractéristique du spectre de puissance à cette échelle. Dans le cadre de la théorie linéaire des perturbations détaillée par la suite, l'écart-type s'élève à $\sigma_8 \simeq 0.8$ pour le modèle ΛCDM de référence de la Table B.1.

A.2 Métrique

Aux perturbations des champs de matières sont associées les fluctuations du champ gravitationnel. La métrique de l'espace-temps développe des perturbations autour de la métrique de Friedmann-Lemaître, équation (1.43). En se concentrant sur les perturbations scalaires, la métrique s'écrit dès lors, en suivant les conventions de [80],

$$ds^2 = a^2(\tau) [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - 2Ad\tau^2 + 2B_{,i} dx^i d\tau + 2C dx_i dx^i + 2E_{,ij} dx^i dx^j]. \quad (\text{A.7})$$

Les développements suivants se limiteront à l'ordre linéaire en les perturbations A , B , C et E .

A l'aide d'un changement non-homogène des coordonnées, la métrique d'un univers homogène fait intervenir deux degrés de liberté non-homogènes. Par conséquent, parmi les quatre degrés de liberté non-homogènes de la métrique (A.7), deux d'entre eux sont non-physiques. On identifie ainsi deux quantités invariantes de jauge²

$$\Phi \equiv A + \mathcal{H}(\tau)(B - E') + (B - E)'\!, \quad (\text{A.9a})$$

$$\Psi \equiv -C - \mathcal{H}(\tau)(B - E'). \quad (\text{A.9b})$$

²Sous un changement de coordonnées $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, la métrique subit la transformation $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \xi_{\mu|\nu} + \xi_{\nu|\mu}$. Dans l'hypothèse des perturbations scalaires, $\xi^\mu = (T; L^i)$, les perturbations de la métrique se transforment d'après

$$A \rightarrow A + T' + \mathcal{H}T \quad (\text{A.8a})$$

$$B \rightarrow B - T + L' \quad (\text{A.8b})$$

$$C \rightarrow C + \mathcal{H}T \quad (\text{A.8c})$$

$$E \rightarrow E + L \quad (\text{A.8d})$$

Un univers non-perturbé est décrit de manière nécessaire et suffisante par des valeurs des perturbations Φ et Ψ simultanément nulles dans tout l'espace-temps.³

Souvent, les développements se simplifient en fixant la jauge. Deux jauges seront exploitées, celles de Newton et la jauge dite synchrone.

La jauge de Newton, ou encore jauge longitudinale, s'obtient en imposant

$$B = E = 0, \quad (\text{A.10})$$

la métrique γ est diagonale. Dès lors, les composantes perturbées s'identifient aux quantités invariantes de jauge, $A = \Phi$ et $C = -\Psi$.

Du côté de la jauge synchrone, on annule les perturbations des composantes temporelles de la métrique,

$$A = 0 \text{ et } B_{,i} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Avec de telles conditions, cette jauge rend compte des mesures réalisées par des observateurs en chute libre dont le temps de coordonnées correspond au temps cosmique.

A.3 Equations du mouvement

L'ordre un du tenseur énergie-impulsion d'un fluide s'écrit de manière générale comme

$$\delta T_{\nu}^{\mu} = (\delta\rho + \delta p)u^{\mu}u_{\nu} + \delta p\delta_{\nu}^{\mu} + 2(\bar{\rho} + \bar{p})u^{\mu}\delta u_{\nu} + a^2\bar{p}\hat{\pi}_{\nu}^{\mu}, \quad (\text{A.12})$$

où $\delta\rho$, δp , δu^{μ} et $\hat{\pi}_{\nu}^{\mu}$ sont respectivement les perturbations absolues de la densité, de la pression et de la quadri-vitesse du fluide ainsi que le tenseur de pression anisotrope –relative. Ces quantités décrivent les 10 composantes du tenseur énergie-impulsion (le tenseur de pression anisotrope en compte dès lors 5 indépendantes). On notera aussi la perturbation relative de densité par $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$.

Le fluide est dit *générique* dans le sens où l'équation d'état qui le caractérise est quelconque et admet des variations temporelles, éventuellement des sources

³En supposant que seules les perturbations scalaires emplissent cet univers. Dans le cas général où les perturbations scalaires coexistent avec des perturbations vectorielles et tensorielles, des 10 degrés de liberté de la métrique ne subsisteront que 6 quantités indépendantes et invariantes de jauge.

non-adiabatiques de pression et de pression anisotrope existent et que finalement une interaction extérieure puisse altérer sa chute libre. Un fluide *parfait* est quant à lui défini, à l'ordre un, uniquement à l'aide des perturbations de densité d'énergie et des quantités homogènes.

On décompose la perturbation de pression δp en une contribution adiabatique, $c_A^2 \delta \rho$, à laquelle s'ajoute une contribution entropique résiduelle $\bar{p} \Gamma$. On a défini à cet effet la célérité acoustique adiabatique c_A par

$$c_A^2 = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'}, \quad (\text{A.13})$$

quantité homogène d'ordre zéro, par opposition à la célérité acoustique c_s , fonction du rapport entre la perturbation de la pression totale δp et la perturbation de densité du fluide en question, soit

$$c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho}, \quad (\text{A.14})$$

quantité d'ordre zéro mais dépendant des coordonnées de l'espace-temps. La perturbation de pression non-adiabatique s'exprime ainsi comme

$$\Gamma = \frac{1}{\bar{p}} (\delta p - c_A^2 \delta \rho). \quad (\text{A.15})$$

Notons que Γ est une perturbation relative. Dans les équations du mouvement la pression totale sera éliminée au profit des perturbations de densité et de pression entropique.

La quadri-vitesse vérifie encore $(\bar{u}^\mu + \delta u^\mu)(\bar{u}_\nu + \delta u_\nu) = -1$. Seules les perturbations scalaires étant prises en compte, la composante spatiale de la quadri-vitesse se formule dès lors par un gradient $\delta u^\mu = a^{-1}(-A, v^i)$, où v est le potentiel de vitesse et plus directement appelée vitesse.

La décomposition (A.12) nous permet d'annuler la trace du tenseur de pression anisotrope $\hat{\pi}_\mu^\mu$ et de le choisir orthogonal à la quadri-vitesse, soit $\hat{\pi}_\mu^\mu = 0$ et $u^\nu \hat{\pi}_\nu^\mu = 0$. On désigne par π la contribution scalaire au tenseur de pression anisotrope, qui devient ainsi

$$\hat{\pi}_j^i = \pi_{,j}^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \pi_{,k}^k, \quad (\text{A.16})$$

les composantes mixtes $\hat{\pi}_0^i$ étant nulles.

Après avoir défini la métrique et détaillé les perturbations d'un fluide générique, écrivons les équations du mouvement de ce fluide dans les potentiels

gravitationnels (A.7). En plus du couplage minimal à la gravité, on supposera que le fluide est soumis à une interaction extérieure. La divergence du tenseur énergie-impulsion s'écrit avec un terme source Q_ν

$$T^\mu_{\nu|\mu} = Q_\nu. \quad (\text{A.17})$$

Au niveau homogène, les lois de conservation des différents fluides cosmologiques sont supposées préservées. Cette source n'est présente qu'au niveau des perturbations,

$$Q_\nu \equiv \bar{\rho}(\tau) (\vartheta; (1+w)\Xi_{,i}). \quad (\text{A.18})$$

Plus loin dans le texte, elle représentera l'échange d'impulsion entre les particules des fluides de photons et d'électrons par diffusion Compton ou bien elle exprimera une violation du principe d'équivalence.

Les équations du mouvement se séparent en deux groupes. Tout d'abord, l'équation de continuité, projection de la divergence du tenseur énergie-impulsion sur la quadri-vitesse

$$u^\nu T^\mu_{\nu|\mu} = u^\mu Q_\mu. \quad (\text{A.19})$$

Ensuite, l'équation d'Euler ou, le cas échéant, équation de conservation de l'impulsion

$$T^\nu_{i|\nu} - u_i u^\nu T^\mu_{\nu|\mu} = Q_i - u_i u^\mu Q_\mu. \quad (\text{A.20})$$

Des définitions (A.7) et (A.12), la transformée de Fourier de ces équations devient dans la jauge de Newton

$$\delta' = 3\mathcal{H}(w - c_A^2)\delta + (1+w)(k^2 v + 3\Psi') - 3\mathcal{H}w\Gamma - \vartheta, \quad (\text{A.21a})$$

$$v' = -\mathcal{H}(1 - 3c_A^2)v - \frac{c_A^2}{1+w}\delta - \Phi + \frac{w}{1+w}\left(\frac{2}{3}k^2\pi - \Gamma\right) + \Xi. \quad (\text{A.21b})$$

Les équations (A.21) décrivent donc la dynamique d'un fluide générique dans un espace-temps perturbé en expansion.

A l'instar de l'équation d'état et de la célérité acoustique adiabatique, les pressions non-adiabatique et anisotrope ainsi que les termes d'interaction reflètent les propriétés des champs fondamentaux que décrit le fluide effectif. L'expression de ces quantités dépend de la nature des champs fondamentaux et n'est pas directement déterminée par les équations (A.17).

Passons à nouveau en revue les différences espèces de matière et écrivons ensuite leurs équations du mouvement.

A.3.1 Photons

Le fluide de photons est vu comme un gaz de bosons en interaction avec le gaz d'électrons libres. Aux températures concernées, $T \ll 1$ MeV, les électrons sont non-relativistes, l'interaction Compton est dès lors prise dans la limite de Thomson. La diffusion élastique des photons par les électrons préserve la distribution des impulsions de Bose-Einstein f_{BE} des photons. La propagation des photons transforme les inhomogénéités de la température de ce gaz en anisotropies. On écrit ainsi la distribution des photons f_γ comme

$$f_\gamma(\vec{x}, \vec{p}, \tau) = f_{\text{BE}}[p, T(\vec{x}, \hat{p}, \tau)], \quad (\text{A.22})$$

avec $T(\vec{x}, \hat{p}, \tau) = \bar{T}(\tau)[1 + \Theta(\vec{x}, \hat{p}, \tau)]$ la température mesurée au point \vec{x} et observée dans la direction \hat{p} , Θ étant la perturbation relative de la température. L'équation de conservation est donnée par l'équation de Boltzmann avec un terme de collision $C[f_\gamma]$ dû à l'effet Thomson

$$\frac{df_\gamma}{d\tau} = C[f_\gamma]. \quad (\text{A.23})$$

On peut réécrire la transformée de Fourier des perturbations de température $\Theta(\vec{k}, \hat{p}, \tau)$ en fonction de l'orientation \hat{k} du vecteur \vec{k} et de l'angle séparant \hat{k} et \hat{p} issu du produit scalaire euclidien $\mu \equiv \hat{k} \cdot \hat{p}$, soit $\Theta(\hat{k}, k, \mu, \tau)$. Grâce à l'isotropie statistique la dépendance en \hat{k} est éliminée. Enfin, développons la distribution de température $\Theta(k, \mu, \tau)$ en moments multipolaires sur base des polynômes orthogonaux de Legendre $\mathcal{P}_l(\mu)$

$$\Theta_l(k, \tau) = \frac{i^l}{2} \int_{-1}^1 d\mu \Theta(k, \mu, \tau) \mathcal{P}_l(\mu), \quad l \geq 0 \quad (\text{A.24a})$$

$$\Theta(k, \mu, \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Theta_l(k, \tau) \mathcal{P}_l(\mu). \quad (\text{A.24b})$$

Avec une telle normalisation, $\Theta_0(\vec{x}, \tau)$, la transformée inverse de $\Theta_0(k, \tau)$, s'identifie au monopole de la distribution angulaire des perturbations de température évaluée au point \vec{x} .

Le terme d'interaction $C[f_\gamma]$ dépend de l'opacité différentielle $\dot{\mathcal{T}}$, c'est-à-dire taux d'interaction des photons avec les baryons par unité de longueur de pro-

pagation. Sans détailler la dérivation de ce terme, on retiendra qu'il est obtenu dans la limite non-relativiste de Thompson et que la polarisation du rayonnement a été ignorée sans toutefois négliger la dépendance angulaire de la diffusion. A partir de l'opacité différentielle $\dot{\mathcal{T}}$, on obtient la profondeur optique \mathcal{T} du plasma

$$\mathcal{T}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} \dot{\mathcal{T}}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, \quad (\text{A.25})$$

dès lors $\mathcal{T}' = -\dot{\mathcal{T}}$, par définition. On en déduit la fonction de visibilité $g(\tau)$, soit la probabilité qu'un photon observé aujourd'hui a dernièrement interagi à l'instant τ ,

$$g(\tau) = \dot{\mathcal{T}} e^{-\mathcal{T}}. \quad (\text{A.26})$$

Sous l'ensemble des hypothèses énoncées ci-dessus l'équation de Boltzmann (A.23) devient pour les perturbations de température [135]

$$\Theta' + ik\mu\Theta = \Psi' - ik\mu\Phi + \dot{\mathcal{T}} \left[\Theta_0 - \Theta + ik\mu v_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Theta_2 \right], \quad (\text{A.27})$$

avec v_b la vitesse des baryons.

Par projection sur chacun des polynômes de Legendre, cette équation est alors convertie en une hiérarchie d'équations pour les différents multipôles Θ_l

$$\Theta'_0 = -\frac{k}{3}\Theta_1 + \Psi', \quad (\text{A.28a})$$

$$\Theta'_1 = k \left(\Theta_0 - \frac{2}{5}\Theta_2 + \Phi \right) - \dot{\mathcal{T}}(kv_b + \Theta_1), \quad (\text{A.28b})$$

$$\Theta'_2 = k \left(\frac{2}{3}\Theta_1 - \frac{3}{7}\Theta_3 \right) - \frac{9}{10}\dot{\mathcal{T}}\Theta_2, \quad (\text{A.28c})$$

$$\Theta'_l = k \left(\frac{l}{2l-1}\Theta_{l-1} - \frac{l+1}{2l+3}\Theta_{l+1} \right) - \dot{\mathcal{T}}\Theta_l, \quad l \geq 3. \quad (\text{A.28d})$$

Les équations pour les deux premiers multipôles s'identifient aux équations (A.21) de continuité et d'Euler, avec

$$w_\gamma = \frac{1}{3}, \quad \delta_\gamma = 4\Theta_0, \quad \Gamma_\gamma = 0, \quad \vartheta_\gamma = 0, \quad (\text{A.29a})$$

$$c_{A\gamma}^2 = w_\gamma, \quad v_\gamma = -\frac{\Theta_1}{k}, \quad \pi_\gamma = \frac{12}{5k^2}\Theta_2, \quad \Xi_\gamma = -\dot{\mathcal{T}}(v_\gamma - v_b). \quad (\text{A.29b})$$

Les équations (A.28c) et (A.28d) complètent ainsi les équations du mouvement (A.21).

A.3.2 Neutrinos

La dynamique des perturbation du fluide de neutrinos (et d'antineutrinos) est elle aussi dérivée de l'équation de Boltzmann. Aux échelles d'énergie d'intérêt ($T \ll 1\text{MeV}$), les neutrinos sont découplés des électrons. Par ailleurs, sous l'hypothèse du principe d'équivalence d'Einstein, la chute libre des neutrinos dans les potentiels gravitationnels conserve leur fonction de distribution de Fermi-Dirac, à un redimensionnement près de la température du gaz de neutrinos T_ν . Comme pour les photons, l'évolution de la fonction de distribution est alors étudiée au travers des perturbations de température $T_\nu(\tau, \vec{x}, \hat{p}) = \bar{T}_\nu(\tau)[1 + N_\nu(\tau, \vec{x}, \hat{p})]$. Les anisotropies des perturbations de température sont aussi développées en multipôles $N_{\nu l}$ à la manière de (A.24). Bien que le lien entre température T_ν et la densité d'énergie ρ_ν est affecté par le blocage de Pauli, le lien entre $N_{\nu 0}$ et les perturbations relatives de la densité d'énergie δ_ν est quant à lui identique à celui obtenu pour les photons. L'équation de Boltzmann pour les perturbations du fluide de neutrinos est la réécriture de l'équation (A.30) des photons pour N_ν sans le terme de couplage Thomson avec les électrons

$$N'_\nu + ik_\mu N_\nu = \Psi' - ik_\mu \Phi. \quad (\text{A.30})$$

Cette équation, par projection sur les polynômes de Legendre, se développe elle aussi en une hiérarchie semblable à (A.28) et le fluide de neutrinos jouit des mêmes propriétés que le fluide de photons, équation (A.29), avec toutefois $\Xi_\nu = 0$.

Soulignons que les neutrinos sont ici considérés relativistes tout au long de l'expansion cosmique. Malgré, d'après les mesures des différences de masses des neutrinos de différentes familles, qu'au plus une des trois familles est encore aujourd'hui relativiste, nous supposons que la transition s'est opérée dans l'ère de matière, quand les neutrinos ne contribuent déjà plus de manière significative à l'évolution des potentiels gravitationnels et à l'expansion de l'Univers.

A.3.3 Baryons

Le fluide de baryons est essentiellement constitué d'un mélange électriquement neutre d'atomes d'hydrogène et d'hélium ionisés ou neutres ainsi que d'elec-

trons non-relativistes statistiquement non-dégénérés. Les équations du mouvement (A.21) s'écrivent avec

$$w_b = 0, \quad \Gamma_b = 0, \quad \vartheta_b = 0, \quad (\text{A.31a})$$

$$c_{Ab}^2 = 0, \quad \pi_b = 0, \quad \Xi_b = \frac{4}{3} \frac{\dot{\mathcal{I}}}{\mathcal{R}} (v_\gamma - v_b), \quad (\text{A.31b})$$

avec

$$\mathcal{R} \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}. \quad (\text{A.32})$$

Le terme d'entraînement Ξ_b s'obtient par la conservation du tenseur énergie impulsion du système photons+baryons, les sources (A.18) satisfont $Q_\gamma^\mu + Q_b^\mu = 0$.

A.3.4 Matière sombre

Sans processus interne au fluide de matière sombre et sans interaction extérieure autre que gravitationnelle, les équations du mouvement (A.21) de la matière sombre froide se simplifient avec

$$w_c = 0, \quad \Gamma_c = 0, \quad \vartheta_c = 0, \quad (\text{A.33a})$$

$$c_{Ac}^2 = 0, \quad \pi_c = 0, \quad \Xi_c = 0. \quad (\text{A.33b})$$

A.3.5 Métrique

Les équations du mouvement (A.21) des champs de matière font intervenir des fonctions et perturbations extérieures. Celles-ci dépendent des propriétés des champs de matière en question (w , c_A^2 , Γ et π) mais aussi des potentiels gravitationnels dans lesquels elles se meuvent (Φ et Ψ). Ces potentiels sont déterminés par les équations d'Einstein (1.19) linéarisées pour les perturbations scalaires, en particulier les combinaisons suivantes (sans somme sur les indices répétés) : $\delta G_0^0 + 3\mathcal{H}^{-1} \int \delta G_i^0 dx^i$, $\int \delta G_j^i dx^i dx^j$ ($i \neq j$) et $\int \delta G_i^0 dx^i$ deviennent respectivement

$$k^2 \Psi = -\frac{1}{2} \kappa a^2 \rho_s [\delta_s - 3\mathcal{H}(1 + w_s)v_s], \quad (\text{A.34a})$$

$$\Psi - \Phi = \kappa a^2 \rho_s w_s \pi_s, \quad (\text{A.34b})$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = -\frac{1}{2} \kappa a^2 \rho_s (1 + w_s)v_s, \quad (\text{A.34c})$$

avec une somme sur les différentes espèces s de matière. La première équation est l'extension de l'équation de Poisson à un espace en expansion pour un fluide d'équation d'état arbitraire. La seconde n'a d'intérêt qu'en présence d'une source de pression anisotrope. La dernière est redondante aux deux précédentes et à toutes les équations du mouvement des champs de matière.

A.3.6 Résumé des équations du mouvement

Reprenons les propriétés de chaque composante de l'Univers et explicitons les équations du mouvement. Avec l'équation de Friedmann-Lemaître pour le taux d'expansion $\mathcal{H}(\tau)$, les équations de continuité au niveau homogène pour les quantités $\bar{\rho}_s(\tau)$ et l'évolution de la densité d'électrons libres n_e pour $\dot{\mathcal{T}}$, l'ensemble d'équations suivant permet de décrire l'évolution de l'Univers perturbé, pour les photons

$$\delta'_\gamma = \frac{4}{3}(k^2 v_\gamma + 3\Psi'), \quad (\text{A.35a})$$

$$v'_\gamma = -\frac{1}{4}\delta_\gamma - \Phi + \frac{1}{6}k^2\pi_\gamma - \dot{\mathcal{T}}(v_\gamma - v_b), \quad (\text{A.35b})$$

$$\pi'_\gamma = -\frac{8}{5}v_\gamma - \frac{36}{35}\frac{\Theta_3}{k} - \frac{9}{10}\dot{\mathcal{T}}\pi_\gamma, \quad (\text{A.35c})$$

$$\Theta'_l = k \left(\frac{l}{2l-1}\Theta_{l-1} - \frac{l+1}{2l+3}\Theta_{l+1} \right) - \dot{\mathcal{T}}\Theta_l, \quad l \geq 3, \quad (\text{A.35d})$$

les neutrinos

$$\delta'_\nu = \frac{4}{3}(k^2 v_\nu + 3\Psi'), \quad (\text{A.36a})$$

$$v'_\nu = -\frac{1}{4}\delta_\nu - \Phi + \frac{1}{6}k^2\pi_\nu, \quad (\text{A.36b})$$

$$N'_{\nu l} = k \left(\frac{l}{2l-1}N_{\nu l-1} - \frac{l+1}{2l+3}N_{\nu l+1} \right), \quad l \geq 2, \quad (\text{A.36c})$$

les baryons

$$\delta'_b = k^2 v_b + 3\Psi', \quad (\text{A.37a})$$

$$v'_b = -\mathcal{H}v_b - \Phi + \frac{\rho_\gamma}{\rho_b}\dot{\mathcal{T}}(v_\gamma - v_b), \quad (\text{A.37b})$$

et la matière sombre froide

$$\delta'_c = k^2 v_c + 3\Psi', \quad (\text{A.38a})$$

$$v'_c = -\mathcal{H}v_c - \Phi. \quad (\text{A.38b})$$

Dans la jauge synchrone, les équations générales (A.21) s'écrivent⁴

$$\delta' = 3\mathcal{H}(w - c_A^2)\delta + (1 + w)(k^2v + 3C' - k^2E') - 3\mathcal{H}w\Gamma - \vartheta, \quad (\text{A.40a})$$

$$v' = -\mathcal{H}(1 - 3c_A^2)v - \frac{c_A^2}{1 + w}\delta + \frac{w}{1 + w}\left(\frac{2}{3}k^2\pi - \Gamma\right) + \Xi. \quad (\text{A.40b})$$

On note, en raison du choix du référentiel, la disparition des potentiels gravitationnels de l'équation d'Euler. Si bien que l'équation des vitesses de la matière sombre se simplifie en $v'_c = -\mathcal{H}v_c$. Les conditions (A.11) ne fixent pas complètement la jauge. En effet, en un point de l'espace l'accélération d'un tel repère est celle d'une particule test en chute libre, la vitesse est quant à elle laissée libre. On complète alors la description de la jauge en imposant que, localement et à un instant initial, la vitesse du repère égale celle de la matière sombre. La matière sombre étant aussi en chute libre, leurs vitesses resteront identiques par la suite : dans ce référentiel, $v_c = 0$ est une solution de l'équation d'Euler.

Enfin, les équations d'Einstein deviennent dans cette jauge

$$k^2(C - \mathcal{H}E') = -\frac{1}{2}\kappa a^2\rho_s[\delta_s - 3\mathcal{H}(1 + w_s)v_s], \quad (\text{A.41a})$$

$$E'' + 2\mathcal{H}E' - C = \kappa a^2w_s\rho_s\pi_s \quad (\text{A.41b})$$

$$C' = -\frac{1}{2}\kappa a^2\rho_s(1 + w_s)v_s, \quad (\text{A.41c})$$

A.3.7 Fluide total

Le fluide total, mélange des fluides des différentes espèces présentes, est caractérisé par

$$\bar{\rho} = \sum_s \bar{\rho}_s, \quad w = \frac{\sum_s w_s \bar{\rho}_s}{\bar{\rho}}, \quad c_A^2 = \frac{\sum_s (1 + w_s) c_{As}^2 \bar{\rho}_s}{(1 + w) \bar{\rho}}, \quad (\text{A.42a})$$

$$\delta = \frac{\sum_s \bar{\rho}_s \delta_s}{\bar{\rho}}, \quad v = \frac{\sum_s \bar{\rho}_s v_s}{\bar{\rho}}, \quad \pi = \frac{\sum_s w_s \bar{\rho}_s \pi_s}{w \bar{\rho}}. \quad (\text{A.42b})$$

Le fluide total est constitué de fluides dont les célérités acoustiques sont différentes, la pression développe dès lors un mode non-adiabatique de mélange,

⁴Sous le changement de jauge (A.8), la perturbation de densité et la vitesse deviennent

$$\delta \rightarrow \delta - 3\mathcal{H}(1 + w)T, \quad (\text{A.39a})$$

$$v \rightarrow v - L'. \quad (\text{A.39b})$$

donné par le second terme de l'expression de la pression totale⁵

$$\Gamma = \Gamma^{\text{int}} + \frac{1}{2} \frac{1}{w(1+w)\bar{\rho}^2} \sum_{s,t} \bar{\rho}_s \bar{\rho}_t (1+w_s)(1+w_t)(c_{A_s}^2 - c_{A_t}^2) S_{st}, \quad (\text{A.43})$$

où Γ^{int} est la moyenne des pressions non-adiabatiques intrinsèques Γ_s des fluides constituants, valeur nulle pour les champs de matière rencontrés jusqu'ici ; la perturbation d'entropie S_{st} du mélange est définie par

$$S_{st} \equiv \frac{\delta_s}{1+w_s} - \frac{\delta_t}{1+w_t}. \quad (\text{A.44})$$

On en dérive une équation d'évolution à partir des équations de continuité individuelles

$$S'_{st} = k^2(v_s - v_t) - 3\mathcal{H} \left[\frac{w_s}{1+w_s} \Gamma_s - \frac{w_t}{1+w_t} \Gamma_t \right] - \frac{\vartheta_s}{1+w_s} + \frac{\vartheta_t}{1+w_t}. \quad (\text{A.45})$$

La dynamique des perturbations d'entropie est guidée par les différences des vitesses et aussi des pressions non-adiabatiques entre les deux fluides.

C'est au travers des perturbations (A.42b) du fluide total que s'exprime l'évolution des potentiels gravitationnels (A.34). Les équations (A.21) pour les perturbations du fluide total, δ et v , font cependant intervenir les perturbations des différentes espèces par le biais de l'entropie de mélange, équations (A.43) et (A.44). Plutôt que de résoudre individuellement les équations pour chaque espèce, on préférera d'abord reformuler ces équations en fonction des perturbations d'entropie de mélange (A.44). L'ensemble des équations du mouvement des différentes espèces est ainsi traduit en un système d'équations pour les perturbations δ et v du fluide total (A.21) et pour les entropies de mélange. Avec \mathcal{N}_{esp} espèces en jeu, on a une équation du second ordre pour les perturbations de densité de fluide totale δ et $\mathcal{N}_{\text{esp}} - 1$ équations indépendantes du second ordre pour les perturbations d'entropie S_{st} , auxquelles s'ajoutent les équations pour Γ^{int} et π . Ces équations sont autonomes dans les quantités fluide perturbées, les potentiels gravitationnels ayant été éliminés.

Dans un espace spatialement plat et pour les modes de type super-expansion, $k/\mathcal{H} \ll 1$, la quantité

$$\zeta \equiv \Psi + \frac{2}{3\mathcal{H}} \frac{\Psi' + \mathcal{H}\Phi}{1+w}, \quad (\text{A.46})$$

⁵Au mieux, a-t-on supposé l'existence d'un couplage entre les espèces au niveau des perturbations, du type (A.18), mais pas au niveau homogène.

présente l'avantage d'être une intégrale première des équations du mouvement, $\zeta' = 0$, en absence de perturbations d'entropie.

A.4 Conditions initiales

On suppose qu'à très haut redshift un processus a généré les perturbations des champs de matière et de la métrique. Sans toutefois préciser un processus particulier, isolons ici les caractéristiques nécessaires à une description réussie de l'Univers perturbé. Aux époques qui nous intéressent, ce processus a cessé de produire les perturbations, la source n'existe plus. Si bien que l'amplitude *initiale* des perturbations est suffisante pour que la théorie linéaire, équations (A.34-A.38), prédise l'amplitude adéquate des fluctuations du CMB et des autres champs de matière. Par moment *initial*, on entend qu'à cet instant tous les modes d'intérêt cosmologique sont encore dans le régime de type super-expansion, $k/\mathcal{H} \ll 1$. On étudie donc dans cette section le comportement des perturbations aux grandes échelles et après que ce processus se soit arrêté.

On dénombre autant de modes qu'il y a d'équations du mouvement (A.34-A.38). Pour \mathcal{N}_{esp} espèces, décrites chacune par des fluides parfaits, on en compte $2\mathcal{N}_{\text{esp}}$. Si les fluides associés possèdent une contribution non-adiabatique intrinsèque de pression ou une pression anisotrope alors le nombre de degrés de libertés dépend du modèle fondamental sous-jacent à ces fluides imparfaits. Cependant, la hiérarchie d'équations parfois nécessaire à la description fluide d'une espèce peut être tronquée, ramenant à un nombre fini le nombre de modes initiaux associés à cette espèce. Par exemple, en montant dans les hiérarchies des radiations (A.35d) et (A.36c), un multipôle est supprimé d'un facteur $k\tau$ par rapport à celui qui le précède. L'hypothèse du couplage fort entre les photons et les baryons isotropise le fluide des photons le rendant parfait. Du côté des neutrinos, c'est l'irrégularité en $a \rightarrow 0$ du mode initial de pression anisotrope qui empêche les multipôles $N_{\nu l \geq 2}$ d'introduire des modes supplémentaires [136].

Sur ces considérations, reprenons l'image du fluide total, constitué de fluides parfaits. On sépare les modes initiaux en deux types de contributions. La première contient deux modes provenant de l'équation du second ordre pour δ , les perturbations d'entropie sont prises égales à zéro initialement.

La seconde introduit $2(\mathcal{N}_{\text{esp}} - 1)$ modes pour les $\mathcal{N}_{\text{esp}} - 1$ perturbations d'entropie indépendantes. On peut montrer qu'un des deux modes d'entropie de matière sombre est irrégulier et décroissant. Dès lors pour un mélange de photons-baryons, matière sombre et neutrinos, il reste trois modes initiaux.

Tout d'abord, on compte deux modes d'isocourbure pour lesquels les perturbations des espèces se contrebalancent deux-à-deux pour réduire ou annuler les potentiels gravitationnels : il s'agit du mode d'isocourbure croissante de la matière sombre et du mode d'isocourbure de la vitesse des neutrinos. Le dernier mode est appelé condition initiale d'entropie constante des neutrinos.

Jusqu'à présent, les modes d'entropie n'ont pas encore été détectés. Nous supposons que seuls les modes adiabatiques sont excités initialement.

A.5 Evolution des perturbations

A partir de conditions initiales adiabatiques, résolvons dans quelques cas limites les équations du mouvement pour les différents fluides afin de prédire l'évolution des potentiels gravitationnels et des perturbations de matière. En raison du couplage fort entre photons et baryons qui règne initialement, nous négligerons la pression anisotrope des photons. De la même manière, les neutrinos sont vus en première approximation comme un fluide parfait, sans pression anisotrope. Les équations d'évolution des photons et des neutrinos sont ainsi identiques, le fluide combinant ces deux espèces ne développe pas d'entropie de mélange. L'évolution initiale des perturbations en présence de pression anisotrope est reportée au chapitre 2.

Pour des conditions initiales adiabatiques on a par définition la relation suivante entre les perturbations du fluide total et celle des différents fluides

$$\frac{\delta}{1+w} = \frac{\delta_s}{1+w_s}. \quad (\text{A.47})$$

A.5.1 Ère de radiation

Profondément dans l'ère de radiation, $\mathcal{H} = \tau^{-1}$, et lorsque les perturbations de radiation constituent la contribution dominante au fluide total, les équations d'Einstein (A.34a) et (A.34c) deviennent

$$\Psi'' = -\frac{4}{\tau}\Psi' - \frac{k^2}{3}\Psi, \quad (\text{A.48a})$$

$$\delta = -2\Psi \left(1 + \frac{k^2\tau^2}{3}\right) - 2\tau\Psi', \quad (\text{A.48b})$$

$$kv = -\frac{1}{2}k\tau(\Psi + \tau\Psi'). \quad (\text{A.48c})$$

En dérivant l'équation de Poisson on obtient la première équation, dont la solution dépend de la fonction de Bessel sphérique d'ordre 1 (en abandonnant la seconde solution, irrégulière quand $k\tau \rightarrow 0$),

$$\Psi(\tau) = 3\Psi_p \frac{\sin\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) - \frac{k\tau}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right)^3}, \quad (\text{A.49})$$

où Ψ_p est une constante, la valeur initiale du potentiel.

Pour les modes de type super-expansion, $k\tau \ll 1$, aux ordres suivants en $k\tau$, le potentiel prend la forme

$$\Psi = \Psi_p \left(1 + \frac{k^2\tau^2}{30}\right), \quad k\tau \ll 1 \quad (\text{A.50a})$$

$$\delta = -2\Psi_p \left(1 + \frac{7k^2\tau^2}{30}\right), \quad (\text{A.50b})$$

$$kv = -\Psi_p \frac{k\tau}{2} \left(1 - \frac{k^2\tau^2}{10}\right). \quad (\text{A.50c})$$

On se contentera de l'ordre le plus bas et on retiendra que dans l'ère de radiation et aux grandes échelles tant les potentiels que les perturbations de densité du fluide total et de chacune des espèces sont gelés à leurs valeurs initiales

$$\Psi(\tau \ll \tau_{\text{eg}}) = \Psi_p, \quad k\tau \ll 1 \quad (\text{A.51a})$$

$$\delta(\tau \ll \tau_{\text{eg}}) = \delta_\gamma = \delta_\nu = -2\Psi_p, \quad (\text{A.51b})$$

$$\delta_c(\tau \ll \tau_{\text{eg}}) = -\frac{3}{2}\Psi_p. \quad (\text{A.51c})$$

D'après la solution (A.49), à plus petites échelle dans le régime de type sub-expansion, les perturbations de densité (A.48b) du fluide de radiation oscillent avec une amplitude constante. La pression du fluide de radiation résiste à l'effondrement gravitationnel provoquant le régime d'oscillations acoustiques. A leur tour les potentiels oscillent mais avec une amplitude décroissante en $(k\tau)^{-2}$, les oscillations acoustiques d'amplitude constante ne pouvant soutenir les potentiels dans un espace en expansion. L'évolution des perturbations de matière sombre s'obtient en intégrant les équations (A.38) : d'après [137], le contraste de densité de la matière sombre développe un mode de croissance

logarithmique. On retiendra que

$$\Psi(\tau \ll \tau_{\text{eg}}) = -9 \frac{\Psi_p}{k^2 \tau^2}, \quad k\tau \gg 1 \quad (\text{A.52a})$$

$$\delta(\tau \ll \tau_{\text{eg}}) = 6\Psi_p \cos\left(\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right), \quad (\text{A.52b})$$

$$\delta_c(\tau \ll \tau_{\text{eg}}) = \Psi_p(\alpha + \beta \ln k\tau), \quad (\text{A.52c})$$

les valeurs des coefficients $\alpha \simeq -7.9$ et $\beta \simeq 9.6$ sont obtenues en suivant l'évolution temporelle des potentiels lors du changement de régime.

Jusqu'ici les perturbations absolues de la matière sombre $\bar{\rho}_c \delta_c$ ont été supposées négligeables face aux perturbations absolues des radiations. En raison de la croissance de δ_c , même dans l'ère de radiation, le contraste de matière sombre des modes de type sub-expansion va dominer les perturbations de la radiation qui oscillent avec une amplitude constante. Les modes dont les perturbations de matière sombre dominant déjà, entament alors une croissance linéaire dans le facteur d'échelle et traversent ainsi la transition radiation-matière, c'est l'effet Mészáros. La décroissance des potentiels (A.52a) est alors arrêtée pour ces modes.

A.5.2 Ère de matière

Tard dans l'ère de matière, les baryons, maintenant découplés des photons, fluide sans pression comme la matière sombre, sont incorporés au fluide de matière, dont le contraste de densité est donné par δ_m (et aussi par δ pour le fluide total complètement dominé par la matière). Les équations d'Einstein s'écrivent

$$\Psi'' = -\frac{6}{\tau} \Psi', \quad (\text{A.53a})$$

$$\delta = -2\Psi \left(1 + \frac{k^2 \tau^2}{12}\right) - \tau \Psi', \quad (\text{A.53b})$$

$$kv = -\frac{1}{3} k\tau \left(\Psi + \frac{\tau \Psi'}{2}\right). \quad (\text{A.53c})$$

L'expression $\Psi = \Psi_{\text{mat}} + \Psi_- \tau^{-5}$ satisfait l'équation différentielle du potentiel gravitationnel, solution valable à toutes les échelles et donc à tous les ordres en $k\tau$. En abandonnant le mode décroissant, négligeable tardivement, le potentiel reste constant dans l'ère de matière, les quantités fluides dérivent de cette

solution

$$\Psi(\tau \gg \tau_{\text{eg}}) = \Psi_{\text{mat}}, \quad (\text{A.54a})$$

$$\delta(\tau \gg \tau_{\text{eg}}) = -2\Psi_{\text{mat}} \left(1 + \frac{k^2 \tau^2}{12} \right), \quad (\text{A.54b})$$

$$kv(\tau \gg \tau_{\text{eg}}) = -\frac{k\tau}{3}\Psi_{\text{mat}}. \quad (\text{A.54c})$$

A nouveau, pour les grandes échelles, $k\tau \ll 1$, la vitesse reste petite devant le contraste de densité. Ce dernier se maintient, quant à lui, constant dans le régime de type super-expansion.

Relions le potentiel dans l'ère de matière Ψ_{mat} à la valeur du potentiel dans l'ère de radiation Ψ_p aux grandes échelles. A cet effet, remarquons que dans ce régime et pour une condition initiale adiabatique ($S_{st} = 0$ en $k\tau = 0$), l'équation d'évolution (A.45) montre que les perturbations d'entropie S_{st} restent d'ordre supérieur par rapport aux différentes perturbations δ_s . Par conséquent, aux grandes échelles, le fluide total traverse la transition radiation-matière sans développer d'entropie de mélange significative : la relation adiabatique (A.47) est conservée. Dans ces conditions, la perturbation de courbure ζ , équation (A.46), est identique à toutes les époques. Dans l'ère de radiation, cette valeur s'exprime par $\zeta = \frac{3}{2}\Psi_p$ alors que dans l'ère dominée par la matière on a $\zeta = \frac{5}{3}\Psi_{\text{mat}}$, si bien que finalement

$$\Psi_{\text{mat}} = \frac{9}{10}\Psi_p. \quad (\text{A.55})$$

D'après l'équation (A.53a), cette solution est valide pour tous les modes qui traversent la transition dans le régime de type super-expansion, peu importe qu'ils restent dans ce régime après la transition. Une fois dans le régime de type sub-expansion, la croissance des perturbations démarre et $\delta_m \propto a$.

Pour les modes déjà de type sub-expansion avant la transition, le contraste de densité croît comme dans l'ère de matière. La solution pour δ_m et la valeur de Ψ_{mat} à ces échelles sont alors à raccorder avec celles de Mészáros.

A.5.3 Jauge synchrone

Comme nous le verrons lors de l'évaluation du spectre de matière, il est commode de suivre l'évolution des perturbations dans la jauge synchrone plutôt que dans celle de Newton. Le contraste de densité de la matière est obtenu à partir de son expression dans la jauge de Newton et de la relation (A.39). A

cet effet, il nous faut établir complètement le passage de la jauge de Newton à la jauge synchrone. Les paramètres T et L de la transformation de jauge sont obtenus grâce à (A.8)

$$T = -\frac{1}{a} \int \frac{\Phi}{\mathcal{H}} da + \frac{C_T}{a}, \quad (\text{A.56a})$$

$$L' = T. \quad (\text{A.56b})$$

Le choix de la constante C_T fixe complètement la jauge. Par ailleurs, on a aussi que $E' = L'$. Les solutions aux équations d'Euler (A.40) et (A.38) pour ces dernières sont

$$v_c^S = \frac{v_{c0}^S}{a}, \quad (\text{A.57a})$$

$$v_c^N = -\frac{1}{a} \int \frac{\Phi}{\mathcal{H}} da. \quad (\text{A.57b})$$

La constante d'intégration dans cette dernière relation est annulée puisque initialement $v_c^N = 0$, équation (A.50c). Etant donnée la relation entre les vitesses de la matière sombre dans les deux jauges $v_c^S = v_c^N - T$, synchroniser la jauge à la matière sombre froide ($v_c^S = 0$ à tout instant) revient à fixer la jauge avec $C_T = 0$.

La relation entre les densités dans les deux jauges s'écrit de manière univoque : $\delta^S = \delta^N + \frac{3}{2}(1+w)\Phi$. Soit dans l'ère de radiation pour les modes de type super-expansion et dans l'ère de matière pour tous les modes, respectivement,

$$\delta_m^S = -\frac{7}{20}k^2\tau^2\Psi_p \quad k\tau \ll 1, \quad \tau \ll \tau_{\text{eg}}, \quad (\text{A.58a})$$

$$\delta_m^S = -\frac{1}{6}k^2\tau^2\Psi_{\text{mat}} \quad \tau \gg \tau_{\text{eg}}. \quad (\text{A.58b})$$

Des relations analogues sont obtenues pour les perturbations des radiations puisqu'à ces échelles la perturbation d'entropie reste négligeable.

A.5.4 Fonction de croissance

Sous l'hypothèse que les perturbations absolues de la densité la matière dominante celles des autres espèces, on peut dériver une équation du second ordre ne faisant intervenir que les fluctuations de la matière. Dans la jauge synchrone, cette équation est indépendante de k

$$\delta_m''^S + \mathcal{H}\delta_m'^S - \frac{3\Omega_m H_0^2}{2a}\delta_m^S = 0. \quad (\text{A.59})$$

Dans le régime linéaire et pour autant que la pression de la matière soit négligeable, cette équation est valide tant pour les modes de type sub-expansion que super-expansion profondément dans l'ère de matière et dans une ère dominée par la constante cosmologique.

Le problème de l'évaluation du spectre de la matière à bas redshift se divise donc en deux parties. Tout d'abord, il s'agit de calculer pour chaque échelle d'intérêt les perturbations de matière à la sortie de l'ère de radiation (lorsque les perturbations absolues de la densité de matière dominant toutes les autres espèces). Ensuite, propager ces valeurs jusqu'à bas redshift grâce à l'unique équation (A.59). On sépare dès lors les perturbations de matière en

$$\delta_m(k, \tau) = T(k)D_+(\tau). \quad (\text{A.60})$$

Selon les conventions, on normalise la fonction de croissance $D_+(\tau)$ de telle sorte que $T(k \rightarrow 0) = 1$, ou alors on normalise la fonction de transfert $T(k)$ pour que $D_+(\tau = \tau_0) = 1$ voire même $D_+(\tau) = \sigma_8(\tau)$.

A.6 Observables

A.6.1 Spectre de puissance de la matière

A l'aide des résultats précédents, dérivons la forme du spectre de puissance de la matière, équation (A.5), pour les grandes, $k \ll k_{\text{eg}} \equiv \tau_{\text{eg}}^{-1}$, et les petites échelles, $k \gg k_{\text{eg}}$.

Dès l'entrée dans l'ère de matière, à toutes les échelles la croissance des perturbations de matière est guidée par $D_+(\tau)$, on a dès lors pour $\tau \gg \tau_{\text{eg}}$ que $\delta_m^S(\tau) = \delta_m^S(\tau_{\text{eg}})D_+(\tau)/D_+(\tau_{\text{eg}})$. Cherchons le lien entre $\delta_m^S(\tau_{\text{eg}})$ et les valeurs initiales aux différentes échelles. Pour les modes déjà de type sub-expansion dans l'ère de radiation, $k \gg k_{\text{eg}}$, le contraste de densité de la matière conserve sa valeur établie lors de son entrée dans le régime de type sub-expansion (on néglige la croissance logarithmique). Si bien qu'à l'aide de la solution dans l'ère de radiation (A.58a), on exprime les perturbations de matière à bas redshift à partir de leur valeurs initiales prises à un instant τ_i . A cet instant, tous les modes d'intérêts sont de type super-expansion, par conséquent

$$\delta_m^S(k, \tau \gg \tau_{\text{eg}}) \propto \frac{D_+(\tau)}{D_+(\tau_{\text{eg}})} \times \begin{cases} \delta_m(k, \tau_i) & k \ll k_{\text{eg}} \\ \delta_m(k, \tau_i) \frac{1}{k^2 \tau_{\text{eg}}^2} & k \gg k_{\text{eg}} \end{cases}. \quad (\text{A.61})$$

Etablissons initialement les perturbations avec une loi de puissance pour la quantité ζ , équation (A.46),

$$P_\zeta(\tau_i, k) = \frac{2\pi^2}{k^3} A_s \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s-1}, \quad (\text{A.62})$$

avec A_s l'amplitude des perturbations scalaires primordiales d'un mode pivot conventionnel k_0 et n_s l'indice spectral associé. Alors $\delta_m^S(k, \tau_i) \propto k^{n_s/2}$ et le spectre de matière (A.5) prend aujourd'hui la forme

$$P_m(k, \tau \gg \tau_{\text{eg}}) \propto D_+^2(\tau) \times \begin{cases} k^{n_s} & k \ll k_{\text{eg}} \\ k^{n_s-4} & k \gg k_{\text{eg}} \end{cases}. \quad (\text{A.63})$$

Une échelle est ainsi introduite dans le spectre. Ce dernier présente donc un maximum dont la position est approximativement donnée par

$$k_{\text{eg}} \simeq 0.0729 \text{ Mpc}/(\Omega_m h^2) \simeq (103 \text{ Mpc})^{-1}. \quad (\text{A.64})$$

Soulignons que le spectre est ici évalué dans la jauge synchrone. Son expression y est plus simple puisque les perturbations de matière évoluent comme $\delta_m^S \propto \tau^2$ tant pour les modes de type sub-expansion que super-expansion. Dans la jauge de Newton, il faut rajouter une condition à l'expression du spectre ci-dessus pour les modes de type super-expansion à l'instant τ , soit $k \ll \mathcal{H} \ll k_{\text{eg}}$. A ces très grandes échelles, en raison du mode constant de l'équation (A.53b), le spectre suit la loi k^{n_s-4} .

Un traitement plus complet ferait intervenir les oscillations acoustiques des baryons ($k \gtrsim k_*$) ainsi qu'à plus petite échelle les effets non-linéaires ($k \gtrsim 0.1h \text{ Mpc}^{-1}$) et de pression de la matière ordinaire.

A.6.2 Spectre de puissance angulaire du CMB

Dans l'hypothèse de fluctuations gaussiennes, la fonction de corrélation à deux points, $\mathcal{C}(\vec{x}, \hat{n}, \hat{n}', \tau)$, décrit complètement l'observation des anisotropies du fond diffus cosmologique. Pour un modèle d'univers statistiquement isotrope, cette corrélation ne dépend que de la séparation angulaire θ entre les deux directions d'observation \hat{n} et \hat{n}' . En cas d'homogénéité statistique, la corrélation angulaire ne dépend pas de la position d'observation \vec{x} , si bien qu'aujourd'hui elle s'écrit

$$\mathcal{C}(\theta) \equiv \langle \Theta^*(\vec{x}_0, \hat{n}, \tau_0) \Theta(\vec{x}_0, \hat{n}', \tau_0) \rangle, \quad (\text{A.65})$$

en omettant τ_0 . Le spectre angulaire des anisotropies de température du ciel est donné par les coefficients C_l de la décomposition en polynômes de Legendre de $\mathcal{C}(\theta)$

$$\mathcal{C}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos\theta). \quad (\text{A.66})$$

Après une projection des anisotropies de température $\Theta(\vec{x}_0, \hat{n}, \tau_0)$ sur la base des harmoniques sphériques $Y_{lm}(\hat{n})$

$$a_{lm}(\vec{x}_0, \tau_0) \equiv \int \Theta(\vec{x}_0, \hat{n}, \tau_0) Y_{lm}(\hat{n}) d\Omega_{\hat{n}}, \quad (\text{A.67a})$$

$$\Theta(\vec{x}_0, \hat{n}, \tau_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\vec{x}_0, \tau_0) Y_{lm}(\hat{n}), \quad (\text{A.67b})$$

en développant les polynômes de Legendre en harmoniques sphériques à l'aide du théorème d'addition et par orthonormalité des harmoniques sphériques, le spectre s'exprime alors comme la variance des coefficients a_{lm}

$$\delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l = \langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle. \quad (\text{A.68})$$

Au même titre que Θ , les coefficients a_{lm} sont des variables aléatoires. Au niveau observationnel, nous ne disposons que d'une seule réalisation de chaque variable aléatoire a_{lm} , soit a_{lm}^{obs} . On ne pourra donc pas tirer de conclusions de la comparaison isolée de chaque a_{lm}^{obs} avec les coefficients a_{lm} prédits par le modèle d'univers en question. Cependant, le spectre (A.68) réécrit en

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \langle |a_{lm}|^2 \rangle, \quad (\text{A.69})$$

peut être comparé par ergodicité à l'estimateur construit, grâce à l'isotropie, sur les $2l+1$ directions indépendantes du ciel disponibles à une échelle angulaire π/l donnée

$$C_l^{\text{obs}} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}^{\text{obs}}|^2. \quad (\text{A.70})$$

On peut montrer que l'estimation du spectre C_l par C_l^{obs} est cohérente et non-biaisée [80], soit respectivement

$$\lim_{l \rightarrow \infty} C_l^{\text{obs}} = C_l, \quad (\text{A.71a})$$

$$\langle C_l^{\text{obs}} \rangle = C_l, \quad (\text{A.71b})$$

et de variance minimale. Cette dernière, la variance cosmique, se réduit à

$$\frac{\langle C_l^{\text{obs}2} \rangle - \langle C_l^{\text{obs}} \rangle^2}{C_l^2} = \frac{2}{2l+1}. \quad (\text{A.72})$$

A bas l , elle domine les erreurs de mesure des détecteurs actuels⁶. De l'observation des modes de plus bas l est déduite l'estimation des perturbations aux plus grandes échelles dans le domaine de Fourier. La variance cosmique représente ainsi une limite naturelle pour un observateur donné. Toutefois, multiplier les observations des modes angulaires les plus larges en différents points de l'espace [138, 139] puis les collecter causalement ne réduit pas la variance du spectre de Fourier [140]. La variance cosmique est dès lors une limite absolue.

Exprimons maintenant le spectre angulaire en fonction des multipôles $\Theta(\vec{k}, \tau_0)$. À l'aide du théorème d'addition des harmoniques sphériques et de la décomposition (A.24b) en polynômes de Legendre, l'expression (A.67a) devient, dans l'espace de Fourier et l'espace direct respectivement,

$$a_{lm}(\vec{k}, \tau_0) = (-i)^l 4\pi \Theta_l(\vec{k}, \tau_0) Y_{lm}(\hat{k}), \quad (\text{A.73a})$$

$$a_{lm}(\vec{x}, \tau_0) = (-i)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int d^3\vec{k} \Theta_l(\vec{k}, \tau_0) Y_{lm}(\hat{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (\text{A.73b})$$

Grâce à l'isotropie et à l'homogénéité de l'espace, la dépendance en \vec{k} des perturbations est séparée selon

$$\Theta_l(\vec{k}, \tau) = \Theta_l(k, \tau) \chi(\hat{k}) \quad (\text{A.74})$$

où $\chi(\hat{k})$ satisfait

$$\langle \chi^*(\hat{k}) \chi(\hat{k}') \rangle = \delta_D(\hat{k} - \hat{k}'). \quad (\text{A.75})$$

⁶Par exemple, après 7 années d'observations du satellite WMAP, les mesures du spectre angulaire sont limitées par la variance cosmique jusque $l \simeq 400$.

Si bien que le spectre (A.69) devient finalement

$$C_l = \frac{1}{2\pi^2} \int k^2 dk |\Theta_l(k, \tau_0)|^2. \quad (\text{A.76})$$

La connaissance du spectre théorique jusqu'au multipôle l_{\max} repose donc sur l'évaluation à l'instant τ_0 de l_{\max} fonctions Θ_l . Pour les échelles qui nous intéressent l_{\max} est de l'ordre de 10^3 , il faut donc résoudre la hiérarchie d'équations différentielles (A.28) pour tous ces modes. Cependant, il est possible d'établir une solution sous forme intégrale à l'équation de Boltzmann (A.27), plus efficace numériquement et se prêtant à une interprétation plus simple, qui repose sur la détermination des premiers multipôles Θ_l uniquement. Reprenons donc l'équation de Boltzmann

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} [e^{ik\mu\tau} e^{-\mathcal{T}} \Theta(k, \mu, \tau)] = \\ e^{ik\mu\tau} e^{-\mathcal{T}} \left\{ \Psi' - ik\mu\Phi + \dot{\mathcal{T}} [\Theta_0 + ik\mu v_b - \frac{1}{2} P_2(\mu) \Theta_2] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Intégrons-la jusqu'en τ_0 , la borne inférieure τ_i étant choisie telle que $e^{-\mathcal{T}(\tau_i)} \rightarrow 0$. Autrement dit la profondeur optique \mathcal{T} est infinie à cet instant, dès lors en se rappelant que la profondeur optique est nulle aujourd'hui par définition, $\mathcal{T}(\tau_0) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \Theta(k, \mu, \tau_0) = \\ \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} e^{-\mathcal{T}} \left[\Psi' - ik\mu\Phi + \dot{\mathcal{T}} (\Theta_0 + ik\mu v_b - \frac{1}{2} P_2 \Theta_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Grâce à la définition de la fonction de visibilité et à une intégration par partie pour le terme du potentiel Φ , les perturbations actuelles de la température deviennent

$$\begin{aligned} \Theta(k, \mu, \tau_0) = -\Phi(\tau_0) + \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} g(\tau) \left[\Theta_0 + \Phi + ik\mu v_b - \frac{1}{2} P_2 \Theta_2 \right] \\ + \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} e^{-\mathcal{T}} (\Psi' + \Phi'). \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Le premier terme, monopolaire, exprime le redshift que subissent les photons lorsqu'ils traversent le potentiel gravitationnel local dans lequel les anisotropies sont mesurées. Nous abandonnons ce terme puisqu'il ne peut se distinguer d'une redéfinition de la température moyenne $\bar{T}(\tau_0)$.

Cherchons l'expression des multipôles $\Theta_l(k, \tau_0)$, équation (A.24a). Remarquons d'abord les identités

$$\begin{aligned} i^l \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau \int_{-1}^1 d\mu e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} P_l(\mu) f_n(\tau) \mu^n \\ = (ik)^{-n} \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau j_l[k(\tau_0 - \tau)] \frac{d^n}{d\tau^n} f_n(\tau), \end{aligned} \quad (\text{A.80a})$$

$$= (ik)^{-n} \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau f_n(\tau) \frac{d^n}{d\tau^n} j_l[k(\tau_0 - \tau)], \quad (\text{A.80b})$$

pour autant que $f_n(\tau_i) = f_n(\tau_0) = 0$ et que $\left. \frac{d^m f_n(\tau)}{d\tau^m} \right|_{\tau_i, \tau_0} = 0$ pour $m \leq n$. Appliquées aux différentes puissances de μ présentes dans les termes intégrés de la relation (A.78), cette dernière devient en identifiant $\tau_0 - \tau$ à la distance comobile $D_A(\tau)$

$$\Theta_l(k, \tau_0) = \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau g(\tau) (\Theta_0 + \Phi) j_l[kD_A(\tau)] \quad (\text{A.81a})$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau g(\tau) v_b j_l'[kD_A(\tau)] \quad (\text{A.81b})$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau e^{-\mathcal{T}} (\Psi' + \Phi') j_l[kD_A(\tau)] \quad (\text{A.81c})$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_0} d\tau g(\tau) \Theta_2 \left\{ j_l[kD_A(\tau)] + \frac{3}{4k^2} j_l''[kD_A(\tau)] \right\}. \quad (\text{A.81d})$$

Cette relation exprime comment les inhomogénéités de la distribution des photons, $\Theta_0(k, \tau)$, à différents instants sont aujourd'hui observées sous forme d'anisotropies, $\Theta_l(k, \tau_0)$. La fonction de visibilité $g(\tau)$ sélectionne les instants de dernière diffusion alors que la fonction de Bessel sphérique projette un mode de Fourier donné k à différentes échelles angulaires.

Dans l'approximation d'une recombinaison instantanée, la fonction de visibilité devient une distribution delta de Dirac posée à l'instant de la recombinaison τ_* . La fonction de Bessel $j_l[kD_A(\tau)]$ atteint son maximum en $kD_A(\tau) \sim l$. Si bien que pour un mode de Fourier k la contribution principale du terme (A.81a) au spectre du CMB (A.76) se situe autour de l'échelle angulaire $\theta \sim \pi/kD_A(\tau_*)$.

Au moment de la recombinaison, les photons subissent un décalage vers le rouge (bleu resp.) lorsqu'ils s'extraient des puits (collines resp.) de potentiels gravitationnels, c'est l'effet Sachs-Wolfe (SW). La température du fluide de

photons à la sortie des potentiels est donnée par

$$\Theta_0^{\text{SW}} \equiv \Theta_0 + \Phi, \quad (\text{A.82})$$

soit le premier terme de l'intégrale le long de la ligne de visée (A.81a). Le second terme (A.81b) est dû à la vitesse du plasma décalant, par effet Doppler cette fois-ci, la longueur d'onde des photons que les baryons émettent au moment de la recombinaison. Le troisième décrit le décalage gravitationnel de la longueur d'onde des photons lorsqu'ils traversent des potentiels variant dans le temps, c'est l'effet Sachs-Wolfe intégré (SWI). Deux périodes y contribuent : après la recombinaison lorsque les potentiels décroissent en raison de la proximité de la transition radiation-matière, effet SWI primitif ; ensuite lors du passage de l'ère dominée par la matière à l'ère de l'énergie sombre, on parlera alors d'effet SWI récent.

Annexe B

Paramètres cosmologiques

B.1 Méthode d'estimation

Contraindre les paramètres cosmologiques revient à les *estimer*. Pour un ensemble de N paramètres cosmologiques, rassemblés dans $\vec{\theta} \equiv \{\theta_i\}_{i=1\dots N}$, nous cherchons donc à caractériser la distribution de probabilité des valeurs de ces paramètres d'après un jeu de données X . Une telle distribution est appelée la distribution *a posteriori*, soit la probabilité conditionnelle $p(\vec{\theta}|X)$. Connaissant la fonction de vraisemblance des données d'une expérience face aux paramètres, $p(X|\vec{\theta})$, le théorème de Bayes permet de quantifier notre connaissance des paramètres d'*après* cette expérience

$$p(\vec{\theta}|X) = \frac{p(\vec{\theta})p(X|\vec{\theta})}{\int d^N \vec{\theta}' p(\vec{\theta}')p(X|\vec{\theta}')} . \quad (\text{B.1})$$

La distribution *a priori* $p(\vec{\theta})$, dit encore le prior, représente notre connaissance sur les paramètres $\vec{\theta}$ indépendamment des données X . La relation (B.1) indique comment notre connaissance *préalable* des paramètres est mise à jour par les données. En l'absence d'évidences initiales, le choix du prior $p(\vec{\theta})$ est arbitraire. Dans un premier temps nous opterons pour une distribution $p(\vec{\theta})$ séparable sous la forme d'une distribution uniforme pour chacun des paramètres θ_i , on parlera alors de prior plat. L'extension des supports des ces distributions sont tels que leur choix n'influence pas le résultat $p(\vec{\theta}|X)$, la fonction de vraisemblance est nulle aux bornes de ces supports.

Plutôt que de caractériser la distribution a posteriori sous sa forme complète, il est plus commode de la représenter dans ses versions marginalisées, par exemple

$$p(\theta_1, \theta_2 | X) \equiv \int d\theta_3 \cdots d\theta_N p(\vec{\theta} | X), \quad (\text{B.2a})$$

$$p(\theta_1 | X) \equiv \int d\theta_2 p(\theta_1, \theta_2 | X). \quad (\text{B.2b})$$

La première relation donne la probabilité jointe de la paire de paramètres (θ_1, θ_2) marginalisée sur les $N - 2$ paramètres restants. Elle permet notamment d'identifier une éventuelle dégénérescence des données X entre θ_1 et θ_2 . Quant à la distribution $p(\theta_1 | X)$, elle représente notre connaissance de θ_1 d'après les données X indépendamment des autres paramètres. La distribution marginale de paramètres dérivés tels que σ_8 ou \dot{G}/G s'écrit

$$p(\alpha, \beta | X) = \int d^N \vec{\theta} p(\vec{\theta} | X) \delta_D[\alpha - f(\vec{\theta})] \delta_D[\beta - g(\vec{\theta})], \quad (\text{B.3a})$$

$$p(\alpha | X) = \int d^N \vec{\theta} p(\vec{\theta} | X) \delta_D[\alpha - f(\vec{\theta})], \quad (\text{B.3b})$$

où $\alpha = f(\vec{\theta})$ et $\beta = g(\vec{\theta})$ sont les paramètres dérivés des paramètres de base $\vec{\theta}$.

Des distributions marginales on dérive les intervalles de confiance sous la forme $\theta_i = a_{-c}^{+b}$ avec a la moyenne de la distribution marginale a posteriori de θ_i et b, c tels que

$$p(\theta_i > a + b | X) = p(\theta_i < a - c | X) = \frac{1 - \gamma}{2}, \quad (\text{B.4})$$

où γ est le niveau de confiance désiré ($\gamma = 0.683$ ou 0.954 par exemple).

A l'aide d'une méthode de grille, la complexité des intégrales (B.2)-(B.3) est exponentielle en le nombre N de paramètres de base et polynomiale dans le nombre s de subdivisions de la grille. Le nombre d'évaluation de la distribution $p(\vec{\theta} | X)$ évolue donc comme s^N . Pour les modèles des chapitres 2 et 3 on a $N = 8$ et la précision recherchée sur les intervalles de confiance requiert que s soit au moins de l'ordre de 10^2 . Dès lors, plutôt que d'explorer de manière systématique l'espace des paramètres, on préférera une intégration par méthode de Monte Carlo à chaînes de Markov (MCMC) guidées par l'algorithme de Metropolis implémentée dans le code CosmoMC [141] dont la complexité est linéaire dans le nombre de paramètres.

B.2 Tables de paramètres cosmologiques

Paramètres primaires		Paramètres dérivés	
$100 \Omega_b h^2$	2.273	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	72.0
$\Omega_c h^2$	0.1099	t_0 (Ga)	13.68
$100 \theta_*$	1.0411	Ω_Λ	0.744
\mathcal{T}_c	0.087	Ω_m	0.256
$\ln[10^{10} A_s]$	3.063	z_{eg}	3174
n_s	0.963	z_{re}	10.4
		τ_{eg} (Mpc)	121.0
		τ_* (Mpc)	286.0
		τ_0 (Gpc)	14.39
		$r_s(z_*)$ (Mpc)	146.9
		σ_8	0.798

Tab. B.1 – Modèle de référence (Λ CDM). L'amplitude spectrale scalaire A_s est donnée pour une convention de pivot $k_0 = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$.

Paramètres primaires	WMAP5	WMAP5 + Union	WMAP5 + Union + HST
$100 \Omega_b h^2$	$2.278^{+0.061}_{-0.062}$	2.270 ± 0.060	2.271 ± 0.060
$\Omega_c h^2$	0.1093 ± 0.0063	$0.1137^{+0.0053}_{-0.0052}$	0.1135 ± 0.0052
$100 \theta_*$	1.0405 ± 0.0030	1.0403 ± 0.0030	1.0404 ± 0.0030
\mathcal{T}_c	0.089 ± 0.017	0.086 ± 0.016	0.086 ± 0.016
$\ln[10^{10} A_s]$	3.064 ± 0.042	3.074 ± 0.040	3.073 ± 0.040
n_s	0.965 ± 0.014	0.961 ± 0.014	0.962 ± 0.014
Paramètres dérivés			
H_0 (km/s/Mpc)	72.2 ± 2.6	70.3 ± 2.1	$70.4^{+2.0}_{-2.1}$
t_0 (Ga)	$13.68^{+0.14}_{-0.13}$	13.72 ± 0.13	13.72 ± 0.13
Ω_Λ	0.745 ± 0.029	$0.723^{+0.025}_{-0.026}$	0.724 ± 0.025
Ω_m	0.255 ± 0.029	$0.277^{+0.026}_{-0.025}$	0.276 ± 0.025
z_{eg}	3160 ± 150	3260 ± 130	3260 ± 130
z_{re}	10.5 ± 1.4	$10.3^{+1.4}_{-1.3}$	10.3 ± 1.4
τ_{eg} (Mpc)	121.9 ± 5.9	$117.9^{+4.6}_{-4.7}$	118.1 ± 4.6
τ_* (Mpc)	285.8 ± 3.5	$283.4^{+2.8}_{-2.9}$	283.5 ± 2.8
τ_0 (Gpc)	14.41 ± 0.20	14.30 ± 0.17	14.31 ± 0.17
$r_s(z_*)$ (Mpc)	147.0 ± 1.8	145.8 ± 1.5	145.9 ± 1.5
σ_8	0.794 ± 0.036	0.815 ± 0.031	$0.814^{+0.032}_{-0.031}$

Tab. B.2 – Contraintes combinées WMAP5, Union et HST pour le modèle Λ CDM.

Paramètres primaires	WMAP5	WMAP5 + Union	WMAP5 + Union + HST
$100 \Omega_b h^2$	2.278 ± 0.061	2.270 ± 0.060	2.266 ± 0.059
$\Omega_c h^2$	$0.187^{+0.074}_{-0.064}$	$0.199^{+0.076}_{-0.068}$	$0.141^{+0.029}_{-0.030}$
$100 \theta_*$	$1.0304^{+0.0070}_{-0.0068}$	$1.0298^{+0.0069}_{-0.0066}$	$1.0355^{+0.0060}_{-0.0059}$
\mathcal{T}_c	0.089 ± 0.018	0.086 ± 0.017	0.085 ± 0.016
$\ln[10^{10} A_s]$	$3.163^{+0.077}_{-0.078}$	$3.177^{+0.073}_{-0.076}$	3.117 ± 0.061
n_s	$1.002^{+0.029}_{-0.030}$	$1.00^{+0.028}_{-0.029}$	0.976 ± 0.020
$N_{\nu\text{eff}}$	> 3.9	> 4.1	4.6 ± 1.6
Paramètres dérivés			
H_0 (km/s/Mpc)	89^{+14}_{-13}	88^{+14}_{-13}	$75.9^{+6.1}_{-6.2}$
t_0 (Ga)	$11.3^{+1.7}_{-1.8}$	11.2 ± 1.8	$12.72^{+1.06}_{-1.0}$
Ω_Λ	0.738 ± 0.032	0.717 ± 0.027	0.717 ± 0.026
Ω_m	0.262 ± 0.032	0.283 ± 0.027	0.283 ± 0.026
z_{eg}	3110 ± 160	3210 ± 130	3240 ± 130
z_{re}	$12.2^{+2.1}_{-2.0}$	$12.1^{+2.1}_{-2.0}$	10.9 ± 1.6
τ_{eg} (Mpc)	101^{+16}_{-17}	96 ± 16	109 ± 10
τ_* (Mpc)	232^{+38}_{-40}	228 ± 38	261 ± 24
τ_0 (Gpc)	$11.8^{+1.8}_{-1.9}$	11.6 ± 1.9	$13.2^{+1.2}_{-1.1}$
$r_s(z_*)$ (Mpc)	120^{+19}_{-20}	117 ± 20	134 ± 12
$\Omega_{\Delta N_\nu} h^2$	$> 5.1 \times 10^{-6}$	$> 6.0 \times 10^{-6}$	$(8.7^{+8.9}_{-9.2}) \times 10^{-6}$

Tab. B.3 – Contraintes combinées WMAP5, Union et HST pour un modèle Λ CDM étendu à un nombre effectif libre de familles de neutrinos N_ν , soit $\{\cdot, 0\}$.

Paramètres primaires	WMAP5 + HST	WMAP5 + Union
$100 \Omega_b h^2$	$2.256^{+0.062}_{-0.063}$	2.257 ± 0.061
$\Omega_c h^2$	0.1110 ± 0.0063	$0.1156^{+0.0057}_{-0.0056}$
$100 \theta_*$	1.0407 ± 0.0030	1.0405 ± 0.0030
\mathcal{T}_c	0.090 ± 0.017	0.086 ± 0.016
$\ln[10^{10} A_s]$	3.081 ± 0.043	3.086 ± 0.041
n_s	0.975 ± 0.016	0.967 ± 0.015
$\Omega_\varphi h^2$	$< 3.6 \times 10^{-6}$	$< 2.0 \times 10^{-6}$
Paramètres dérivés		
N_φ	< 0.64	< 0.36
H_0 (km/s/Mpc)	$77.7^{+4.9}_{-4.8}$	73.1 ± 3.2
t_0 (Ga)	$13.20^{+0.36}_{-0.38}$	$13.44^{+0.25}_{-0.26}$
Ω_φ	$< 5.8 \times 10^{-6}$	$< 3.7 \times 10^{-6}$
Ω_Λ	0.776 ± 0.033	0.739 ± 0.028
Ω_m	0.224 ± 0.033	0.261 ± 0.028
z_{eg}	2990 ± 180	3180 ± 140
z_{re}	10.6 ± 1.4	10.4 ± 1.4
τ_{eg} (Mpc)	124.6 ± 6.1	118.7 ± 4.8
τ_* (Mpc)	$280.2^{+5.1}_{-5.2}$	279.7 ± 4.1
τ_0 (Gpc)	14.14 ± 0.27	14.12 ± 0.22
$r_s(z_*)$ (Mpc)	144.2 ± 2.6	144.0 ± 2.1
σ_8	$0.857^{+0.060}_{-0.059}$	0.857 ± 0.047
$\beta_* - 1$	$< 1.9 \times 10^{-3}$	$< 1.1 \times 10^{-3}$
$1 - \gamma_*$	< 0.025	< 0.014
ω_*^{-1}	< 0.026	< 0.014
$-(\dot{G}/G)_*$ (a^{-1})	$< 3.9 \times 10^{-8}$	$< 2.2 \times 10^{-8}$
$\beta_0 - 1$	$< 4.4 \times 10^{-6}$	$< 2.5 \times 10^{-6}$
$1 - \gamma_0$	$< 5.3 \times 10^{-5}$	$< 3.0 \times 10^{-5}$
ω_0^{-1}	$< 5.3 \times 10^{-5}$	$< 3.0 \times 10^{-5}$
$-(\dot{G}/G)_0$ (a^{-1})	$< 1.3 \times 10^{-14}$	$< 6.3 \times 10^{-15}$

Tab. B.4 – Contraintes WMAP5 + HST et WMAP5 + Union pour le modèle Λ CDM dans le cadre de la théorie de gravitation tenseur-scalaire du chapitre 2, équation (2.9), soit $\{1, \cdot\}$: le nombre de familles de neutrinos est fixé à sa valeur standard.

Modèle fictif	Λ CDM table B.1	
Modèle testé	{1, 0}	{1, ·}
Paramètres primaires		
100 $\Omega_b h^2$	2.283 ± 0.018	2.290 ± 0.018
$\Omega_c h^2$	0.1086 ± 0.0015	$0.1083^{+0.0014}_{-0.0015}$
100 θ_*	1.04080 ± 0.00032	$1.04095^{+0.00033}_{-0.00034}$
\mathcal{T}_c	0.0860 ± 0.0048	0.0871 ± 0.0049
$\ln[10^{10} A_s]$	$3.0564^{+0.0094}_{-0.0095}$	$3.0603^{+0.010}_{-0.0101}$
n_s	0.9648 ± 0.0049	0.9699 ± 0.0063
A_{SZ}	< 0.11	< 0.13
$\Omega_\varphi h^2$	–	$< 8.3 \times 10^{-7}$
Paramètres dérivés		
N_φ	–	< 0.15
H_0 (km/s/Mpc)	72.48 ± 0.75	74.2 ± 1.5
t_0 (Ga)	$13.666^{+0.030}_{-0.031}$	$13.530^{+0.10}_{-0.110}$
Ω_φ	–	$< 1.5 \times 10^{-6}$
Ω_Λ	0.7496 ± 0.0077	0.761 ± 0.011
Ω_m	0.2504 ± 0.0077	0.239 ± 0.011
z_{eg}	3142 ± 32	3087^{+51}_{-52}
z_{re}	10.22 ± 0.39	10.29 ± 0.40
τ_{eg} (Mpc)	122.2 ± 1.3	123.4 ± 1.5
τ_* (Mpc)	$286.05^{+0.78}_{-0.77}$	$285.06^{+1.0}_{-1.05}$
τ_0 (Gpc)	14.419 ± 0.031	$14.361^{+0.051}_{-0.052}$
$r_s(z_*)$ (Mpc)	147.10 ± 0.33	$146.53^{+0.52}_{-0.53}$
σ_8	$0.7895^{+0.0066}_{-0.0067}$	0.801 ± 0.011
$\beta_* - 1$	–	$< 4.9 \times 10^{-4}$
$1 - \gamma_*$	–	$< 5.9 \times 10^{-3}$
η_*	–	< 0.011
ω_*^{-1}	–	$< 6.0 \times 10^{-3}$
$-(\dot{G}/G)_*$ (a^{-1})	–	$< 9.1 \times 10^{-9}$
$\beta_0 - 1$	–	$< 1.1 \times 10^{-6}$
$1 - \gamma_0$	–	$< 1.3 \times 10^{-5}$
η_0	–	$< 2.4 \times 10^{-5}$
ω_0^{-1}	–	$< 1.3 \times 10^{-5}$
$-(\dot{G}/G)_0$ (a^{-1})	–	$< 2.8 \times 10^{-15}$

Tab. B.5 – Contraintes prévisionnelles pour la relativité générale, {1, 0}, et la théorie “zéro- R ”, {1, ·}, dérivées de données fictives de Planck, section 2.4.3, page 92.

Annexe C

Représentations de Dicke-Jordan et d'Einstein

C.1 Transformation conforme

Partons de l'action de la Relativité Générale où la constante cosmologique est incorporée dans l'action S_ψ pour les champs de matières ψ ,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_\psi[g_{\mu\nu}, \psi]. \quad (\text{C.1})$$

Introduisons un champ scalaire, φ , qui ne couple pas de manière minimale à la métrique, soit

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\varphi)R - \kappa g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \kappa V(\varphi)] + S_\psi[g_{\mu\nu}, \psi]. \quad (\text{C.2})$$

où $V(\varphi)$ représente le terme d'auto-interaction du champ. L'action étendue de Brans-Dicke est obtenue en re-paramétrisant le champ scalaire. Définissons Φ^{BD} de sorte que

$$\Phi^{\text{BD}} \equiv f(\varphi). \quad (\text{C.3})$$

Dès lors, l'action (C.2) se réécrit comme

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi^{\text{BD}} R - \frac{\omega(\Phi^{\text{BD}})}{\Phi^{\text{BD}}} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^{\text{BD}} \partial_\nu \Phi^{\text{BD}} - \kappa V^{\text{BD}}(\Phi^{\text{BD}}) \right] + S_\psi[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (\text{C.4})$$

avec

$$\omega(\Phi^{\text{BD}}) \equiv \kappa \Phi^{\text{BD}} \left[\frac{d\varphi(\Phi^{\text{BD}})}{d\Phi^{\text{BD}}} \right]^2, \quad (\text{C.5a})$$

$$V^{\text{BD}}(\Phi^{\text{BD}}) \equiv V[\varphi(\Phi^{\text{BD}})]. \quad (\text{C.5b})$$

Les actions (C.2) et (C.4) définissent la représentation de Dicke-Jordan d'une extension tenseur-scalaire de la Relativité Générale.

Remarquons que l'action de la matière S_ψ est intacte sous la paramétrisation (C.3) du champ auxiliaire de gravitation. Les observables dérivées dans l'une ou l'autre paramétrisation, actions (C.2) et (C.4), s'expriment dans des unités dont les rapports sont constants dans l'espace-temps. Notons aussi que le secteur du champ scalaire φ ou Φ^{BD} se caractérise comme un secteur sombre.

Effectuons un changement local et arbitraire des unités [142] au travers de la transformation conforme $g_{\mu\nu} = B(x^\alpha)g_{\mu\nu}^*$, où $B(x^\alpha)$ est une fonction scalaire réelle. Si B introduit une singularité, alors elle est présente dans tous les systèmes de coordonnées. L'absence de singularité dans le secteur de la matière, $S_\psi[Bg_{\mu\nu}^*, \psi]$ requiert que B soit borné et non-nul quand la métrique $g_{\mu\nu}^*$ est régulière. Le facteur conforme B est donc de signe constant. On définit ainsi $B \equiv A^2$

$$g_{\mu\nu} = A^2(x^\alpha)g_{\mu\nu}^*, \quad A > 0. \quad (\text{C.6})$$

Le scalaire de courbure R exprimé en fonction des nouvelles unités s'écrit

$$R = A^{-2} \left\{ R^* + 6g^{*\mu\nu} \left[-\frac{1}{A} A_{|\mu\nu} + 3\frac{1}{A^2} A_{|\mu} A_{|\nu} \right] \right\}. \quad (\text{C.7})$$

Par conséquent, l'action (C.2) devient, après avoir omis les termes de surface,

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g^*} \left[f(\varphi) A^2 R^* - \kappa g^{*\mu\nu} A^2 \left(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{6}{\kappa} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \frac{1}{A} \partial_\mu \varphi \partial_\nu A - \frac{6}{\kappa} \frac{f}{A^2} \partial_\mu A \partial_\nu A \right) - 2\kappa A^4 V(\varphi) \right] + S_\psi[A^2 g_{\mu\nu}^*, \psi]. \quad (\text{C.8})$$

Le couplage non-minimal du champ scalaire φ au scalaire de courbure R^* s'élimine en demandant que les variations des unités soient fonction des fluctuations

du champ scalaire, soit

$$A^{-2} = f(\varphi). \quad (\text{C.9})$$

Pour cette transformation conforme, l'action précédente se simplifie en

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g^*} \left\{ R^* - \kappa g^{*\mu\nu} \left[\frac{1}{f(\varphi)} + \frac{3}{2} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{d \ln f(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right] \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 2\kappa \frac{V(\varphi)}{f^2} \right\} + S_\psi[f^{-1}g_{*\mu\nu}, \psi]. \quad (\text{C.10})$$

On rend canonique le terme cinétique du champ scalaire en le reparamétrisant à nouveau. Soit $\bar{\sigma}$ le champ scalaire reparamétrisé¹,

$$d\bar{\sigma}^2 \equiv \left[\frac{1}{f(\varphi)} + \frac{3}{2} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{d \ln f(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2. \quad (\text{C.12})$$

Enfin, de façon à suivre les conventions trouvées dans la littérature, effectuons une dernière reparamétrisation du champ scalaire

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \bar{\sigma}, \quad (\text{C.13})$$

telle que l'action s'écrive comme

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g^*} \{ R^* - 2g^{*\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - 4V^*(\sigma) \} + S_\psi[A^2 g_{*\mu\nu}^*, \psi], \quad (\text{C.14})$$

avec

$$V^*(\sigma) \equiv \frac{\kappa}{2} A^4 V[\varphi(\sigma)]. \quad (\text{C.15})$$

¹ Signalons que le jacobien de l'équation (C.12) doit être positif ou nul [143]. Pour une théorie $f(\varphi) = 1 - \xi\kappa\varphi^2$, cette condition s'écrit

$$\frac{1 - 6\xi(\xi - \frac{1}{6})\kappa\varphi^2}{(1 - \xi\kappa\varphi^2)^2} \geq 0, \quad (\text{C.11})$$

soit $\xi \leq 0$ ou $\xi \geq \frac{1}{6}$. Pour la théorie "zéro- R " du chapitre 2, le secteur scalaire σ est stable vis-à-vis du secteur de la métrique $g_{*\mu\nu}^*$. Quant à la stabilité vis-à-vis du secteur de la matière ou du potentiel d'auto-interaction de σ , elle est déterminée par le signe de $f(\varphi)$ (ou encore Φ^{BD} , ou aussi A^2).

Cette action, celle d'un champ scalaire universellement couplé aux champs de matière, définit la représentation d'Einstein de la théorie physique décrite par l'action (C.2) ou (C.4) dans la base de Dicke-Jordan.

En fonction de la paramétrisation de Brans-Dicke, Φ^{BD} , la représentation d'Einstein s'obtient en posant que

$$\Phi^{\text{BD}} = A^{-2}, \quad (\text{C.16a})$$

$$d\sigma^2 = [2\omega(\Phi^{\text{BD}}) + 3] \frac{d\Phi^{\text{BD}2}}{4\Phi^{\text{BD}2}}, \quad (\text{C.16b})$$

$$\alpha \equiv \frac{d \ln A}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\Phi^{\text{BD}}) + 3}}. \quad (\text{C.16c})$$

Les équations des champs ont pour forme en absence d'auto-interaction du champ

$$G_{\mu\nu}^* = \kappa T_{\mu\nu}^* + 2\partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - g_{\mu\nu}^* \partial^\alpha \sigma \partial_\alpha \sigma, \quad (\text{C.17a})$$

$$\square^* \sigma = -\frac{\kappa}{2} \alpha T^*, \quad (\text{C.17b})$$

$$T^{*\mu\nu}{}_{|\nu} = \alpha \sigma^{;\mu} T^*, \quad (\text{C.17c})$$

avec $T_{\mu\nu} = A^{-2} T_{\mu\nu}^*$.

On exprime les paramètres post-newtoniens en fonction du couplage scalaire α

$$\gamma - 1 = -\frac{2\alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad (\text{C.18a})$$

$$\beta - 1 = \frac{\alpha^2}{2(1 + \alpha^2)^2} \frac{d\alpha}{d\sigma}, \quad (\text{C.18b})$$

$$\frac{d \ln G}{dt^*} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \left(1 + \alpha^2 + \frac{d\alpha}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{dt^*}. \quad (\text{C.18c})$$

Dans le contexte des cosmologies de Friedmann-Lemaître et dans la représentation d'Einstein, l'évolution du champ scalaire est guidée par une équation différentielle du second ordre non-linéaire à coefficients non-constants [144]

$$\frac{2}{3 - \dot{\sigma}^2} \ddot{\sigma} + (1 - w_\psi) \dot{\sigma} = -(1 - 3w_\psi) \frac{d \ln A}{d\sigma}, \quad (\text{C.19})$$

en la variable p , fonction du facteur d'échelle cosmologique a^* dans la représentation d'Einstein

$$dp \equiv d \ln a^* \quad \dot{\sigma} \equiv \frac{d\sigma(p)}{dp}. \quad (\text{C.20})$$

L'équation d'état w_ψ ne rend compte que de l'effet des champs de matières (photons, neutrinos, baryons, matière noire, constante cosmologique), la contribution du champ scalaire n'y est pas incluse par construction. Soulignons que l'équation d'état est identique dans les deux représentations.

L'équation (C.19) est l'analogie mécanique d'un système dynamique à une dimension spatiale, de masse variable $\frac{2}{3-\dot{\sigma}^2}$, soumis à une force de frottement visqueux $-(1-w_\psi)\dot{\sigma}$ et à une force qui dérive du potentiel effectif $(1-3w_\psi) \ln A(\sigma)$.

Puisque l'élément d'arc n'est pas invariant sous une transformation conforme

$$ds^2 = A^2 ds^{*2}, \quad (\text{C.21})$$

le facteur d'échelle ainsi que les échelles de temps de coordonnées et conforme sont modifiés d'après

$$a = A a^*, \quad dt = A dt^*, \quad d\tau = d\tau^*, \quad (\text{C.22})$$

de sorte que pour obtenir la solution dans la base de Dicke-Jordan à partir de l'équation (C.19) de la représentation d'Einstein il est nécessaire d'intégrer

$$dp = d \ln a - d \ln A. \quad (\text{C.23})$$

C.2 Théorie “zéro- R ”

L'implémentation scalaire de la théorie “zéro- R ”, définie par

$$f(\varphi) = 1 - \frac{\kappa\varphi^2}{6}, \quad (\text{C.24a})$$

$$\omega(\Phi^{\text{BD}}) = \frac{3}{2} \frac{\Phi^{\text{BD}}}{1 - \Phi^{\text{BD}}}, \quad (\text{C.24b})$$

sélectionne la transformation conforme

$$A(\sigma) = \cosh \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, \quad (\text{C.25})$$

associée au couplage scalaire

$$\alpha^2 = \frac{1 - \Phi^{\text{BD}}}{3} = \frac{1}{3} \tanh^2 \frac{\sigma}{\sqrt{3}}. \quad (\text{C.26})$$

D'après la forme du potentiel effectif $\ln A(\sigma)$ de l'équation (C.19), il suffit que $w_\psi < \frac{1}{3}$ pour s'assurer de la convergence vers la Relativité Générale, soit $\sigma = 0$.

Cherchons les solutions cosmologiques à l'équation du mouvement du champ scalaire dans la base d'Einstein pour la théorie "zéro- R ". A cette fin, isolons les termes dépendants de l'équation d'état w_ψ des champs de matière [145]

$$\frac{2}{3 - \dot{\sigma}^2} \ddot{\sigma} + \dot{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tanh \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = w_\psi(p) \left(\dot{\sigma} + \sqrt{3} \tanh \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \right). \quad (\text{C.27})$$

Une des solutions est indépendante de w_ψ . En effet, la proposition de solution obtenue en annulant le membre de droite

$$\dot{\sigma} + \sqrt{3} \tanh \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = 0, \quad (\text{C.28})$$

est solution de l'équation générale avec w_ψ , soit

$$\sigma(p) = \sqrt{3} \operatorname{arcsinh}[ke^{-p}] \quad \forall p, \quad (\text{C.29})$$

et en fonction du facteur d'échelle on a

$$\boxed{\sigma(a) = \sqrt{3} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{k}{a^*} \right] \quad a^* > 0.} \quad (\text{C.30})$$

est solution de l'équation complète (C.27), avec k la constante d'intégration, réelle. Elle décrit de manière exacte une relaxation vers la relativité générale sans oscillation

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sigma(p) = 0. \quad (\text{C.31})$$

L'évolution de ce mode, en fonction de a^* est indépendant du contenu de l'Univers, la solution ne fait pas intervenir l'équation d'état w_ψ des champs de matière.

Pour le champ de Brans-Dicke, cette solution se traduit par

$$\Phi^{\text{BD}}(p) = \frac{1}{1 + k^2 e^{-2p}} \quad \forall p, \quad (\text{C.32})$$

qui, après intégration de (C.23),

$$p = \ln a - \ln A + c^{\text{te}}, \quad (\text{C.33})$$

s'exprime en fonction du facteur d'échelle a dans la base de Dicke-Jordan

$$\Phi^{\text{BD}}(a) = 1 - \frac{k^2}{a^2} \quad a > |k| \quad (\text{C.34})$$

où k réabsorbe la constante d'intégration provenant de (C.23).

On identifie la solution obtenue ici au mode μ de la solution générale du chapitre 2, équation (2.21)

$$k = \mu. \quad (\text{C.35})$$

On pourrait être surpris que la solution particulière dérivée de l'analyse dans la base d'Einstein autorise un comportement pathologique dans la base de Dicke-Jordan : $\Phi^{\text{BD}} < 0 \rightarrow \Phi^{\text{BD}} > 0$. Toutefois, le changement de signe de Φ^{BD} se produit en dehors du domaine de validité de la solution dans la base d'Einstein. Notons que $\Phi^{\text{BD}} = 0$ se produit à un moment fini dans la représentation de Dicke-Jordan, $a = |k|$, alors que ce moment est caché en $a^* = 0$ dans la base d'Einstein :

$$\lim_{\Phi^{\text{BD}} \rightarrow 0^+} p = -\infty, \quad (\text{C.36})$$

et

$$\lim_{\Phi^{\text{BD}} \rightarrow 0^+} a^* = \lim_{a \rightarrow |k|^+} a^* = 0. \quad (\text{C.37})$$

Inversément, à partir du mode en Ω_φ pour φ , on obtient une seconde solution dans la représentation d'Einstein. Partons de la relation (C.26)

$$\frac{1 - \Phi^{\text{BD}}}{3} = \frac{\Omega_\varphi H_0^2 \tau^2}{3A^2 a^{*2}} = \frac{1}{3} \tanh^2 \left[\frac{\sigma}{\sqrt{3}} \right], \quad (\text{C.38})$$

où Ω_φ est la densité d'énergie du champ scalaire dans la représentation de Dicke-Jordan. On obtient donc

$$\boxed{\sigma(\tau, a^*) = \sqrt{3} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\sqrt{\Omega_\varphi H_0^2} \tau}{a^*} \right]}. \quad (\text{C.39})$$

Quant à la solution générale, on obtient, à partir de $\sigma = \sqrt{3} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{\kappa}{6}} \varphi \right]$, que

$$\sigma(\tau, a^*) = \sqrt{3} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\mu + \sqrt{\Omega_\varphi H_0^2} \tau}{a^*} \right]. \quad (\text{C.40})$$

A l'oscillation de φ , associée à une restauration temporaire de la Relativité Générale, correspond une oscillation de σ . Tant dans la représentation de Dicke-Jordan que d'Einstein, les paramètres post-newtoniens, relation (C.18), recouvrent leur valeur en Relativité Générale.

Pour finir, remarquons que les solutions obtenues ici sont exactes, contrairement à celle dérivée par [144] quand $\sigma \ll 1$, c'est-à-dire lorsque $\ln A = \frac{1}{2} k \sigma^2$. La condition initiale $\alpha \sim 1$ prise en [144] est difficilement obtenue pour la théorie "zéro- R " puisque $\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et que cette limite n'est saturée que pour $\mu \neq 0$ et $\sigma \rightarrow \infty$. Par ailleurs, nous montrons que les oscillations de σ ne dépendent pas que de la forme du potentiel mais aussi des conditions initiales au travers des paramètres μ et Ω_φ .

Annexe D

Champ scalaire thermalisé

Dans l'ère de radiation, le taux d'expansion est dominé par la densité des espèces relativistes. La densité d'énergie moyenne ρ_i d'une espèce relativiste i de température T_i est donnée, à l'équilibre thermodynamique, par le premier moment en énergie de la distribution de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac

$$\rho_i = \frac{15 \pm 1}{16} \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4, \quad (\text{D.1})$$

avec le signe (+) pour les bosons et le signe (−) pour les fermions, g_i est le facteur de dégénérescence de l'espèce.

L'équation de Friedmann-Lemaître s'écrit alors en fonction de la température T des photons

$$\mathcal{H}^2(T) = \frac{\kappa}{3} \frac{\pi^2}{30} g^*(T) T^4, \quad (\text{D.2})$$

en ayant défini le nombre effectif de degrés de liberté relativistes $g^*(T)$ par

$$g^*(T) \equiv \sum_{\text{bosons}} g_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions}} g_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^4. \quad (\text{D.3})$$

Partant de l'existence d'un réseau de couplages entre ces espèces relativistes, l'équilibre thermodynamique entre ces particules peut être établi, $T = T_i$. Le nombre effectif de degrés de liberté relativistes est alors égal au facteur de dégénérescence total.

L'évolution de la température du plasma primordial en expansion est guidée par la conservation de l'entropie. L'entropie est conservée individuellement pour les espèces déjà découplées. Pour les espèces en interaction, il faut considérer

l'entropie totale du système en interaction. De telle sorte que lorsqu'un de ces types de particules devient non-relativiste et de fait dont la contribution à l'entropie totale devient négligeable, l'entropie initiale de cette espèce est transférée au reste du plasma en interaction.

L'entropie par unité de volume comobile s'écrit

$$s = \sum_i \frac{\rho_i + p_i}{T_i}, \quad (\text{D.4})$$

où la somme s'effectue sur toutes les espèces présentes. Dans l'ère de radiation,

$$s = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{30} q^*(T) T^3, \quad (\text{D.5})$$

avec

$$q^*(T) \equiv \sum_{\text{bosons}} g_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions}} g_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3, \quad (\text{D.6})$$

en sommant sur les espèces i encore relativistes à la température T_i .

Au dessus de la température T_D , on suppose que le champ scalaire est maintenu à l'équilibre thermique avec le gaz de photons, $T_\varphi(a) = T(a)$ pour $a > a_D$. Après le découplage du champ scalaire avec le reste du plasma, la conservation séparée des entropies du champ scalaire et du reste du plasma implique que leurs températures restent égales. Tout au long de l'expansion de l'univers, la température du fluide associé à φ continue de décroître en $T_\varphi \propto a^{-1}$. Au contraire, le refroidissement des photons est atténué par les découplages successifs de paires particules-antiparticules. La température des photons est donnée, elle, par

$$T(a) = \left[\frac{q^\varphi(T_D)}{q^\varphi(T(a))} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{a_D T_D}{a}, \quad (\text{D.7})$$

$q^\varphi(T)$ étant défini en (D.6) où la somme inclut toutes les particules, hormis le champ scalaire φ , qu'elles soient ou non à l'équilibre avec les photons. L'égalité des températures du champ scalaire et des photons avant le découplage permet d'exprimer $T_\varphi(a)$ en fonction de $T(a)$ après le découplage étant donné que $T_\varphi \propto a^{-1}$. La relation entre la valeur actuelle de la densité d'énergie du champ scalaire et celle des photons s'obtient dès lors en comptant un seul degré de

liberté pour φ et deux degrés de liberté pour les photons (D.1)

$$\Omega_\varphi h^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{q^\phi(T_0)}{q^\phi(T_D)} \right]^{\frac{4}{3}} \Omega_\gamma h^2. \quad (\text{D.8})$$

Pour trois familles de neutrinos de masse nulle et donc de température actuelle

$$T_{\nu 0} = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_0, \quad (\text{D.9})$$

on obtient $q^\phi(T_0) = \frac{43}{11}$. A première vue, la relation (D.8) dépend du nombre de neutrinos encore relativistes à notre époque par le biais de $q^\phi(T_0)$. Néanmoins, la densité actuelle du champ scalaire est indépendante d'une probable transition des neutrinos vers un état non-relativiste dans l'ère de matière. Cette indépendance apparaît clairement en scindant le précédent raisonnement en deux parties. Tout d'abord, pour des températures situées entre celle du découplage du champ scalaire T_D et celle du découplage des neutrinos $T_{D\nu}$, la conservation de l'entropie indique que

$$T_\varphi = \left[\frac{q^\gamma(T) + g_\nu}{q^\gamma(T_D) + g_\nu} \right]^{\frac{1}{3}} T, \quad T_{D\nu} \leq T < T_D, \quad (\text{D.10})$$

où $q^\gamma(T)$ est défini par la relation (D.6) pour laquelle la somme se limite aux espèces relativistes en interaction avec les photons à la température T , neutrinos exclus. La constante g_ν est le facteur de dégénérescence total des neutrinos. De même, pour des températures inférieures à $T_{D\nu}$

$$T_\varphi = \left[\frac{q^\gamma(T_{D\nu}) + g_\nu}{q^\gamma(T_D) + g_\nu} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{q^\gamma(T)}{q^\gamma(T_{D\nu})} \right]^{\frac{1}{3}} T, \quad T \leq T_{D\nu}. \quad (\text{D.11})$$

De cette dernière relation, évaluée en $T = T_0$, on dérive (D.8). Le premier terme entre crochets de (D.11) exprime le réchauffement relatif du plasma vis à vis du fluide φ entre T_D et $T_{D\nu}$. Le second, décrivant le réchauffement des photons par l'annihilation e^+e^- , est indépendant du comportement des neutrinos après l'ère de radiation, tant qu'ils restent découplés des photons.

Pour une température de découplage du champ scalaire supérieure à l'échelle de brisure électrofaible T_{EW} , le facteur $q^\phi(T_D)$ reprend tous les degrés de liberté du Modèle Standard et s'évalue à $\frac{427}{4}$, portant la densité actuelle du champ

scalaire à, d'après (D.8),

$$\Omega_\varphi h^2 \simeq 6.08 \times 10^{-3} \Omega_\gamma h^2, \quad \text{si } T_D > T_{EW}, \quad (\text{D.12a})$$

$$\simeq 1.50 \times 10^{-7}. \quad (\text{D.12b})$$

L'extension à des propositions théoriques au delà du Modèle Standard se réalise en ajoutant dans la somme qui définit $q^\phi(T)$ l'ensemble des degrés de liberté non-standards encore relativistes à la température T .

Bibliographie

- [1] V. Boucher, J. M. Gérard, P. Vandergheynst, et Y. Wiaux. *Cosmic microwave background constraints on the strong equivalence principle*. Phys. Rev., **D70** 103528, 2004.
- [2] V. Boucher, J. M. Gérard, P. Vandergheynst, et Y. Wiaux. *Primordial constraint on the spatial dependence of the Newton constant*. 2004.
- [3] V. Boucher. *A cosmological test for general relativity (Новый космологический тест для общей теории относительности)*. Grav. Cosmol., **11** 71–74, 2005.
- [4] J.-M. Alimi, A. Füzfa, V. Boucher, Y. Rasera, J. Courtin, et P.-S. Corasaniti. *Imprints of Dark Energy on Cosmic Structure Formation I) Realistic Quintessence Models*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **401** 775–790, 2010.
- [5] J. Courtin, Y. Rasera, J.-M. Alimi, P.-S. Corasaniti, V. Boucher, et A. Fuzfa. *Imprints of dark energy on cosmic structure formation : II) Non-Universality of the halo mass function*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **410** 1911–1931, 2011.
- [6] Y. Rasera, J.-M. Alimi, J. Courtin, F. Roy, P.-S. Corasaniti, A. Füzfa, et V. Boucher. *Introducing the Dark Energy Universe Simulation Series (DEUSS)*. AIP Conference Proceedings, **1241** 1134–1139, 2010. <http://www.deus-consortium.org/>.
- [7] C. M. Will. *The Confrontation between general relativity and experiment*. Living Rev.Rel., **9** 3, 2001 (mis à jour en 2006).
- [8] L. P. Eisenhart. *Non-Riemannian geometry*. American Mathematical Society, New York, 1927.
- [9] J.-M. Gérard. *Syllabus du cours de Relativité Générale*. UCLouvain, 2009.
- [10] J.-M. Gérard. *The strong equivalence principle from a gravitational gauge structure*. Class. Quant. Grav., **24** 1867–1878, 2007.

-
- [11] P. J. Mohr, B. N. Taylor, et D. B. Newell. *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants : 2010*. 2012. E-print : arXiv.org/abs/1203.5425.
- [12] C. Brans et R. Dicke. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. Phys. Rev., **124** 925–935, 1961.
- [13] K. Nordtvedt. *Equivalence Principle for Massive Bodies. 1. Phenomenology*. Phys. Rev., **169** 1014–1016, 1968.
- [14] K. Nordtvedt. *Equivalence Principle for Massive Bodies. 2. Theory*. Phys. Rev., **169** 1017–1025, 1968.
- [15] C. M. Will et H. W. Zaglauer. *Gravitational radiation, close binary systems, and the Brans-Dicke theory of gravity*. Astrophys. J., **346** 366–377, November 1989.
- [16] J.-M. Gérard. *Mass Issues in Fundamental Interactions*. 2008. Proceedings of the 2008 European School of High-Energy Physics, Herbeumont, Belgium.
- [17] J. Williams, X. Newhall, et J. Dickey. *Relativity parameters determined from lunar laser ranging*. Phys. Rev., **D53** 6730–6739, 1996.
- [18] J. G. Williams, S. G. Turyshev, et D. H. Boggs. *Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon*. Int. J. Mod. Phys., **D18** 1129–1175, 2009.
- [19] J. G. Williams, S. G. Turyshev, et D. H. Boggs. *Progress in Lunar Laser Ranging Tests of Relativistic Gravity*. Phys. Rev. Lett., **93** 261101, 2004.
- [20] J. Gérard et Y. Wiaux. *Gravitational dipole radiations from binary systems*. Phys. Rev., **D66** 024040, 2002.
- [21] D. J. Nice, E. M. Splaver, I. H. Stairs, O. Loehmer, A. Jessner, et al. *A 2.1 solar mass pulsar measured by relativistic orbital decay*. Astrophys. J., **634** 1242–1249, 2005.
- [22] P. Demorest, T. Pennucci, S. Ransom, M. Roberts, et J. Hessels. *Shapiro Delay Measurement of A Two Solar Mass Neutron Star*. Nature, **467** 1081–1083, 2010.
- [23] S. G. Turyshev. *Experimental Tests of General Relativity*. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., **58** 207–248, 2008.
- [24] P. A. M. Dirac. *The Cosmological Constants*. Nature, **139** 323, 1937.
- [25] C. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [26] S. Schlamminger, K.-Y. Choi, T. Wagner, J. Gundlach, et E. Adelberger. *Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance*. Phys. Rev. Lett., **100** 041101, 2008.

- [27] B. Bertotti, L. Iess, et P. Tortora. *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*. Nature, **425** 374, 2003.
- [28] G. Lemaître. *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, **47** 49–59, 1927.
- [29] E. Hubble. *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*. Proceedings of the National Academy of Science, **15** 168–173, March 1929.
- [30] A. G. Riess et al. *A 3% Solution : Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3*. Astrophys.J., **730** 119, 2011.
- [31] A. Friedman. *Über die Krümmung des Raumes*. Z. Phys., **10** 377–386, 1922.
- [32] A. Friedmann. *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*. Z. Phys., **21** 326–332, 1924.
- [33] A. Friedman. *On the curvature of space*. Gen. Rel. Grav., **31** 1991–2000, 1999.
- [34] A. Friedmann. *On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature of Space*. Gen. Rel. Grav., **31** 2001–2008, 1999.
- [35] B. Leibundgut. *Time Dilation in the Light Curve of the Distant Type Ia Supernovae SN 1995K*. Astrophys. J., **466** L21, 1996.
- [36] G. Goldhaber et al. *Timescale Stretch Parameterization of Type Ia Supernova B- band Light Curves*. Astrophys. J., **558** 359–368, 2001.
- [37] L. M. Lubin et A. Sandage. *The Tolman Surface Brightness Test for the Reality of the Expansion. IV. A Measurement of the Tolman Signal and the Luminosity Evolution of Early-Type Galaxies*. Astron. J., **122** 1084–1103, 2001.
- [38] E. Komatsu et al. *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation*. Astrophys.J.Suppl., **192** 18, 2011.
- [39] J. C. Mather, D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier, et D. T. Wilkinson. *Calibrator Design for the COBE Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS)*. Astrophys. J., **512** 511–520, 1999.
- [40] R. Srianand, P. Petitjean, et C. Ledoux. *The cosmic microwave background radiation temperature at a redshift of 2.34*. Nature, **408** 931–935, 2000.

- [41] P. Noterdaeme, P. Petitjean, R. Srianand, C. Ledoux, et S. López. *The evolution of the cosmic microwave background temperature. Measurements of T_{CMB} at high redshift from carbon monoxide excitation.* *Astron. Astrophys.*, **526** L7, 2011.
- [42] R. Trotta et A. Melchiorri. *Indication for primordial anisotropies in the neutrino background from WMAP and SDSS.* *Phys. Rev. Lett.*, **95** 011305, 2005.
- [43] K. Nakamura et al. *Review of particle physics.* *J. Phys.*, **G37** 075021, 2010.
- [44] D. Fixsen. *The Temperature of the Cosmic Microwave Background.* *Astrophys. J.*, **707** 916–920, 2009.
- [45] M. Fukugita et P. J. E. Peebles. *The Cosmic energy inventory.* *Astrophys. J.*, **616** 643–668, 2004.
- [46] R. Sunyaev et J. Chluba. *Signals From the Epoch of Cosmological Recombination.* *Astron. Nachr.*, **330** 657–674, 2009.
- [47] R. Sunyaev et J. Chluba. *The Richness and Beauty of the Physics of Cosmological Recombination.* *ASP Conf. Ser.*, 2007.
- [48] W. Y. Wong. *Cosmological Recombination.* Thèse de doctorat, University of British Columbia, 2008.
- [49] S. Seager, D. D. Sasselov, et D. Scott. *A New Calculation of the Recombination Epoch.* *Astrophys. J.*, **523** L1–L5, 1999. Version février 2008. <http://www.astro.ubc.ca/people/scott/recfast.html>.
- [50] S. Seager, D. D. Sasselov, et D. Scott. *How exactly did the universe become neutral?* *Astrophys. J. Suppl.*, **128** 407–430, 2000.
- [51] W. Y. Wong, A. Moss, et D. Scott. *How well do we understand cosmological recombination?* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2007.
- [52] J. Bernstein, L. S. Brown, et G. Feinberg. *Cosmological Helium Production Simplified.* *Rev. Mod. Phys.*, **61** 25, 1989.
- [53] G. Steigman. *Primordial Nucleosynthesis in the Precision Cosmology Era.* *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **57** 463–491, 2007.
- [54] F. Iocco, G. Mangano, G. Miele, O. Pisanti, et P. D. Serpico. *Primordial Nucleosynthesis : from precision cosmology to fundamental physics.* *Phys. Rept.*, **472** 1–76, 2009.
- [55] B. D. Fields. *The primordial lithium problem.* *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **61** 47–68, 2011.
- [56] E. V. Linder. *Mapping the Cosmological Expansion.* *Rept. Prog. Phys.*, **71** 056901, 2008.

-
- [57] S. Sarkar. *Is the evidence for dark energy secure?* Gen. Rel. Grav., **40** 269–284, 2008.
- [58] J. Frieman, M. Turner, et D. Huterer. *Dark Energy and the Accelerating Universe*. Ann. Rev. Astron. Astrophys., **46** 385–432, 2008.
- [59] A. Blanchard. *Evidence for the Fifth Element Astrophysical status of Dark Energy*. Astron. Astrophys. Rev., **18** 595–645, 2010.
- [60] T. Buchert. *Dark Energy from Structure : A Status Report*. Gen. Rel. Grav., **40** 467–527, 2008.
- [61] E. J. Copeland, M. Sami, et S. Tsujikawa. *Dynamics of dark energy*. Int. J. Mod. Phys., **D15** 1753–1936, 2006.
- [62] R. R. Caldwell et M. Kamionkowski. *The Physics of Cosmic Acceleration*. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., **59** 397–429, 2009.
- [63] T. Padmanabhan. *Dark energy and gravity*. Gen. Rel. Grav., **40** 529–564, 2008.
- [64] G. Hinshaw et al. *Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations : Temperature analysis*. Astrophys. J. Suppl., **170** 288, 2007.
- [65] M. Doran et M. Lilley. *The Location of CMB Peaks in a Universe with Dark Energy*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **330** 965–970, 2002.
- [66] S. Deser. *Improvement versus stability in gravity scalar coupling*. Phys. Lett., **B134** 419, 1984.
- [67] F. Cooper et G. Venturi. *Cosmology and broken scale invariance*. Phys. Rev., **D24** 3338, 1981.
- [68] E. W. Kolb et M. S. Turner. *The Early Universe*. Frontiers in Physics Series (Vol. 69). Addison Wesley, 1990.
- [69] C. Caprini, R. Durrer, T. Konstandin, et G. Servant. *General Properties of the Gravitational Wave Spectrum from Phase Transitions*. Phys. Rev., **D79** 083519, 2009.
- [70] D. A. Dicus et al. *Primordial Nucleosynthesis Including Radiative, Coulomb, and Finite Temperature Corrections to Weak Rates*. Phys. Rev., **D26** 2694, 1982.
- [71] A. F. Heckler. *Astrophysical applications of quantum corrections to the equation of state of a plasma*. Phys. Rev., **D49** 611–617, 1994.
- [72] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, et M. Peloso. *A precision calculation of the effective number of cosmological neutrinos*. Phys. Lett., **B534** 8–16, 2002.

-
- [73] A. Serna et J.-M. Alimi. *Constraints on the Scalar-Tensor Theories of Gravitation from Primordial Nucleosynthesis*. Phys. Rev., **D53** 3087–3098, 1996.
- [74] J. Larena, J.-M. Alimi, et A. Serna. *Big Bang nucleosynthesis in scalar tensor gravity : The key problem of the primordial Li-7 abundance*. Astrophys. J., **658** 1–10, 2007.
- [75] A. De Felice, G. Mangano, P. D. Serpico, et M. Trodden. *Relaxing nucleosynthesis constraints on Brans-Dicke theories*. Phys. Rev., **D74** 103005, 2006.
- [76] O. Pisanti et al. *PARthENoPE : Public Algorithm Evaluating the Nucleosynthesis of Primordial Elements*. Comp. Phys. Commun., **178** 956, 2008.
- [77] PARthENoPE, Version juillet 2007. <http://parthenope.na.infn.it/>.
- [78] P. Mertens. *Des principes d'équivalence aux théories tenseur-scalaire de la gravitation*. Mémoire de Master, UCLouvain, 2007.
- [79] K. A. Olive. *Big bang nucleosynthesis*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., **80** 79–93, 2000.
- [80] P. Peter et J.-P. Uzan. *Cosmologie primordiale*. Collection Echelles. Belin, 2005.
- [81] S. Bashinsky et U. Seljak. *Signatures of relativistic neutrinos in CMB anisotropy and matter clustering*. Phys. Rev., **D69** 083002, 2004.
- [82] X.-l. Chen et M. Kamionkowski. *Cosmic microwave background temperature and polarization anisotropy in Brans-Dicke cosmology*. Phys. Rev., **D60** 104036, 1999.
- [83] F. Wu, L.-e. Qiang, X. Wang, et X. Chen. *Cosmic microwave background with Brans-Dicke Gravity : I. Covariant Formulation*. Phys. Rev., **D82** 083002, 2010.
- [84] R. Nagata, T. Chiba, et N. Sugiyama. *Observational consequences of evolution of primordial fluctuations in scalar - tensor cosmology*. Phys. Rev., **D66** 103510, 2002.
- [85] A. Riazuelo et J.-P. Uzan. *Cosmological observations in scalar-tensor quintessence*. Phys. Rev., **D66** 023525, 2002.
- [86] R. Caldwell, A. Cooray, et A. Melchiorri. *Constraints on a New Post-General Relativity Cosmological Parameter*. Phys. Rev., **D76** 023507, 2007.
- [87] L. Pogosian et A. Silvestri. *The pattern of growth in viable $f(R)$ cosmologies*. Phys. Rev., **D77** 023503, 2008.

- [88] A. Lewis, A. Challinor, et A. Lasenby. *Efficient Computation of CMB anisotropies in closed FRW models*. *Astrophys. J.*, **538** 473–476, 2000. Version juin 2008. <http://cosmologist.info/camb>.
- [89] W. Hu et N. Sugiyama. *Anisotropies in the Cosmic Microwave Background : An Analytic Approach*. *Astrophys. J.*, **444** 489–506, 1995.
- [90] W. L. Freedman et al. *Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant*. *Astrophys. J.*, **553** 47–72, 2001.
- [91] A. G. Riess et al. *A Redetermination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope from a Differential Distance Ladder*. *Astrophys. J.*, **699** 539–563, 2009.
- [92] M. Hicken et al. *CfA3 : 185 Type Ia Supernova Light Curves from the CfA*. *Astrophys. J.*, **700** 331–357, 2009.
- [93] E. Gaztanaga, E. Garcia-Berro, J. Isern, E. Bravo, et I. Dominguez. *Bounds on the possible evolution of the Gravitational Constant from Cosmological Type-Ia Supernovae*. *Phys. Rev.*, **D65** 023506, 2002.
- [94] M. Kowalski et al. *Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets*. *Astrophys. J.*, **686** 749–778, 2008.
- [95] G. Miknaitis et al. *The ESSENCE Supernova Survey : Survey Optimization, Observations, and Supernova Photometry*. *Astrophys. J.*, **666** 674, 2007.
- [96] W. M. Wood-Vasey et al. *Observational Constraints on the Nature of the Dark Energy : First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey*. *Astrophys. J.*, **666** 694–715, 2007.
- [97] A. G. Riess et al. *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy*. *Astrophys. J.*, **659** 98–121, 2007.
- [98] P. Astier et al. *The Supernova Legacy Survey : Measurement of Ω_m , Ω_Λ and w from the First Year Data Set*. *Astron. Astrophys.*, **447** 31–48, 2006.
- [99] D. N. Spergel et al. *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Determination of Cosmological Parameters*. *Astrophys. J. Suppl.*, **148** 175–194, 2003.
- [100] D. N. Spergel et al. *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results : Implications for cosmology*. *Astrophys. J. Suppl.*, **170** 377, 2007.
- [101] E. Komatsu et al. *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation*. *Astrophys. J. Suppl.*, **180** 330–376, 2009.

-
- [102] M. R. Nolta et al. *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Angular Power Spectra*. *Astrophys. J. Suppl.*, **180** 296–305, 2009.
- [103] J. Dunkley et al. *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Likelihoods and Parameters from the WMAP data*. *Astrophys. J. Suppl.*, **180** 306–329, 2009.
- [104] E. Komatsu et U. Seljak. *The Sunyaev-Zel'dovich angular power spectrum as a probe of cosmological parameters*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **336** 1256, 2002.
- [105] Planck Collaboration. *Planck : The scientific programme*. *ESA-SCI*, **1**, 2006.
- [106] R. Jimenez et A. Loeb. *Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages*. *Astrophys.J.*, **573** 37–42, 2002.
- [107] M. Moresco, L. Verde, L. Pozzetti, R. Jimenez, et A. Cimatti. *New constraints on cosmological parameters and neutrino properties using the expansion rate of the Universe to z 1.75*. 2012.
- [108] J. Garcia-Bellido et D. G. Figueroa. *A stochastic background of gravitational waves from hybrid preheating*. *Phys. Rev. Lett.*, **98** 061302, 2007.
- [109] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig, et A. Saa. *On the singularities of gravity in the presence of nonminimally coupled scalar fields*. *Phys. Rev.*, **D67** 027301, 2003.
- [110] M. F. Figueiro et A. Saa. *Anisotropic singularities in modified gravity models*. *Phys. Rev.*, **D80** 063504, 2009.
- [111] H. Bondi. *Negative mass in general relativity*. *Rev. Mod. Phys.*, **29** 423–428, Jul 1957.
- [112] C. Wetterich. *Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry*. *Nucl. Phys.*, **B302** 668, 1988.
- [113] P. J. E. Peebles et B. Ratra. *Cosmology with a Time Variable Cosmological Constant*. *Astrophys. J.*, **325** L17, 1988.
- [114] B. Ratra et P. J. E. Peebles. *Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field*. *Phys. Rev.*, **D37** 3406, 1988.
- [115] A. Füzfa. *Instabilités gravitationnelles de champs de Yang-Mills et de champs scalaires dans l'univers primordial*. Thèse de doctorat, FUNDP, 2004.
- [116] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, et W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in FORTRAN 77 : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.

-
- [117] P. Brax et J. Martin. *Quintessence and supergravity*. Phys. Lett., **B468** 40–45, 1999.
- [118] P. Brax et J. Martin. *The robustness of quintessence*. Phys. Rev., **D61** 103502, 2000.
- [119] P. T. P. Viana et A. R. Liddle. *Perturbation evolution in cosmologies with a decaying cosmological constant*. Phys. Rev., **D57** 674–684, 1998.
- [120] R. R. Caldwell, R. Dave, et P. J. Steinhardt. *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State*. Phys. Rev. Lett., **80** 1582–1585, 1998.
- [121] F. Perrotta et C. Baccigalupi. *Early time perturbations behaviour in scalar field cosmologies*. Phys. Rev., **D59** 123508, 1999.
- [122] P. Brax, J. Martin, et A. Riazuelo. *Exhaustive study of cosmic microwave background anisotropies in quintessential scenarios*. Phys. Rev., **D62** 103505, 2000.
- [123] A. Klypin, A. V. Maccio, R. Mainini, et S. A. Bonometto. *Halo properties in models with dynamical Dark Energy*. Astrophys. J., **599** 31–37, 2003.
- [124] P. Solevi, R. Mainini, S. Bonometto, A. Maccio, A. Klypin, et S. Gottloeber. *Tracing the nature of dark energy with galaxy distribution*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **366** 1346–1356, 2006.
- [125] K. Dolag, M. Bartelmann, F. Perrotta, C. Baccigalupi, L. Moscardini, M. Meneghetti, et G. Tormen. *Numerical study of halo concentrations in dark-energy cosmologies*. Astron. Astrophys., **416** 853–864, 2004.
- [126] U. Maio, K. Dolag, M. Meneghetti, L. Moscardini, N. Yoshida, C. Baccigalupi, M. Bartelmann, et F. Perrotta. *Early structure formation in quintessence models and its implications for cosmic reionisation from first stars*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **373** 869–878, 2006.
- [127] L. Casarini, A. V. Maccio, et S. A. Bonometto. *Dynamical dark energy simulations : high accuracy power spectra at high redshift*. J. Cosm. Astropart. Phys., **0903** 014, 2009.
- [128] G. La Vacca, J. R. Kristiansen, L. P. L. Colombo, R. Mainini, et S. A. Bonometto. *Do WMAP data favor neutrino mass and a coupling between Cold Dark Matter and Dark Energy?* J. Cosm. Astropart. Phys., **0904** 007, 2009.
- [129] M. Chevallier et D. Polarski. *Accelerating universes with scaling dark matter*. Int. J. Mod. Phys., **D10** 213–224, 2001.
- [130] S. Prunet, C. Pichon, D. Aubert, D. Pogosyan, R. Teyssier, et S. Gottloeber. *Initial conditions for large cosmological simulations*. The Astrophysical Journal Supplement Series, **178(2)** 179, 2008.

-
- [131] Projet Horizon. <http://www.projet-horizon.fr>.
- [132] P. McDonald, H. Trac, et C. Contaldi. *Dependence of the non-linear mass power spectrum on the equation of state of dark energy*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **366** 547–556, 2006.
- [133] R. E. Smith et al. *Stable clustering, the halo model and nonlinear cosmological power spectra*. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **341** 1311, 2003.
- [134] F. Bernardeau. *Cosmologie : des fondements théoriques aux observations*. EDP Sciences, 2005.
- [135] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [136] R. Trotta. *Cosmic Microwave Background Anisotropies : Beyond Standard Parameters*. Thèse de doctorat, Université de Genève, 2004.
- [137] W. Hu et N. Sugiyama. *Small scale cosmological perturbations : An Analytic approach*. Astrophys. J., **471** 542–570, 1996.
- [138] M. Kamionkowski et A. Loeb. *Getting around cosmic variance*. Phys. Rev., **D56** 4511–4513, 1997.
- [139] C. Skordis et J. Silk. *A new method for measuring the CMB temperature quadrupole with an accuracy better than cosmic variance*. 2004.
- [140] J. Portsmouth. *Beating cosmic variance with CMB polarization*. Phys. Rev., **D70** 063504, 2004.
- [141] A. Lewis et S. Bridle. *Cosmological parameters from CMB and other data : a Monte-Carlo approach*. Phys. Rev., **D66** 103511, 2002. Version juin 2008. <http://cosmologist.info/cosmomc>.
- [142] R. Dicke. *Mach's principle and invariance under transformation of units*. Phys. Rev., **125** 2163–2167, 1962.
- [143] L. R. Abramo, L. Brenig, et E. Gunzig. *On the stability of gravity in the presence of a non-minimally coupled scalar field*. Phys. Lett., **B549** 13–19, 2002.
- [144] T. Damour et K. Nordtvedt. *General relativity as a cosmological attractor of tensor scalar theories*. Phys. Rev. Lett., **70** 2217–2219, 1993.
- [145] J.-M. Gérard. *Théorie(s) tenseur scalaire de Brans-Dicke pour la gravitation*. Cours de 3e cycle, UCL, 2004-2005.

